1. Eindeutigkeit der Euklidischen Ebene

Exercise 6.15 aus dem Skript zeigt, dass man für jede Euklidische Ebene E eine Isometrie $f : E \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ findet. Daraus schließen wir:

SATZ 1.1. *Sind E_1, E_2 Euklidische Ebenen mit Winkelmaßen $\measuredangle_1, \measuredangle_2$, so gibt es eine Isometrie $f : E_1 \to E_2$, die die Winkelmaße erhält.*

Beweis. Wähle Isometrien $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}^2$ und $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}^2$ und betrachte $f = f_1 \circ f_2^{-1} : E_1 \to E_2$. Als Komposition von Isometrien ist f eine Isometrie. Benutzt man, dass E_2 eine Euklidische Ebene ist, so sieht man, dass die Abbildung $\tilde{\measuredangle}_1 : W \to (-\pi, \pi]$ gegeben durch $(A, B, C) \to \measuredangle_2 f(A)f(B)f(C)$ ein zulässiges Winkelmaß auf E_1 definiert, im Sinne der Aufgabe 12 vom Übungsblatt 3. Hierbei ist W wieder die Menge aller Tripel $(A, B, C) \in E_1^3$ mit $A \neq B \neq C$.

Deswegen gilt $\tilde{\measuredangle}_1 = \measuredangle_1$ oder $\tilde{\measuredangle}_1 = -\measuredangle_1$. Im ersten Fall erhält also f alle Winkelmaße. Im zweiten Fall ändert f jedes Winkelmaß um das Vorzeichen. Im zweiten Fall ersetzt man f durch $\hat{f} = S_l \circ f$, wobei S_l die Spiegelung an einer beliebigen Geraden in E_1 bezeichnet. □

2. Komplexe Zahlen

Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ wie üblich mit dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir benutzen im Folgenden Eigenschaften komplexer Zahlen, die in der Analysis-Vorlesung behandelt werden. Man kann das meiste im Kapitel 15 des Skripts nachlesen.

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ kann man eindeutig als $z = |z| \cdot e^{i\phi}$ mit einer Zahl $\phi \in (-\pi, \pi]$ schreiben. Diese Zahl ϕ wird das Argument von z genannt und als $\arg(z)$ bezeichnet.

Die Abbildung $z \to \arg(z)$ ist stetig auf dem Komplement des Strahls $(-\infty, 0] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Ferner gilt $\arg(\frac{v}{w}) \equiv \arg(v) - \arg(w)$ für alle $v, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Für die komplexe Konjugation $z \to \bar{z}$ gilt $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ und $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Bezeichnet man mit $< v, w >$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$, (das man durch $2 < v, w >= v \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot w = |v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2$ definieren kann), so gilt

$$\frac{< v, w >}{|v| \cdot |w|} = \cos(\arg(\frac{v}{w}))$$

$$\arccos(\frac{< v, w >}{|v| \cdot |w|}) = |\arg(\frac{v}{w})|$$

Wir erinnern uns ferner wie alle orthogonale Matrizen in $O(2)$ aussehen:

Lemma 2.1. *Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist genau dann eine orthogonale Abbildung, wenn $f(x) = z \cdot x$ oder $f(x) = \bar{z} \cdot \bar{x}$ für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt. Im ersten Fall gilt* $\det(f) = 1$, *im zweiten Fall gilt* $\det(f) = -1$.

3. Existenz der Euklidischen Ebene. Komplexe Koordinaten

Wir definieren nun auf dem metrischen Raum $E = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit der Metrik d_2 das Winkelmaß durch

$$\measuredangle ABC := \arg(C - B) - \arg(A - B) = \arg(\frac{C - B}{A - B})$$

.

Wir möchten zeigen, dass $\mathbb{R}^2$ versehen mit diesem Winkelmaß alle Axiome der Euklidischen Ebene erfüllt.

Axiom I war Teil der Aufgabe 1. Die Stetigkeit und Additivität in Axiom II folgen aus der Stetigkeit von arg und der Definition. Um weitere Axiome zu verifizieren, erinnern wir uns, dass jede Bewegung von E die Form $f(x) = t_v \circ T$ hat, wobei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orthogonale lineare Abbildung ist, und die Translation $t_v : E \to E$ durch $t_v(x) := x + v$ definiert ist.

Lemma 3.1. *Jede Bewegung von E erhält $|\measuredangle|$, d.h $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle A'B'C'|$, wenn $A', B', C' = f(A, B, C)$ für eine Bewegung $f : E \to E$ gilt.*

Proof. Fr jede Translation t_v gilt $\arg(t_v(P) - t_v(Q)) = \arg(P - Q)$ für alle $P, Q \in E$. Damit erhält jede Translation $\measuredangle$. Jede orthogonale lineare Abbildung erhält nach Definition Skalarprodukte und Normen und deswegen auch $|\arg(\frac{C-B}{A-B})|$. □

Die Verifizierung der restlichen Axiome ergibt sich leicht durch mehrfache Anwendung dieses Lemmas. So kann man in Axiom II (a) annehmen, dass der Punkt O der Ursprung 0 von $\mathbb{C}$ ist (nach Anwendung einer Translation). Nach Anwendung eine Drehung kann man annehmen, dass $[OA)$ der Strahl der positiven reellen Zahlen ist. Dann ist die Existenz und Eindeutigkeit des Strahls $[OB)$ mit $\measuredangle AOB = \phi$ die Wohldefiniertheit des Arguments und der Zahl $e^{i\phi}$.

Eine Richtung des Axioms III folgt direkt aus dem obigen Lemma. Um die "if"-Richtung zu zeigen, benutzt man das Lemma, und bewegt die Dreiecke so, dass $B = B' = 0$ gilt und dass $A = A'$ eine positive reelle Zahl in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist. Dann gilt $|C| = BC = B'C' = |C'|$ und $|\arg(C)| = |\arg(C')|$. Also ist entweder bereits $C = C'$ der $C = f(C')$, wobei f die Konjugation ist. Es gilt dann auch $f(A) = A = A'$, $f(B) = B = B'$.

Ebenso führt man das Axiom IV auf den Fall $A = 0$ zurück. In diesem Fall folgt die Behauptung aus der Beobachtung, dass die lineare Abbildung $z \to k \cdot z$ alle Längen um den Faktor k streckt und alle Argumente und damit alle Winkelmaße erhält.

4. Weitere Anmerkungen zu Winkeln, linearen und nicht-linearen Abbildungen

SATZ 4.1. *Sei $L : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Die Abbildung erhält das Winkelmaß $\measuredangle$ genau dann, wenn die Abbildung L die Form $L(x) = z \cdot x$ mit einem $z \in \mathbb{C}$ gilt, also wenn L eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist.*

Beweis. Jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $x \to z \cdot x$ erhält nach Definition das Winkelmaß. Erhält andererseits L das Winkelmaß, so kann man nach einer Komposition mit einer C-linearen Abbildung annehmen, dass $L(1) = 1$ gilt. Dann muss $L(i) = t \cdot i$ mit reellem $t > 0$ gelten. Ist $t \neq 1$, so wird von L das Winkelmaß des Winkels zwischen 1, 0 und $1 + i$ nicht erhalten. □

Korollar 4.2. *Sei $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die das Winkelmaß $\measuredangle$ auf $-\measuredangle$ schickt. Dann hat L die Form $L(x) = z \cdot \bar{x}$ für ein $z \in C$.*

Beweis. Wende den obigen Satz auf die Komposition von L mit der Konjugation. □

Zieht man Differentialrechnung im $\mathbb{R}^2$ hinzu, so kann man die Aussage von Theorem 9.19 aus dem Skript wie folgt interpretieren (und beweisen): Jede Inversion ist eine differenzierbare Abbildung (in den komplexen Koordinaten) und jedes Differential ist eine komplex-antilineare Abbildung wie im obigen Korollar.

5. Bemerkung über Winkel in der absoluten Ebene

Lemma 5.1. *Sei E eine absolute Ebene. Sei l eine Gerade in E, die das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung $q : \mathbb{R} \to E$ ist. Schreibe $Q_t := q(t)$. Sei $M \in l$ und $P \notin l$. Dann ist die Abbildung $g : \mathbb{R} \to (-\pi, \pi]$ gegeben durch $g(t) = \measuredangle MPQ_t$ stetig und strikt monoton. Das Bild $g(\mathbb{R})$ ist ein offenes Intervall.*

Beweis. Nach Eigenschaften des Winkelmaßes ist die Funktion g stetig und injektiv. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass jede stetige und injektive auf einem offenen Inervall definierte Abbildung strikt monoton ist, und dass ihr Bild ein offenes Intervall ist. □

Wir werde die Größe dieses Bildintervalls später untersuchen. Jetzt ziehen wir daraus den folgenden Schluß, den wir auch direkt und viel früher aus Eigenschaften der Halbebenen hätten herleiten können:

Corollary 5.2. *Sei* ΔABC *ein nicht-ausgeartetes Dreieck und sei* $\angle ABC$ *positiv. Ein Strahl* $[BX)$ *schneidet die Seite* $[AC]$ *genau dann, wenn* $0 \leq \measuredangle ABX \leq \measuredangle ABC$ *gilt.*

Beweis. Das Bild der Abbildung $D \in [AC] \to \measuredangle ABD$ ist das Intervall $[0, \measuredangle ABC]$. $\square$