

I. Die Fläche hyperbolischer Dreiecke

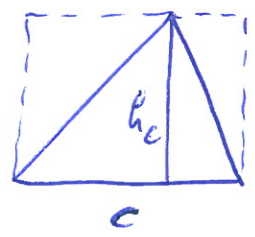
Erinnerung: (Bolyai-Gauß) $\text{Fläche}(\Delta) = \kappa \cdot S(\Delta)$
für ein universelles κ .

Ziel: Bestimme κ .

1. Fläche Euklidischer Dreiecke (naiv)

Die Fläche eines Euklidischen Rechtecks mit Seitenlängen a, b ist definiert als $a \cdot b$. Dies legt die Fläche endlicher Polygone fest. Insbesondere:

$$\text{Fläche}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$



Ein ähnlicher Zugang scheint für hyperbolische Dreiecke nicht möglich.

(2)

Intuition: Hyperbolische Dreiecke mit sehr kleinen Seiten haben einen kleinen Defekt. Ihr Flächeninhalt sollte in etwa mit dem Flächeninhalt eines Euklidischen Dreiecks mit gleichen Seitenlängen übereinstimmen. Tatsächlich gilt:

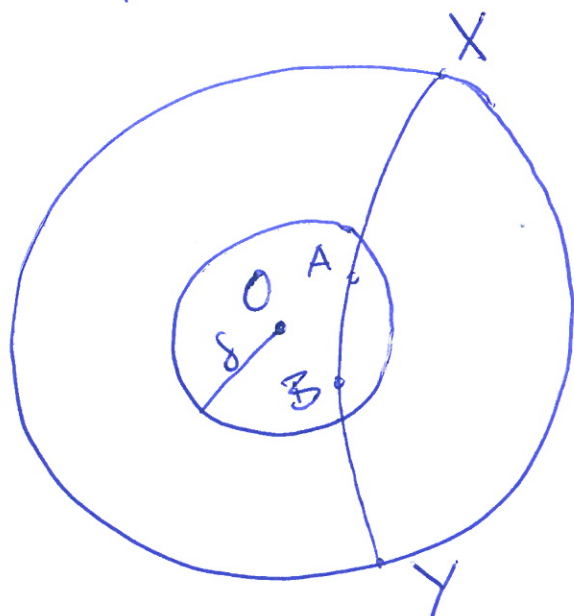
Lemma: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ s.d. für $\leftarrow$ Euk. Ball
 alle $P \in H$ und $A, B \in \mathcal{B}_\delta(P)$ gilt:

$$(1-\varepsilon) 2AB \leq AB_H \leq (1+\varepsilon) 2AB.$$

Bew: $\odot P=O$. Wähle δ so klein, dass

$$\log(1+x) \geq x - \frac{x^4}{2} \text{ auf } [0, 5] \text{ gilt.}$$

Seien $A, B \in \mathcal{B}_\delta(O)$



(3)

Es gilt:

$$\bullet \frac{XY}{AX \cdot BY} \stackrel{(I)}{\leq} \frac{Z}{(1-\delta)^2}$$

nach evtl.
Verkl. δ
↓

und damit $\frac{AB \cdot XY}{AX \cdot BY} \leq \frac{4\delta}{(1-\delta)^2} \leq 5\delta$

$$\bullet \frac{XY}{AX \cdot BY} \stackrel{(II)}{\geq} \frac{Z \cdot \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)}{(1+\delta)^2}$$

$$\Rightarrow AB_h = \log\left(\frac{AY \cdot BX}{AX \cdot BY}\right) \stackrel{\text{Ptolemy}}{=} \log\left(1 + \frac{AB \cdot XY}{AX \cdot BY}\right)$$

$$\log(1+x) \leq x$$

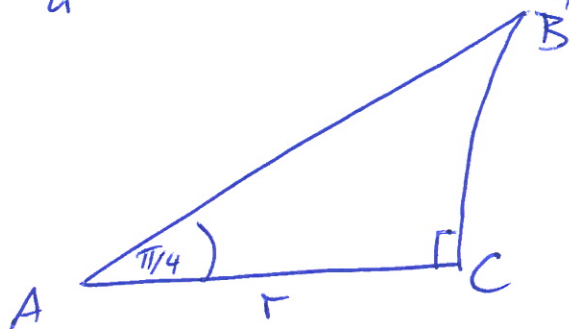
$$\leq \frac{XY}{AX \cdot BY} \cdot AB \stackrel{(I)}{\leq} \frac{Z}{(1-\delta)^2} \cdot AB$$

$$AB_h \geq \left(1 - \frac{(5\delta)^3}{Z}\right) \cdot \frac{XY}{AX \cdot BY} \cdot AB \stackrel{(II)}{\geq} \left(1 - \frac{(5\delta)^3}{Z}\right) \cdot \frac{Z \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)}{(1+\delta)^2} \cdot AB$$

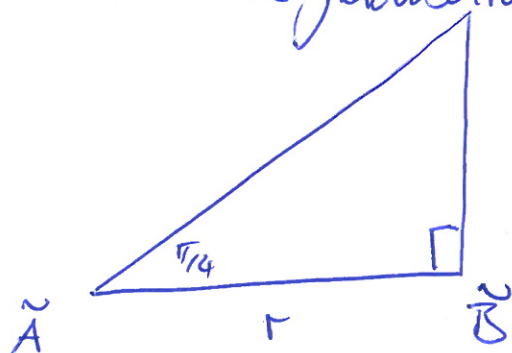


Es sei $\triangle ABC$ ein hyperbolisches Dreieck

mit $AC_h = r$, $\angle CAB = \frac{\pi}{4}$ und $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$



Das Euklidische Vergleichsdreieck $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$



hat Fläche $\frac{r^2}{2}$. Obiges Lemma ~~liefert~~ ^{impliziert}

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Fläche } \triangle ABC}{\frac{1}{2} r^2} = 4$$

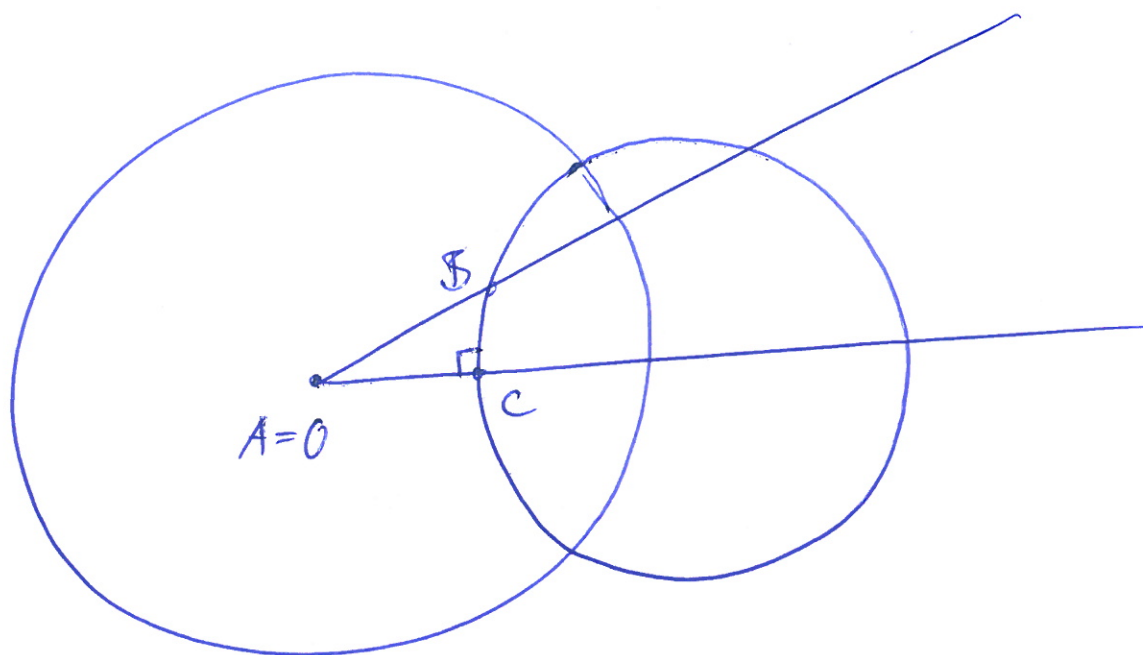
Bezeichnet $d(r)$ den Defizit von $\triangle ABC$,

so gilt :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d(r)}{\frac{1}{2} r^2} = \frac{4}{K}.$$

2. Trigonometrie rechtwinkliger Dreiecke

⑤



Setze: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$

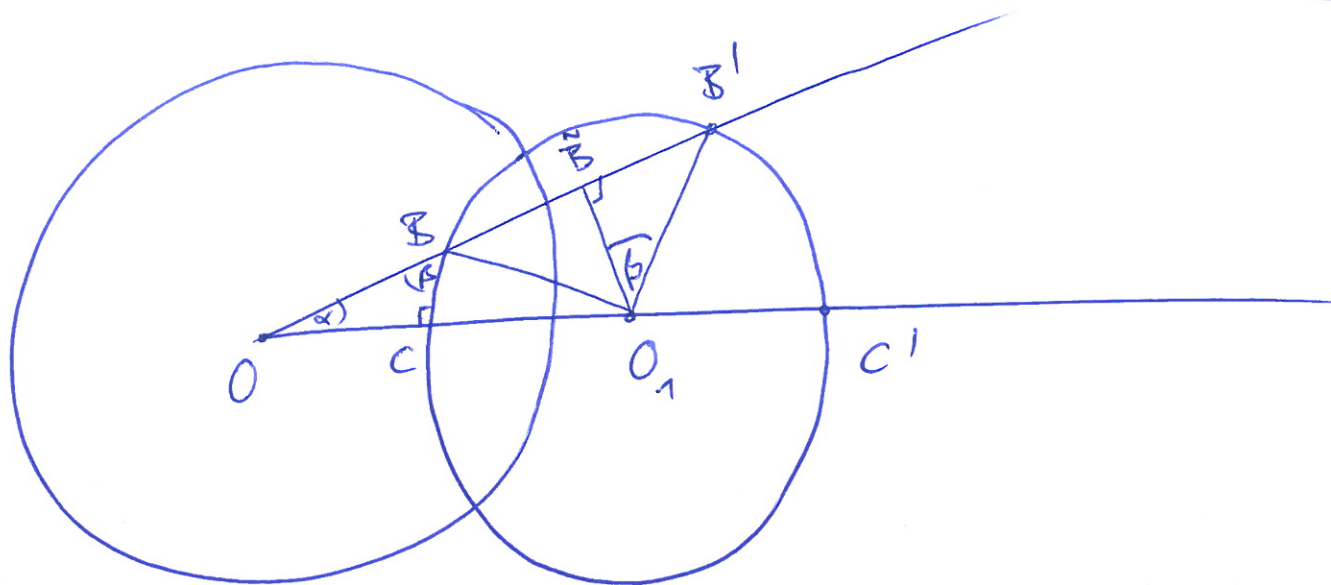
$$a_h = BC_h \dots$$

Erinnerung: $b_h = \log \frac{1+b}{1-b}$, $c_h = \log \frac{1+c}{1-c}$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\text{Es gilt: } \left. \begin{array}{l} \cdot \operatorname{sh}(c_h) = \frac{zc}{1-c^2} \\ \cdot \operatorname{ch}(c_h) = \frac{1+c^2}{1-c^2} \end{array} \right\} \operatorname{th}(c_h) = \frac{zc}{1+c^2}$$

(6)



$$\sin \beta = \frac{\frac{1}{2} BB'}{O_1 B'} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\bullet BB' = OB' - OB = \frac{1}{OB} - OB = \frac{1 - OB^2}{OB} = \frac{2}{\text{sh}(c_h)}$$

$$\bullet CC' = \frac{2}{\text{sh}(b_h)}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{\text{sh}(b_h)}{\text{sh}(c_h)} \quad (I)$$

$$\cos \alpha = \frac{OO_1}{OO_1} = \frac{\frac{1}{2} (OB + OB')}{\frac{1}{2} (OC + OC')} = \frac{OB + \frac{1}{OB}}{OC + \frac{1}{OC}} = \frac{\text{th}(b_h)}{\text{th}(c_h)}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{th}(b_h)}{\text{th}(c_h)} \quad (II)$$

Es folgt: $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{sh}^2 a_h}{\operatorname{sh}^2 c_h} + \frac{\operatorname{th}^2 b_h}{\operatorname{th}^2 c_h} \quad \textcircled{7}$

$$\Rightarrow \operatorname{ch}^2(c_h) = 1 + \operatorname{sh}^2(c_h) = \underbrace{1 + \operatorname{sh}^2(a_h)} + \operatorname{ch}^2(c_h) \cdot \operatorname{th}^2(b_h)$$

$$\cdot \operatorname{ch}^2(b_h) \quad \left| \quad \operatorname{ch}^2(b_h) \cdot \operatorname{ch}^2(c_h) = \operatorname{ch}^2(b_h) \cdot \operatorname{ch}^2(a_h) + \underbrace{\operatorname{ch}^2(c_h) \cdot \operatorname{sh}^2(b_h)}_{\leftarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{ch}(c_h) = \operatorname{ch}(a_h) \cdot \operatorname{ch}(b_h)}$$

" Pythagoras "

$$(II)/(I) = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{th}(b_h)}{\operatorname{th}(c_h)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(c_h)}{\operatorname{sh}(b_h)} = \frac{\operatorname{ch}(c_h)}{\operatorname{ch}(b_h)} = \operatorname{ch}(a_h)$$

$$\rightarrow \boxed{\cos \alpha = \sin \beta \cdot \operatorname{ch}(a_h)}$$

Berechnung von K:

$$\delta(r) = \frac{\pi}{4} - \arccos\left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ch}(qr)\right)$$

$$\delta'(r) = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sh}(r)}{\sin\left(\arccos\left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ch}(qr)\right)\right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sh}(r)}{\sqrt{1 - \left(\sin \frac{\pi}{4} \operatorname{ch}(r)\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\delta'(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{1 - (\sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ch}(r))^2}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sh}(r)}{r}}_{\rightarrow 1}$$

$$= \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

l'Hospital
 $\Rightarrow$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\delta(r)}{\frac{1}{2}r^2} = 1$$

$$\Rightarrow K = 4$$