1. Konvexität

Folgender Satz wird in Analysis I behandelt. Wenn man seine Aussage nicht kennt, sollte man den Satz als Übungsaufgabe beweisen.

SATZ 1.1. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) *Für alle $x, y \in [a,b]$ gilt $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.*
(2) *Für alle $x, y \in [a,b]$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.*

Erfüllt f die Bedingungen des Satzes so heißt sie *konvex*. Ist f zweimal differenzierbar, so ist f konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Man hat auch die folgende strikte Version (Teil derselben Übungsaufgabe):

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und konvex. Gilt für $x, y \in [a,b]$ und ein $t \in (0,1)$ Gleichheit in (2), so gilt die Gleichheit in (2) für dieselben x, y und für alle $t \in [0,1]$.

Wir können Ungleichung (2) wie folgt umformulieren. Für alle $a \leq x < z < y \leq b$ gilt $f(z) \leq p \cdot f(x) + q \cdot f(y)$, wobei $p = \frac{|y-z|}{|y-x|}$ und $q = \frac{|z-x|}{|y-x|}$.

In der Geometrie der Euklidischen und der hyperbolischen Ebene spielt Konvexität eine große Rolle. Alles basiert auf der folgenden Beobachtung, die unabhängig von Axiom IV gilt:

SATZ 1.2. *Sei $D \in E$ ein Punkt und sei $[AC]$ eine Strecke, die wir als Bild einer abstandserhaltenden Abbildung $B : [a,c] \to E$ darstellen. Wir schreiben wie immer $B_s = B(s)$. Dann ist die Funktion $f(s) := DB_s$ konvex auf $[a,c]$.*

Für $Z \in [XY]$ gilt $DX \cdot ZY + DY \cdot ZX \geq DZ \cdot XY$. Gleichheit gilt genau dann, wenn D in $(XY) \setminus [XY] \cup \{X,Y\}$.

Beweis. Wegen Satz 1.1 müssen wir lediglich für die Mitte Z der Strecke $[XY]$ die Ungleichung $2 \cdot DZ \leq DX + DY$ beweisen und den Gleichheitsfall diskutieren.

Wähle einen Punkt $\bar{D}$ auf $[DZ)$ mit $Z\bar{D} = ZD$. Dann sind die Dreiecke DZY und $\bar{D}ZX$ kongruent. Folglich $2 \cdot DZ = \bar{D}D \leq DX + \bar{D}X = DX + DY$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn X auf der Strecke $[D\bar{D}]$ liegt. Dies ist genau der Fall, wenn $D \in (XY) \setminus [XY] \cup \{X,Y\}$. □

2. Ptolemäische Ungleichung

SATZ 2.1. *Seien A, B, C, D paarweise verschiedene Punkte in E. Dann gilt*

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\square ABCD$ ein Sehnenviereck ist und die Bögen $\circ ABC$ und $\circ ADC$ verschieden sind.

Beweis. Ist $B \in [AC]$, so ist es genau die Aussage von Satz 1.2.

Den allgemeinen Fall führt man auf diesen Spezialfall durch eine Inversion zurück, genau wie im Beweis von Theorem 9.10 im Skript. Man benutzt dabei die Invarianz der Doppelverhältnisse, der Zykel und der Bögen unter Inversionen und folgendes Lemma. $\square$

Lemma 2.2. *Seien A, B, C paarweise verschiedene Punkte in der Möbius-Ebene $\hat{E}$. Dann gibt es eine Inversion, so dass für die Bilder dieser Punkte $B' \in [A'C']$ gilt.*

Proof. Wähle den Zykel Γ durch A, B, C und einen Punkt $O \in \Gamma$, der nicht im Bogen $\circ ABC$ liegt. Für jeden Kreis Ω mit Zentrum in O hat die Inversion an Ω die gesuchten Eigenschaften. $\square$

3. Doppelverhältnis

Da die Doppelverhältnisse (cross-ratio) später eine wichtige Rolle spielen werden, noch eine kurze Anmerkung dazu.

Das Doppelverhältnis $\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA}$ kann man als $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{CD}$ schreiben. Liegen nun B und D auf der Strecke $[AC]$, so geben die beiden Brüche die Verhältnisse an, in denen B und D die Strecke teilen. Das Doppelverhältnis ist die Proportion dieser beiden Verhältnisse.

4. Wieder der Zwischenwertsatz

Sei $\circ ABC$ ein Kreisbogen und sei O das Zentrum des entsprechenden Kreises. Dann ist die Abbildung $P \to \measuredangle AOP$ eine bijektive stetige Abbildung des Kreisbogens auf ein abgeschlossenes Intervall. Die Umkehrung ist ebenfalls stetig.

Folglich ist der Kreisbogen *zusammenhängend*, d.h., für jede stetige Funktion $f : \circ ABC \to \mathbb{R}$ und $P_1, P_2 \in \circ ABC$ mit $a_1 = f(P_1) < a_2 = f(P_2)$ und jedes $a \in [a_1, a_2]$ gibt es ein $P \in \circ ABC$ mit $f(P) = a$.

Betrachtet man als f die Abstandsfunktion zu einem Punkt O, so sehen wir:

Lemma 4.1. *Hat ein Kreis Γ Punkte im Inneren und Äußeren eines Kreises Ω so schneiden sich Γ und Ω in zwei Punkten.*