1. Bewegungen der absoluten Ebene

1.1. Bewegungen der Geraden. Jede Bewegung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Form $h(t) = t_0 \pm t$. Die Abbildung $h(t) = t_0 + t$ ist die Translation um t_0. Die Abbildung $h(t) = t_0 - t$ ist die Spiegelung um den einzigen Fixpunkt $\frac{t_0}{2} = h(\frac{t_0}{2})$. Die Bewegung h ist durch die Bilder von 2 Punkten eindeutig bestimmt.

Ist E eine absolute Ebene, $m \subset E$ eine Gerade und $h : m \to m$ eine Bewegung der Geraden, so gibt es genau zwei Bewegungen $g_{1,2} : E \to E$, deren Einschränkung auf m mit h übereinstimmt. Es gilt $g_2 = S_m \circ g_1 = g_1 \circ S_m$. Die Bewegung g_1 schickt jede m-Halbebene auf sich und g_2 vertauscht sie. Die Bewegung g_1 schickt jeden Punkt Q auf den eindeutigen Punkt $\bar{Q}$ in derselben Halbebene, so dass für die jeweiligen Fußpunkte P und $\bar{P}$ auf m die Gleichungen $g(P) = \bar{P}$ und $PQ = \bar{P}\bar{Q}$ gelten.

1.2. Allgemein. Sei E eine absolute Ebene. Bezeichne mit G die Gruppe aller Bewegungen von E. Die Gruppe ist eine disjunkte Vereinigung $G = G^+ \cup G^-$, wobei $G^\pm$ die Teilmenge aller *eigentlichen* (=direct) bzw. aller *uneigentlichen* (=indirect) Bewegungen bezeichnet.

Wir erinnern uns: jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen an Geraden. Jede Bewegung, die einen Punkt fixiert ist eine Komposition von höchstens 2 Spiegelungen. Eine Bewegung ist eigentlich genau dann, wenn sie ein Produkt von einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

1.3. Mit Fixpunkten. Zunächst untersuchen wir Bewegungen $g \in G$ die einen Punkt O festhalten. Dann ist g ein Produkt von höchstens 2 Spiegelungen. Ist g uneigentlich, so muss g eine Spiegelung sein.

Sei nun $g(O) = O$ und g eigentlich. Für jedes $A \neq O \in E$ und $\bar{A} := g(A)$ gilt $OA = O\bar{A}$. Sei $\alpha = \measuredangle AO\bar{A}$. Da g alle Winkel erhält, gilt für jedes andere $B \neq O \in E$:

$$\measuredangle BO\bar{B} = \measuredangle BOA + \measuredangle AO\bar{A} + \measuredangle \bar{A}O\bar{B} = \alpha$$

D.h. der Winkel α hängt nicht von A ab und ist durch g eindeutig bestimmt.

Die entsprechende durch O und α eindeutig bestimmte Bewegung heißt die Drehung um den Punkt O um den Winkel α.

Insbesondere ist das Produkt von zwei Spiegelungen $g = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ mit $O \in l_1 \cap l_2$ eine Drehung um einen Winkel α. Wählt man $A \in l_1$, so sieht man, dass α der doppelte Winkel zwischen l_1 und l_2 ist. Man beachte, dass es nicht auf die Wahl der Strahlen in l_i, wohl aber auf die Reihenfolge der l_i ankommt.

1.4. **Ohne Fixpunkte mit invarianten Geraden.** Sei $g \in G$ eine Bewegung ohne Fixpunkte und sei m eine Gerade mit $g(m) = m$. Dann ist die Einschränkung von g auf m eine Translation. Die Bewegung g ist eigentlich bzw. uneigentlich genau dann, wenn sie die beiden Halbebenen von m erhält bzw. vertauscht. Ferner ist g durch die Einschränkung auf m und die Zugehörigkeit zu G^+ bzw. G^- eindeutig festgelegt.

Die eigentliche Bewegung g^+ heißt die Verschiebung entlang der Achse m und die uneigentliche Bewegung $g^- = g^+ \circ S_m$ heißt die Gleitspiegelung entlang m.

1.5. **Uneigentlicher Fall.** Sei g eine uneigentliche Bewegung ohne Fixpunkte. Wir zeigen, dass es eine Gerade m mit $g(m) = m$ gibt. Sonst ist für alle Punkte $A \in E$ der wohldefinierte Winkel $\angle Ag(A)g^2(A)$ weder der Nullwinkel noch der gestreckte Winkel. Wegen der Stetigkeit hätte dann $\angle Ag(A)g^2(A)$ ein und dasselbe Vorzeichen für alle $A \in E$. Aber g vertauscht das Vorzeichen von $\angle Ag(A)g^2(A)$ und $\angle g(A)g^2(A)g^3(A)$.

Zusammen mit vorherigen Überlegungen erhalten wir:

SATZ 1.1. *Jede uneigentliche Bewegung einer absoluten Ebene ist entweder eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.*

1.6. **Bewegungen der Euklidischen Ebene.** Nun können wir den folgenden Satz leicht beweisen:

SATZ 1.2. *Jede Bewegung der Euklidischen Ebene ist eine Drehung, eine Verschiebung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass eine eigentliche Bewegung g ohne Fixpunkte eine invariante Gerade m besitzt. Aber g kann man als $g = S_{l_1} \circ S_{l_2}$ darstellen. Da g keine Fixpunkte besitzt, müssen l_1 und l_2 parallel (und verschieden) sein. Jedes m mit $m \perp l_1$ ist auch senkrecht auf l_2. Deswegen $g(m) = m$. □

Man kann die verschiedenen Bewegungen geometrisch charakterisieren. Nur einige Beispiele:

1) $g \in G$ ist eine Drehung um einen von Null verschiedenen Winkel genau dann, wenn für keine Gerade m ihr Bild $g(m)$ parallel zu m ist.

2) $g \in G$ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für jede Gerade m das Bild $g(m)$ parallel zu m ist.