Prof. Dr. A. Lytchak

WS 2014/15
Blatt 1
14.10.2014

Elementare Geometrie

Anwesenheitsblatt

1. Es sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Euklidischen Metrik
$$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$
Zeigen Sie:
   a) Zwischen je zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ existiert ein eindeutiger Mittelpunkt M.
   b) Zwei verschiedene Punkte $P \neq Q$ liegen auf einer eindeutigen Geraden L.
   c) Für jede Bewegung $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ existiert eine orthogonale Abbildung $T \in O(2)$, so dass f gegeben ist durch $f(x) = f(0) + T \cdot x$.

2. In einem metrischen Raum (X, d) konvergiert eine Folge (x_n) genau dann gegen einen Punkt x, wenn $d(x_n, x) \to 0$. In Zeichen: $x_n \to x$. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, falls $f(x_n) \to f(x)$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x$.

3. Es sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Metrik
$$d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$
Zeigen Sie:
   a) Für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ sind Abbildungen
   $$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto P + te_1 \quad \text{und} \quad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto P + te_2$$
   abstandserhaltend in $(\mathbb{R}^2, d_1)$. Man nennt das Bild von h eine *horizontale Gerade* und das Bild v eine *vertikale Gerade*.
   b) Zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ existiert genau dann ein eindeutiger Mittelpunkt M, falls gilt $P_1 = Q_1$ oder $P_2 = Q_2$.
   c) Eine Bewegung $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2, d_1)$ bildet eine horizontale Gerade entweder auf eine horizontale oder eine vertikale Gerade ab.
   d) Für jede Bewegung $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2, d_1)$ existiert eine Matrix $T \in \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, so dass f gegeben ist durch $f(x) = f(0) + T \cdot x$.

4. Gegeben sei eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2, d_1)$. Zeigen Sie, dass γ genau dann eine isometrische Abbildung in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist wenn die Komponentenfunktionen γ_i, $i = 1, 2$ monoton sind und $d_1(\gamma(t), \gamma(0)) = |t|$ gilt.