1. Hyperbolische Geometrie

Definition 1.1. *Eine hyperbolische Ebene ist eine absolute Ebene in der Axiom IV nicht erfüllt ist.*

In jeder hyperbolischen Ebene ist also der Defekt von jedem Dreieck positiv und der Parallelitätswinkel $\phi(t)$ ist positiv für alle $t > 0$.

SATZ 1.2. *Zwei nicht-ausgeartete Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ sind kongruent genau dann, wenn die entsprechenden Winkel bis auf das Vorzeichen gleich sind.*

Beweis. Die "nur dann" Aussage folgt aus Axiom III. Seien nun die Winkel gleich bis auf das Vozeichen. O.B.d.A. können wir $A'B' \leq AB$ annehmen. Mit Axiom III finden wir ein zu $\Delta A'B'C'$ kongruentes Dreieck $\Delta AB''C''$ mit $B'' \in [AB]$ und $C'' \in [AC)$. Da $\measuredangle AB''C'' = \measuredangle ABC$, gilt $(B''C'')||(BC)$.

Wenn $B = B''$, so sind die Dreiecke kongruent. Sonst ist $\square B''BCC''$ ein konvexes Viereck, dessen Winkelsumme $\equiv 0$ modulo 2π ist. Dies widersprich Aufgabe 37. $\square$

SATZ 1.3. *Sei H eine hyperbolische Ebene. Die Funktion $t \to \phi(t)$ ist strikt monoton und es gilt $\lim_{t\to\infty} \phi(t) \to 0$. Für jedes $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gibt es genau ein $t > 0$, so dass $\phi(t) = \alpha$ gilt.*

Beweis. Sei also $\measuredangle NMP = \frac{\pi}{2}$. Sei $P_t \in [MP)$ mit $MP_t = t$. Sei X_t so gewählt, dass $P_tX_t = 1$ und $[P_tX_t)|||[MN)$.

Ist ϕ nicht strikt monoton, so gibt es $0 < t < s$ mit $\phi(t) = \phi(s)$. Dann sind $[P_tX_t)$ und $[P_sX_s)$ asymptotische Strahlen mit gleichen Wechselwinkeln, was nicht möglich ist (Aufagbe 38).

Sei nun $\alpha > 0$ vorgegeben und nehmen wir an, dass $\phi(t) > \alpha$ für alle t. Sei $[P_tS_t)$ der Strahl, mit $\measuredangle MP_tS_t = \alpha$. Nach Annahme schneidet der Strahl $[MN)$. Also können wir $S_t \in [MN)$ annehmen.

Wir behaupten $defekt(\Delta PP_tS_t) \leq 2 \cdot defekt(\Delta PP_rS_r)$, wenn $r = 2t$ gilt. Da der Defekt jedes Dreiecks kleiner π ist, erhielten wir einen Widerspruch für $r = 2^n t_0$ und n groß genug.

Die Behauptung folgt aber durch eine zweifache Anwendung von Exercise 10.9. $\square$

SATZ 1.4. *Sei r so gewählt, dass $\phi(r) = \frac{\pi}{3}$. Dann ist der Radius des Inkreises von jedem Dreieck ΔABC kleiner als r.*

Beweis. Sei O das Zentrum des Inkreises, sei t der Radius des Inkreises und seien X, Y, Z die Fußpunkte von O auf den Seiten. Die Winkelhalbierenden und die Lote bilden 6 Winkel an O, von denen mindestens einer nicht kleiner als $\frac{\pi}{3}$ ist. Also könnten sich die entsprechende Seite und Winkelhalbierende nicht schneiden, wenn $\phi(t) \leq \frac{\pi}{3}$ gilt. $\square$

Schaut man sich die Konvexitätsbeweise in der absoluten Ebene an und benutzt, dass der Defekt von jedem nicht-ausgearteten Dreieck positiv ist, so erhält man:

Lemma 1.5. *In jedem nicht-ausgearteten Dreieck ist die Länge der Verbindung zweier Seitenmittelpunkte kürzer als die Hälfte der dritten Seite.*

Und genauso:

Lemma 1.6. *Sind l, m verschiedene Geraden, so ist die Funktion $t \to d_l(m(t))$ strikt konvex. Insbesondere nimmt d_l auf jeder Strecke aus m das Minimum auf dieser Strecke in genau einem Punkt an.*

Definition 1.7. *Zwei Geraden heißen ultraparallel, wenn sie parallel sind und keine asymptotischen Strahlen enthalten.*

SATZ 1.8. *Seien l, m zwei verschiedene Geraden. Die Geraden l und m ultraparallel genau dann, wenn sie eine gemeinsame Senkrechte n besitzen.*

Beweis. Seien l und m ultraparallel. Die konvexe Funktion $f(t) = d_l(m(t))$ läuft gegen ∞, wenn $t \to \pm\infty$. Also wird das Minimum von f angenommen. Sei P der entsprechende Punkt auf m und Q sein Fußpunkt auf l. Dann gilt $PQ \leq P'Q'$ für alle $P' \in m, Q' \in l$. Folglich ist Q der Fußpunkt von P auf m und (PQ) ist eine gemeinsame Senkrechte.

Wenn l und m eine gemeinsame Senkrechte besitzen so sind sie parallel. Da $\phi(t) < \frac{\pi}{2}$ für alle $t > 0$, sind l und m ultraparallel. □

Andererseits gilt:

SATZ 1.9. *Seien Geraden l, m Geraden die asymptotische Strahlen enthalten. Dann gilt* $\inf d_l(m(t)) = 0$.

Beweis. Auf jeder solchen Geraden $m \neq l$ gilt $\sup_{t\in\mathbb{R}} d_l(m(t)) = \infty$. Sind $m_1 \neq l \neq m_2$ zwei verschiedene zu l asymptotische (also parallele und nicht ultraparallele) Geraden so finden wir eine Bewegung, die l auf sich abbildet und m_1 auf m_2. (Man nehme Punkte $P_i \in m_i$ mit gleichem Abstand zu l und finde eine Bewegung die l und die Orientierung von l erhält und P_1 auf P_2 abbildet). Damit hängt also das Infimum auch nicht von der Geraden m ab. Insbesondere kann es beliebig klein werden. □

Genauso wie bei der Untersuchung des Parallelitätswinkels zeigen wir:

Lemma 1.10. *Sei l eine Gerade und s ein Strahl, der nicht asymptotisch zu l ist. Sei $P_t = l(t)$. Sei s_t der in P_t startende zu s asymptotische Strahl. Sei $\alpha(t)$ das Winkelmaß des positiven Winkels zwischen s_t und l. Dann ist die Abbildung $t \to \alpha_t$ stetig, injektiv und ihr Bild ist $(0, \pi)$.*

Daraus können wir schließen:

SATZ 1.11. *Seien $s^{\pm}$ zwei nicht asymptotische Strahlen. Dann gibt es genau eine Gerade l, deren Strahlen $l^{\pm}$ zu den Strahlen $s^{\pm}$ asymptotisch sind.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $s^+ = [PM)$ und $s^- = [PN)$. Wähle die Winkelhalbierende m von $\angle MPN$. Finde auf m einen Punkt Q, so dass der in Q startende zu s^+ asymptotische Strahl $[QX)$ senkrecht auf m steht (dies ist nach dem vorherigen Lemma möglich). Dann ist (XQ) die gesuchte Gerade.

Gäbe es eine andere solche Gerade l, so wäre d_l beschränkt auf (XQ). Dies ist aber nur möglich wenn $m = (XQ)$. □