1. Fläche von Dreiecken

Das Ziel dieses Abschnittes ist es den folgenden Satz zu beweisen, den bereits Bolyai und Gauß kannten.

SATZ 1.1. *Sei H eine hyperbolische Ebene. Dann gibt es eine Konstante k, so dass ein Dreieck mit Defekt δ Fläche $k \cdot \delta$ hat.*

Wir werden nicht genau definieren was die Fläche einer Figur ist. Für diejenigen die es kennen, ist die Fläche das 2-dimensionale Hausdorffmaß. Wenn im Folgenden von einem Dreieck oder konvexen Viereck die Rede ist, so kann, anders als bis jetzt, je nach Kontext, nicht nur die Ecken oder Seiten, sondern das Innere gemeint sein, d.h. die Menge aller Punkte die auf einer Strecke zwischen zwei Punkten auf den Seiten liegen. Darauf bezieht sich der Begriff Fläche eines Dreiecks oder Vierecks.

Wir werden im Folgenden über die Fläche nur benutzen, dass jedes nicht-ausgeartete Dreieck eine endliche Fläche hat und, dass zwei Drei- oder Vierecke, die aus jeweils zueinander kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind dieselbe Fläche haben. Wir präzisieren den letzten Begriff ein wenig:

Definition 1.2. *Zwei Vielecke (für uns viel $= 2, 3$) Δ_1, Δ_2 heißen zerlegungsgleich, wenn man sie als Vereinigung von Dreiecken $T_1, ..., T_n$ bzw. $S_1, ..., S_n$ darstellen kann, so dass sich verschiedene T_i bzw. verschiedene S_i höchstens entlang von Seiten oder Ecken schneiden, und so dass T_i kongruent zu S_i sind.*

Wir werden über die Fläche lediglich benutzen, dass kongruente Dreiecke gleiche Fläche haben, dass bei einer Zerlegung wie oben die Fläche von $F(\Delta_1)$ gleich $F(T_1) + F(T_2) + ... + F(T_n)$ ist.

Der wichtigste Bestandteil von dem Satz von Bolyai-Gauß oben ist der folgende

SATZ 1.3. *Zwei nicht-ausgeartete Dreiecke in der hyperbolischen Ebene H mit gleichem Defekt sind zerlegungsgleich.*

Zum Beweis benutzen wir folgenden Begriff:

Definition 1.4. *Ein konvexes Viereck $\Box ABCD$ ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $[AB]$ und Gipfel CD, wenn $(AB) \perp (AD)$ und $(AB) \perp (BC)$ und $AD = BC$.*

In einem Saccheri-Viereck gilt $\measuredangle BCD = \measuredangle CDA$. Ist dieses Winkelmaß α positiv, so gilt $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Ferner hängt α nur von AB und AD ab. Letztlich sind zwei Saccheri-Vierecke mit gleichen α und Gipfel-Längen kongruent.

Lemma 1.5. *Sei das Dreieck ΔABC gegeben. Dann ist es zerlegungsgleich mit einem Saccheri-Viereck mit Gipfel $[AB]$ und Gipfelwinkel $\alpha = \frac{1}{2}(\pi - defekt(\Delta ABC))$.*

Beweis. Sei $[A'B']$ die Strecke zwischen den Mittelpunkten von $[BC]$ und $[AC]$. Sei P der Fußpunkt von C auf $(A'B')$. Lege die Dreiecke $\Delta CPB'$ und $\Delta CPA'$ an die Seiten $[AB']$ und $[BA']$. $\square$

Korollar 1.6. *Zwei Dreiecke mit gleichem Defekt und einer gleichen Seite sind zerlegungsgleich.*

Für den allgemeinen Fall benutzt man nun folgenden Trick:

Lemma 1.7. *Ist ΔABC gegeben und $r \in \mathbb{R}$ grösser als alle Seitenlängen des Dreiecks, so gibt es ein Dreieck $\Delta ABC'$ mit $AC' = r$ und gleichem Defekt wie ΔABC.*

Beweis. Legt man C'' mit $AC'' = r$ auf dem Strahl $[AC)$ ab, so kriegt man ein Dreieck mit gewünschten Seitenlängen und Defekt größer als der Defekt von ΔABC. Bewegt man nun C'' auf dem Kreis mit Zentrum A und Radius r, so ändert sich der Defekt stetig. Im Schnittpunkt des Kreises mit $[AB)$ ist der Defekt 0. Nach dem Zwischenwertsatz findet man ein gesuchtes Dreieck. $\square$

Nun kann man den Beweis von Satz 1.3 zu Ende führen:

Wähle ein r größer als alle Seitenlängen beider Dreiecke. Finde zwei Dreiecke mit dem gleichen Defekt, einer Seite der Länge r und einer Seite gleich je einer Seite des jeweiligen Dreiecks. Dann wende drei Mal Korollar 1.6 an.

Jetzt können wir auch Satz 1.1 leicht beweisen:

Die Fläche hängt nur von Defekt ab. Sei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ die Abhängigkeit der Fläche vom Defekt δ. Die Funktion f ist positiv, monoton und erfüllt $f(\delta_1 + \delta_2) = f(\delta_1) + f(\delta_2)$ für alle $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $\delta_1 + \delta_2 < \pi$. Daraus kann man leicht folgern, dass f eine lineare Funktion ist.