1. Bewegungen der hyperbolischen Ebene

Sei nun H eine hyperbolische Ebene. Dann erhält man dieselben Klassen von Bewegungen wie im Euklidischen Fall und eine weitere Klasse. Wir haben oben nur ein einziges Mal das (IV) Parallelenaxiom benutzt, nämlich im fixpunktfreien eigentlichen Fall, um eine Gerade m zu finden, die zu beiden parallelen Geraden l_1, l_2 senkrecht steht. So ein m gibt es in H, wenn l_1 und l_2 ultraparallel sind, aber nicht, wenn sie asymptotisch sind. Sind l_1 und l_2 asymptotisch und verschieden, so heißt $g = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ eine *parabolische* Isometrie von H. Dies ist in der Tat eine neue Klasse, die wir gleich geometrisch beschreiben werden.

SATZ 1.1. *Eine Bewegung $g \in Iso(H)$ ist parabolisch genau dann, wenn die Funktion $d_g : H \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_g(A) = Ag(A)$ kein Minimum besitzt.*

Beweis. Hat $h \in G$ einen Fixpunkt, so ist das Minimum von d_h gleich 0. Hat ein fixpunktfreies $h \in G$ eine invariante Gerade, so ist das Infimum von d_h gleich der Translationslänge von h entlang der Achse.

Ist $g = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ parabolisch, so wird l_1 und damit jede zu l_1 asymptotische Gerade von g auf eine zu l_1 asymptotische Gerade geschickt. Deswegen kann g keine Drehung sein, also keinen Fixpunkt haben. Andererseits, haben Punkte auf l_1 beliebig kleinen Abstand zu l_2. Deswegen ist das Infimum von d_g gleich 0. $\square$

Zusammenfassend haben wir bewiesen, dass jede Bewegung von H entweder Drehung, Verschiebung entlang einer Achse, Spiegelung, Gleitspiegelung oder eine parabolische Isometrie ist.

2. Ähnlichkeitsabbildungen

Sei E eine Euklidische Ebene. Eine Bijektion $f : E \to E$ heißt eine *Ähnlichkeit*, wenn f jedes Dreieck auf ein zu ihm ähnliches Dreieck abbildet. Die Ähnlichkeiten bilden eine Gruppe A.

Aus den Sätzen über ähnliche Dreiecke folgern wir, dass $f : E \to E$ genau dann eine Ähnlichkeit ist, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass f alle Abstände um den Faktor r streckt.

Das wichtigste Beispiel ist die Streckung $L_{r,O}$ um den Faktor r mit Zentrum O, die O festhält und jeden Punkt $A \neq O$ auf den Punkt $\bar{A} \in [OA)$ mit $O\bar{A} = r \cdot OA$ abbildet. Diese *zentrische Streckung* schickt jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade.

Man kann noch so eine Streckung mit einer O-erhaltenden Isometrie multiplizieren, um eine *Dreh/Spiegel-Streckung* zu erhalten. Das sind auch schon alle möglichen Ähnlichkeiten.

SATZ 2.1. *Ist $f : E \to E$ eine Ähnlichkeit, so ist f eine Bewegung, oder f hat einen Fixpunkt O. Im letzten Fall ist f die Komposition der Streckung $L_{r,O}$ mit Zentrum in O und einer O fixierende Bewegung.*

Beweis. Sei r der Faktor um den f alle Abstände streckt. Ist $r < 1$ so hat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einen Fixpunkt nach dem Fixpunktsatz von Banach. Ist $r > 1$, so wendet man das Argument auf f^{-1} an. Gilt $f(O) = O$, so ist $f \circ L_{r,O}^{-1}$ eine O fixierende Bewegung. □

Wir zeigen eine weitere geometrische Charakterisierung der Ähnlichkeiten.

SATZ 2.2. *Sei $f : E \to E$ eine bijektive Abbildung. Die Abbbildung f ist eine Ähnlichkeit genau dann, wenn f Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abbildet.*

Beweis. Jede Ähnlichkeitsabbidlung f schickt nach Definition Kreise mit Zentrum in O auf Kreise mit Zentrum in $f(O)$. Dass Gerade auf Geraden abgebildet werden, folgert man mit dem obigen Satz oder direkt aus der Definition.

Sei nun $f : E \to E$ bijektiv und bilde f Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden ab. Dann schickt f Tangenten auf Tangenten und Sekanten auf Sekanten. Aus der letzten Aussage folgt, dass das Innere jedes Kreises auf das Innere des Bildkreises geschickt wird, denn das Innere eines Kreises Γ besteht aus allen Punkten, für die jede sie enthaltende Gerade eine Sekante von Γ ist.

Ferner schickt f parallele Geraden auf parallele Geraden. Zwei Kreise haben genau dann den gleichen Radius, wenn sie zwei verschiedene gemeinsame Tangenten besitzen, die parallel sind. Also werden Kreise mit dem gleichen Radius r auf Kreise mit dem gleichen Radius $h(r)$ abgebildet, wobei $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine Funktion ist.

Zwei Punkte auf einem Kreis Γ sind antipodal (d.h. die Verbindungsstrecke ist ein Durchmesser) genau dann, wenn die Tangenten an den Kreis durch diese Punkte parallel sind. Damit werden antipodale Paare auf Γ auf antipodale Paare auf $f(\Gamma)$ geschickt. Da sich Geraden durch verschiedene antipodalen Paare genau im Zentrum des Kreises schneiden, wird das Zentrum O von Γ auf das Zentrum von $f(\Gamma)$ abgebildet.

Also werden Paare von Punkten die Abstand r haben, auf Punkte abgebildet die Abstand $h(r)$ haben. Da das Innere von Kreisen auf das Innere von Bildkreisen abgebildet wird, ist h strikt monoton wachsend. Schränkt man h auf einen Strahl ein, so sehen wir

$$h(r + s) = h(r) + h(s)$$

für alle $r, s > 0$.

Es ist eine Aufgabe in Analysis I, zu zeigen, dass eine monotone Funktion $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$, die die obige Bedingung erfüllt die Form $h(r) = k \cdot r$ haben muss, für ein festes k. Also streckt f alle Abstände um den Faktor k und ist damit eine Ähnlichkeit. $\square$

Wir merken letztlich an, dass jede zentrische Streckung alle Winkel erhält. Also erhält jede Ähnlichkeit alle Winkelmaße oder dreht bei allen Winkeln die Vorzeichen um. Die ersteren nennen wir wieder *eigentliche Ähnlichkeiten.*

3. Möbius-Geometrie

Sei $\hat{E}$ die Möbius-Ebene $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$. Wir betrachten die Gruppe M' aller bijektiven Abbildungen $f : \hat{E} \to \hat{E}$, die Zykel auf Zykel abbildet. Wir wissen, dass Inversionen an Kreisen (und Spiegelungen) in M' liegen. Jede Ähnlichkeit $f : E \to E$ kann man mit $f(\infty) = \infty$ als ein Element von M' betrachten. Damit wird die Gruppe A der Ähnlichkeiten eine Untergruppe von M'.

SATZ 3.1. *Jedes Element $g \in M'$ ist eine Ähnlichkeit oder die Komposition einer Bewegung von E und einer Inversion.*

Beweis. Sei zuerst $g(\infty) = \infty$. Dann schickt $g : E \to E$ Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden. Folglich ist g eine Ähnlichkeit.

Sei nun $g(\infty) = O \in E$. Sei Γ der Kreis mit Radius r um O. Dann ist $g_1 = I_\Gamma \circ g$ ein Element aus M' mit $g_1(\infty) = \infty$, also eine Ähnlichkeit. Seien $P \neq Q$ in E mit $P' = g(P), Q' = g(Q) \neq \infty$. Setze $\bar{P} = I_\Gamma(P')$, $\bar{Q} = I_\Gamma(Q')$. Dann gilt

$$\bar{P}\bar{Q} = P'Q' \cdot O\bar{P}/OQ' = P'Q' \cdot \frac{r^2}{OP' \cdot OQ'}$$

Wir sehen, dass bei der richtigen Wahl des Radius r, die Gleichheit $\bar{P}\bar{Q} = PQ$ gilt. Damit ist g_1 eine Ähnlichkeit, die den Abstand zwischen P und Q erhält. Dann muss g_1 eine Bewegung sein, und es gilt $g = I_\Gamma \circ g_1$. $\square$

SATZ 3.2. *Jede Abbildung $g \in M'$ ist eine Komposition von höchstens 4 Inversionen/Spiegelungen.*

Beweis. Gilt $g(\infty) \neq \infty$, so ist g eine Komposition von einer Inversion und einer Bewegung. Letztere ist Komposition von höchstens drei Spiegelungen.

Sei nun $g(\infty) = \infty$. Dann ist g eine Ähnlichkeit. Ist g eine Bewegung, so kennen wir die Aussage bereits. Sonst ist g die Komposition der zentrischen Streckung $L_{r,O}$ mit Zentrum in O und einer O fixierenden Bewegung (Satz 2.1). Die Bewegung ist Komposition von einer oder zwei Spiegelungen. Die zentrische Streckung $L_{r,O}$ ist die Komposition $I_{\Gamma_2} \circ I_{\Gamma_1}$, wobei Γ_1 der Kreis um O mit Radius 1 und Γ_2 der Kreis um O mit Radius $\sqrt{r}$ ist. □

Wir folgern, dass jedes Element $g \in M'$ alle Doppelverhältnisse erhält (wobei wir den unendlichen Punkt nicht betrachten), da es alle Ähnlichkeiten und alle Inversionen tun.

Wir sehen ferner, dass jedes Element $g \in M'$ entweder alle Winkel zwischen Bögen erhält oder bei allen das Vorzeichen umkehrt. Ein Element $g \in M'$ erhält alle Winkel genau dann, wenn es ein Produkt einer gerader Anzahl von Spiegelungen/Inversionen ist. Die Menge aller solchen Elemente $g \in M'$ ist eine Untergruppe M von M', die die *Möbiusgruppe* heißt.

SATZ 3.3. (1) *Seien $P \neq Q$ in E. Für $\bar{P} \neq \bar{Q} \in E$ gibt es genau eine eigentliche Ähnlichkeit $f : E \to E$ mit $f(P) = \bar{P}$ und $f(Q) = \bar{Q}$.*

(2) *Seien P, Q, R paarweise verschiedene Punkte in der Möbius-Ebene $\hat{E}$. Für paarweise verschiedene Punkte $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ in $\hat{E}$ gibt es genau eine Möbius-Transformation $f \in M$ mit $f(P) = \bar{P}$, $f(Q) = \bar{Q}$ und $f(R) = \bar{R}$.*

Beweis. Zu (1). Betrachte die zentrische Streckung $f_1 = L_{P,r}$ wobei $r = \bar{P}\bar{Q}/PQ$ gilt. Für $P_1 = f_1(P) = P$ und $Q_1 = f_1(Q)$ gilt $P_1Q_1 = \bar{P}\bar{Q}$. Also gibt es eine Bewegung f_2 mit $f_2(P_1) = \bar{P}$ und $f_2(Q_1) = \bar{Q}$. Ist f_2 nicht eigentlich, so ersetze f_2 durch die Komposition von f_2 und der Spiegelung an $(\bar{P}\bar{Q})$. Die Komposition $f = f_2 \circ f_1$ ist dann die gesuchte Ähnlichkeit.

Gibt es eine andere eigentliche Ähnlichkeit $\bar{f}$ mit $\bar{f}(P) = \bar{P}$ und $\bar{f}(Q) = \bar{Q}$, so ist $g = \bar{f}^{-1} \circ f$ eine eigentliche Ähnlichkeit mit $g(P) = P$ und $g(Q) = Q$. Dann ist g eine eignetliche Bewegung, die die Gerade (PQ) punktweise festläßt, also die Identität. Folglich ist $f = \bar{f}$.

Zu (2). Hat man die Aussage für ein beliebiges Tripel (P, Q, R) und ein fetsgewähltes Tripel $(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})$ gezeigt, so gilt sie für beliebige P, Q, R und $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$.

Wir dürfen also $\bar{R} = \infty$ annehmen. Wir finden ein $f_1 \in M$ mit $f_1(R) = \bar{R} = \infty$. Denn ist $R = \infty$, können wir die Identität als f_1 wählen. Ist $R \neq \infty$, so wähle f_1 als die Komposition einer Spiegelung an einer Geraden durch R und einer Inversion mit Zentrum in R. Dann liegen $P_1 = f_1(\bar{P})$ und $Q_1 = f_1(\bar{Q})$ in E und nach Teil (1) gibt es eine eigentliche Ähnlichkeit f_2 mit $f_2(P_1) = \bar{P}$ und $f_2(Q_1) = \bar{Q}$. Beachte, dass $f_2(\infty) = \infty$, also erfüllt $f = f_2 \circ f_1$ die geforderten Bedingungen. Die Eindeutigkeit folgt wie in (1) mit Hilfe von (1). $\square$

Ferner können wir jetzt sehen:

SATZ 3.4. *Sei $\Gamma \subset E$ ein Kreis und H, das Innere des Kreises, versehen mit der hyperbolischen Metrik des Scheibenmodells. Die Einschränkungen der Möbiustransformationen $g \in M$ mit $g(H) = H$ sind genau die eigentlichen Bewegungen der hyperbolischen Ebene H.*

Beweis. Gilt $g(H) = H$ so gilt $g(\Gamma) = \Gamma$ und g schickt alle zu Γ senkrechten Zykel auf ebensolche. Da g das Doppelverhältnis erhält, erhält es die h-Abstände in H. Winkel werden nach Definition erhalten.

Andererseits ist jede eigentliche Bewegung von H die Komposition von zwei Spiegelungen in H. Eine Spiegelung in H ist die Einschränkung einer Inversion an einem zu Γ senkrechten Zykel. Solche Inversionen erhalten Γ und H und die Komposition von zwei solchen Inversionen ist ein Element aus M. $\square$