Prof. Dr. A. Lytchak

WS 2014/15
Blatt 5
6.11.2014

Elementare Geometrie

Abgabe: Donnerstag, 13.11.2014 bis 12:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Wir führen folgende Sprechweise ein: Eine Gerade l *separiert* eine Menge M genau dann, wenn M die beiden durch l bestimmten Halbebenen schneidet. Eine Strecke $[AB]$ *separiert* die Menge M, genau dann wenn (AB) die Menge M separiert.

18. Es sei $\square ABCD$ ein nicht-ausgeartetes Viereck in der Euklidischen Ebene. Zeigen Sie, dass genau eine der folgenden Aussagen zutrifft, beweisen Sie die jeweils behaupteten Äquivalenzen und malen Sie für jeden Fall ein Beispiel.

    (i) Die Diagonalen in $\square ABCD$ schneiden sich. Dies gilt genau dann, wenn $\square ABCD$ von beide Diagonalen separiert wird. (Konvexes Viereck.)

    (ii) Zwei Seiten in $\square ABCD$ schneiden sich. Dies gilt genau dann, wenn $\square ABCD$ von keiner der beide Diagonalen separiert wird. ($\square ACBD$ ist konvex.)

    (iii) Weder Seiten noch Diagonalen in $\square ABCD$ schneiden sich. Dies gilt genau dann, wenn $\square ABCD$ von genau einer Diagonale separiert wird.

19. Es sei $\triangle ABC$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck in der Euklidischen Ebene.

    a) Die äußere Winkelhalbierende von $\angle CAB$ ist parallel zu (BC) genau dann, wenn $\triangle ABC$ gleichschenklig mit Basis $[BC]$ ist.

    b) Existiert ein Schnittpunkt D der äußeren Winkelhalbierenden von $\angle CAB$ mit (BC), so gilt
    $$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}.$$

20. Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck in der Euklidischen Ebene. Die Höhenfußpunkte werden mit X, Y und Z bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ mit dem Inkreismittelpunkt von $\triangle XYZ$ übereinstimmt.

21. Es seien $[XX']$ und $[YY']$ zwei Sehnen in einem Kreis Γ mit Zentrum O und Radius r in der Euklidischen Ebene. Die Geraden (XX') und (YY') schneiden sich in dem Punkt P. Zeigen Sie:

    a) $2\measuredangle XPY = \measuredangle XOY + \measuredangle X'OY'$;

    b) $\triangle PXY \sim \triangle PY'X'$;

    c) $PX \cdot PX' = |OP^2 - r^2|$.

22. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Konstruktion.

a) Gegeben sei ein Punkt P und ein Kreis Γ. Konstruieren Sie eine Tangente an Γ durch den Punkt P.

b) Gegeben sei eine Strecke $[AB]$. Konstruieren Sie eine Dreiteilung und eine Fünfteilung der gegebenen Strecke.