Prof. Dr. A. Lytchak

WS 2014/15
Blatt 10
4.12.2014

Elementare Geometrie

Abgabe: Donnerstag, 11.12.2014 bis 12:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

41. Zeigen Sie, dass es ein Dreieck in der hyperbolischen Ebene gibt, bei dem sich zwei Mittelsenkrechten nicht schneiden. Insbesondere hat ein solches Dreieck keinen Umkreis.
Hinweis: Betrachten Sie ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit genügend langen Seiten.

42. Zeigen Sie: Für jedes $r \in (0, \pi)$ gibt es ein Dreieck in der hyperbolischen Ebene mit Defekt r.

43. Im Folgenden sei der Flächeninhalt eines Euklidischen Dreiecks definiert durch die Formel „Flächeninhalt=$\frac{1}{2}$ Grundseite · Höhe“. Zeigen Sie, dass zwei Dreiecke in der Euklidischen Ebene mit gleichem Flächeninhalt zerlegungsgleich sind.
Hinweis: Orientieren Sie sich an dem Beweis aus der Vorlesung.

44. In der hyperbolischen Ebene bezeichnen A, B unterschiedliche Punkte und s_0, s_1 und s_2 paarweise nicht-asymptotische Strahlen.

    Das *einfach asymptotische Dreieck* $\triangle ABs_0$ besteht aus der Strecke $[AB]$ und den eindeutigen Strahlen s_A und s_B, wobei s_A in A und s_B in B beginnt und beide asymptotisch zu s_0 sind.

    Das *zweifach asymptotische Dreieck* $\triangle s_0 A s_1$ besteht aus den Strahlen s_A, s'_A und der eindeutigen Geraden l, so dass gilt: s_A beginnt in A und ist asymptotisch zu s_0; s'_A beginnt in A und ist asymptotisch zu s_1; die Gerade l ist asymptotisch zu beiden Strahlen, s_0 und s_1.

    Das *dreifach asymptotische Dreieck* bzw. *ideale Dreieck* $\triangle s_0 s_1 s_2$ besteht aus drei Geraden l_0, l_1 und l_2, so dass jeweils l_i asymptotisch zu s_{i-1} und s_{i+1} ist.

    Zeigen Sie:

    a) Sind $\triangle ABs$ und $\triangle A'B's'$ einfach asymptotische Dreiecke, und gilt $\measuredangle s_A AB = \measuredangle s_{A'} A'B'$ und $\measuredangle ABs_B = \measuredangle A'B's_{B'}$, so sind $\triangle ABs$ und $\triangle A'B's'$ kongruent.

    b) Sind $\triangle s_0 A s_1$ und $\triangle \tilde{s}_0 \tilde{A} \tilde{s}_1$ zweifach asymptotische Dreiecke, und gilt $\measuredangle s_A A s'_A = \measuredangle s_{\tilde{A}} \tilde{A} s'_{\tilde{A}}$, so sind $\triangle s_0 A s_1$ und $\triangle \tilde{s}_0 \tilde{A} \tilde{s}_1$ kongruent.

    c) Je zwei ideale Dreiecke sind kongruent.