1. Nachtrag

SATZ 1.1 (Strahlensatz)**.** *Sei $\angle AOB$ gegeben. Seien Punkte $A' \in (OA) \setminus \{O\}$ und $B' \in (OB) \setminus \{O\}$ gegeben. Die Gerade $(A'B')$ ist parallel zu (AB) genau dann, wenn $\Delta AOB \sim \Delta A'OB'$.*

Beweis. Die Dreiecke sind ähnlich genau dann wenn $\measuredangle OAB = \pm\measuredangle OA'B'$. Dies ist äquivalent dazu, dass (AB) und $(A'B')$ parallel sind (Corollary 6.12). $\square$

SATZ 1.2 (Thaleskreis)**.** *Seien $A \neq B$ und O der Mittelpunkt von $[AB]$. Für $C \neq A, B$ sind äquivalent:*

(1) *$\angle ACB$ ist ein gerader Winkel*
(2) *C liegt auf dem Kreis Γ mit Zentrum O, der A und B enthält.*

Beweis. Wegen Theorem 8.2 ist (2) äquivalent zu $2\angle ACB \equiv \angle AOB = \pi$. Dies ist äquivalent zu (2). $\square$

SATZ 1.3 (Eulersche Gerade)**.** *Sei ΔABC nicht ausgeartet. Sei O der Umkreismittelpunkt und G der Schwerpunkt und H der Höhenschnittpunkt von ΔABC. Dann liegen O, G, H auf einer Geraden, und es gilt $2OG = HG$.*

Beweis. Gilt $O = G$, so ist $(AO) \perp (BC)$. Deswegen $AB = AC$. Genauso $AB = BC$. Dann ist jede Seitenhalbierende eine Höhe und $H = G$. Man kann jede Gerade durch O wählen.

Sei nun $O \neq G$. Betrachte M auf $[OG)$, so dass $OM = 3OG$ und sei A' der Mittelpunkt von BC. Dann teilt G die Strecken AA' und OM im gleichen Verhältnis $2:1$. Folglich sind die Dreiecke ΔAGM und $\Delta A'GO$ ähnlich. Nach dem Strahlensatz ist (OA') parallel zu (MA). Aber OA' steht senkrecht auf (BC), also gilt auch $(MA) \perp (BC)$. Dann liegt M auf der Höhe durvh die Ecke A.

Genauso sehen wir, dass M auf der Höhe von B auf (AC) liegt. Also ist $M = H$. $\square$

Der *Feuerbachkreis/Neun-Punkte-Kreis* des nicht-ausgearteten Dreiecks ΔABC ist der Umkreis des von den Höhenfußpunkten gebildeten Dreiecks.

SATZ 1.4 (Feuerbachkreis)**.** *Der Feuerbachkreis Γ des Dreiecks ΔABC enthält neben den Höhenfußpunkten die Mittelpunkte der Seiten von ΔABC und die Mittelpunkte der Strecken, die den Höhenschnittpunkt mit den Ecken verbinden.*

Beweis. Sei H der Höhenschnittpunkt. Seien A', B', C' die Mittelpunkte von $[BC], [AC], [AB]$. Seien A'', B'', C'' die Mittelpunkte der Strecken $[HA], [HB], [HC]$. Dann sind $(A''C'')$ und $A'C'$ parallel zu AC wegen des Strahlensatzes. Genauso ist $(A'C'')$ und $C'A''$ parallel zu

$(BH) = (BB''')$. Deswegen ist $\Box A'C''A''C'$ ein Rechteck. Die Ecken A', C'', A'', C' liegen auf einem Kreis Γ' und $[A'A'']$ und $[C'C'']$ sind seine Durchmesser (Satz von Thales). Genauso ist dann $[B'B'']$ ein Durchmesser dieses Kreises Γ'. Weil $\angle C''C'''C'$ ein rechter Winkel ist, liegt auch C''' auf dem Kreis. Genauso liegen auch B''' und A''' auf Γ'. Also ist Γ' der Feuerbachkreis. $\Box$