Prof. Dr. A. Lytchak

WS 2014/15
Blatt 1
18.10.2014

Elementare Geometrie

— Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Man rechnet nach, dass für Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $M := \frac{P+Q}{2}$ ein Mittelpunkt ist. Um die Eindeutigkeit zu beweisen nehmen wir an, dass M' ein Mittelpunkt ist und setzen $M'' := \frac{M+M'}{2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_2^2(P, M'') &= \frac{1}{2} d_2^2(P, M) + \frac{1}{2} d_2^2(P, M') - \frac{1}{4} d_2^2(M, M') \\ &= \frac{1}{8} d_2^2(P, Q) + \frac{1}{8} d_2^2(P, Q) - \frac{1}{4} d_2^2(M, M') \\ &= \frac{1}{4} d_2^2(P, Q) - \frac{1}{4} d_2^2(M, M') \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung einfach den Abstand einer Ecke in einem Euklidischen Dreieck zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite beschreibt und die zweite Gleichung verwendet, dass M und M' Mittelpunkte sind. Genauso erhalten wir:

$$d_2^2(Q, M'') = \frac{1}{4} d_2^2(P, Q) - \frac{1}{4} d_2^2(M, M').$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} d_2(P, Q) &\leq d_2(P, M'') + d_2(M'', Q) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} d_2^2(P, Q) - \frac{1}{4} d_2^2(M, M')} + \sqrt{\frac{1}{4} d_2^2(P, Q) - \frac{1}{4} d_2^2(M, M')} \leq d_2(P, Q). \end{aligned}$$

Also gilt $M = M'$ und die Eindeutigkeit ist gezeigt.

b) Wir zeigen, dass jede Gerade eine affine Gerade im Sinn der linearen Algebra ist. Liegen drei Punkte A, B, C auf einer Geraden, dann gilt nach umsortieren: $d_2(A, C) = d_2(A, B) + d_2(B, C)$. Quadrieren wir die Gleichung und verwenden die Definition der Euklidischen Metrik, so erhalten wir für die linke Seite

$$\|A - C\|^2 = \|A - B\|^2 + 2 \langle A - B, B - C \rangle + \|B - C\|^2$$

und für die rechte Seite

$$\|A - B\|^2 + 2 \|A - B\| \, \|B - C\| + \|B - C\|^2 .$$

Es folgt $\langle A-B, B-C\rangle = \|A-B\| \, \|B-C\|$. Der Starrheitsteil der Cauchy-Schwarz Ungleichung impliziert dann $A-B = \lambda(B-C)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Also liegen die Punkte A, B, C auf der affinen Geraden $A + t(A-B)$. Variieren wir nun den Punkt C, so sehen wir, dass die Gerade durch die Punkte A und B genau die (eindeutige) affine Gerade $A + t(A-B)$ ist.

c) Es sei $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ eine Bewegung. Dann ist $f_1 := f - f(0)$ eine Bewegung die den Nullpunkt auf den Nullpunkt abbildet und damit Geraden durch den Nullpunkt auf Geraden durch den Nullpunkt. Es sei $\{e_1, e_2\}$ ein ON-Basis von $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Das Bild L_1 der Abbildung $t \mapsto te_1$ ist eine Gerade durch den Nullpunkt. Es sei dann $\Phi \in O(2)$ eine orthogonale Abbildung welche die Gerade $f_1(L_1)$ zurückdreht auf die Gerade L_1, also $\Phi(f_1(te_1)) = te_1$. Die Menge der Punkte mit gleichem Abstand zu e_1 und $-e_1$ beschreiben eine Gerade L_2. Diese ist das Bild der Abbildung $t \mapsto te_2$. (Lösen eines linearen Gleichungssystems.) Wegen $\Phi(f_1(\pm e_1)) = \pm e_1$ gilt $\Phi \circ f_1(L_2) = L_2$. Nach eventueller Komposition mit einer Spiegelung an der Geraden L_1 können wir annehmen, dass sogar $\Phi(f_1(te_2)) = te_2$ gilt. Es folgt nun, dass $\Phi \circ f_1$ die Identität ist: Jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ liegt auf einer Geraden die L_1 und L_2 schneidet und jede solche Gerade muss von $\Phi \circ f_1$ punktweise fixiert werden wegen Teilaufgabe b). Wir erhalten $f = \Phi^{-1} + f(0)$.

2. Wir nehmen zunächst an, dass $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine stetige Abbildung ist und zeigen, dass f auch folgenstetig ist. Es sei (x_n) eine konvergente Folge mit $x_n \to x$. Für $\epsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ für alle Punkte $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$. Nun wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so dass $d_X(x, x_n) < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Es folgt dann $d_Y(f(x), f(x_n)) < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und damit $f(x_n) \to f(x)$.

   Wir nehmen nun an, dass f im Punkt $x_0 \in X$ nicht stetig ist und zeigen, dass dann f auch nicht folgenstetig ist. Nach Annahme existiert ein $\epsilon_0 > 0$ so dass keiner der Bälle $B_{\frac{1}{n}}(x_0) := \{x \in X | \; d_X(x, x_0) < \frac{1}{n}\}$ in den Ball $B_{\epsilon_0}(f(x_0))$ abgebildet wird. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ mit $d_Y(f(x_0), f(x_n)) \geq \epsilon_0$. Nach Konstruktion konvergiert aber die Folge (x_n) gegen den Punkt x_0 und damit ist f nicht folgenstetig denn $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$.

3. a) Nachrechnen.

   b) Es seien P und Q zwei Punkte. Die Mittelpunkte erhalten wir indem wir die abgeschlossenen Abstandsbälle mit Radius $\frac{d_1(P,Q)}{2}$ um die Punkte P und Q schneiden. Nehmen wir $|Q_1 - P_1| \geq |Q_2 - P_2|$ und $Q_1 \geq P_1$ an, so ergeben sich als Mittelpunkte

$$M_t = t \begin{pmatrix} P_1 + \frac{d_1(P,Q)}{2} \\ P_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} Q_1 - \frac{d_1(P,Q)}{2} \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

   mit $t \in [0, 1]$. Es gibt also einen eindeutigen Mittelpunkt genau dann wenn $P_2 = Q_2$.

c) Folgt direkt aus Teilaufgabe b).

d) Nach Komposition mit einer Translation können wir annehmen, dass $f(0) = 0$ gilt. Nach Teilaufgabe c) bildet dann f das Koordinatenkreuz auf sich selbst ab. Durch geeignete Komposition mit Bewegungen aus $\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ können wir erreichen, dass f das Koordinatenkreuz punktweise fixiert. Dann muss aber f bereits die Identität sein, denn f muss nun jede horizontale und jede vertikale Gerade punktweise fixieren.

4. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2, d_1)$ eine abstandserhaltende Abbildung. Dann gilt natürlich $d_1(\gamma(t), \gamma(0)) = |t|$. Gilt für $t < \tilde{t}$ $\gamma_1(t) = \gamma_1(\tilde{t})$ so folgt aus Aufgabe 3 b) $\gamma_1(t + \frac{k}{2^n}(\tilde{t} - t)) = \gamma_1(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq 2^n$. Aus der Stetigkeit von γ_1 folgt nun die Monotonie. Genauso für γ_2.

Ist umgekehrt $\gamma : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2, d_1)$ eine Abbildung mit γ_i, $i = 1, 2$ monoton und $d_1(\gamma(t), \gamma(0)) = |t|$ so wollen wir zeigen, dass das Bild von γ eine Gerade ist. Durch Komposition mit geeigneten Isometrien können wir annehmen, dass γ_i, $i = 1, 2$ monoton steigend ist. Es sei $t < \tilde{t}$, dann gilt

$$\begin{aligned} d_1(\gamma(\tilde{t}), \gamma(t)) &= |\gamma_1(\tilde{t}) - \gamma_1(t)| + |\gamma_2(\tilde{t}) - \gamma_2(t)| \\ &= \gamma_1(\tilde{t}) - \gamma_1(t) + \gamma_2(\tilde{t}) - \gamma_2(t) \\ &= \gamma_1(\tilde{t}) - \gamma_1(0) - \gamma_1(t) + \gamma_1(0) + \gamma_2(\tilde{t}) - \gamma_2(0) - \gamma_2(t) + \gamma_2(0) \\ &= \tilde{t} - t = |\tilde{t} - t|. \end{aligned}$$

Also ist γ abstandserhaltend und damit das Bild eine Gerade.