Newton-Okounkov Theorie

June 25, 2018

Contents

Chapter 0

Einleitung

Chapter 1

Einführung: Nullstellen, Polynome, die Diskriminante

1.1 Einleitung

Dieses Kapitel ist eine Zusammenstellung von mehren Resultaten, die teilweise aus der Algebra- / Zahlentheorievorlesung bekannt sein sollten. Es seien hier erwähnt der Abschnitt über symmetrische Polynome, die Diskriminante und der Zusammenhang mit der Resultanten. Abschnitte sind inspiriert durch die entsprechenden Ausführungen in dem Buch *Algebra* von *van der Waerden* respektive dem Buch *Algebra* von *Lang*.

1.2 Polynome vom Grad 0, 1, 2 und 3

Gegeben sei ein Polynom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit reellen Koeffizienten:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{1.1}$$

Gesucht sind die (reellen) Nullstellen des Polynoms. Der einfachste Fall

$$P(x) = a_0$$

ist sofort lösbar. Entweder $a_0 \neq 0$, dann hat das Problem keine Lösung, oder $P(x) = 0$, womit die Lösung trivial wäre. Ist

$$P(x) = a_1 x + a_0,$$

mit $a_1 \neq 0$, dann hat das Polynom genau eine Lösung: $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Ist

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit $a_2 \neq 0$, dann sind die Nullstellen

$$x_\pm = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}. \tag{1.2}$$

Den Ausdruck

$$\Delta(P(x)) = a_1^2 - 4a_2a_0 \tag{1.3}$$

nennt man auch die Diskriminante des Polynoms. Ist $\Delta(P(x)) > 0$, so hat das Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen. Ist $\Delta(P(x)) = 0$, dann hat das Polynom nur eine reelle Nullstelle, ist $\Delta(P(x)) < 0$, so hat das Polynom keine reelle Nullstelle, aber zwei verschiedene komplexe Nullstellen.

Falls $P(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ oder $P(x) = a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ mit $a_3 \neq 0$ respektive $a_4 \neq 0$, dann gibt es vergleichbare, aber wesentlich kompliziertere Ausdrücke für die Nullstellen des Polynoms.

Beispiel 1.2.1 Betrachten wir als Beispiel ein Polynom dritten Grades in der vereinfachten Version, durch Substitution kann man eine reelle Gleichung dritten Grades auf diesen Fall reduzieren:

$$P(x) = x^3 + px + q = 0.$$

Man definiert als Diskriminante $\Delta(P(x)) = -4p^3 - 27q^2$ und setzt $\tilde{\Delta} := -\frac{1}{108}\Delta(P(x)) = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$. Weiter setze:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tilde{\Delta}}} & \varepsilon_1 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}, \\ v &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tilde{\Delta}}}, & \varepsilon_2 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dann ergeben sich die drei Lösungen der reduzierten Form als

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v \\ x_2 &= u\varepsilon_1 + v\varepsilon_2 \\ x_3 &= u\varepsilon_2 + v\varepsilon_1 \end{aligned}$$

Wieder hängt das Lösungsverhalten vom Vorzeichen der Diskriminante ab:
$\Delta(P(x)) > 0$: Es gibt drei unterschiedliche reelle Lösungen.
$\Delta(P(x)) = 0$: Es gibt entweder eine doppelte reelle Lösung und eine einfache reelle Lösung oder eine dreifache reelle Lösung.
$\Delta(P(x)) < 0$: Es gibt genau eine reelle Lösung und zwei echt komplexe Lösungen.

1.3 Der allgemeine Fall und die Diskriminante

Ist der Grad des Polynoms $\deg P(x) \geq 5$, d.h. in (1.1) gilt $a_n \neq 0$ und $n \geq 5$, dann wissen wir aus der Algebravorlesung (Galois-Theorie), dass es keine explizite Formel geben kann, die die Nullstellen eine Polynoms in Abhängigkeit von seinen Koeffizienten durch sukzessives Wurzelziehen ausdrückt.

Was kann man trotzdem noch im allgemeinen Fall sagen? Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle hat. Per Induktion zeigt man: Jedes Polynom mit reellen (oder komplexen) Koeffizienten läßt sich schreiben als

$$P(x) = a_n(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\cdots(x-b_t)^{n_t} \text{ mit } n_1,\ldots,n_t \geq 1 \text{ und } b_i \neq b_j \forall i \neq j.$$

Diese Schreibweise ist eindeutig (bis auf Reihenfolge). Die Nullstellen des Polynoms sind die (möglicherweise) komplexen Zahlen $b_1,\ldots,b_t$. Die Potenz n_i wird die Multiplizität der Nullstelle b_i genannt. Hat $P(x)$ reelle Koeffizienten, so ist eine Nullstellen entweder eine reelle Zahl, oder, wenn b_i eine Nullstelle ist mit $b_i \notin \mathbb{R}$, dann ist $\overline{b_i}$ auch eine Nullstelle.

Ist $P(x)$ vom Grad zwei oder drei, so haben wir gesehen: die beiden Nullstellen sind verschieden dann und nur dann wenn für die Diskriminante gilt $\Delta(P(x)) \neq 0$.

Der Begriff der Diskriminante kann verallgemeinert werden wie folgt: Sei $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ ein Polynom vom Grad n (also $a_n \neq 0$) mit komplexen Koeffizienten. Dann kann man $P(x)$ schreiben als

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

wobei wir diesmal nicht voraussetzen, dass die Nullstellen $x_1,\ldots,x_n$ paarweise verschieden sind. Der Ausdruck

$$\Delta(P(x)) = a_n^{2n-2}(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\cdots(x_1-x_n)^2(x_2-x_3)^2\cdots(x_{n-1}-x_n)^2$$

wird die *Diskriminante des Polynoms* $P(x)$ genannt.

Beispiel 1.3.1 Sei $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x-x_+)(x-x_-)$, aus (1.2) erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta(P(x)) &= a_2^2(x_+ - x_-)^2 \\ &= a_2^2\left(\tfrac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2} - \tfrac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}\right)^2 \\ &= a_1^2 - 4a_2a_0, \end{aligned}$$

man erhält somit den Ausdruck aus (1.3) wieder zurück.

Eigenschaften der Diskriminante

- Offensichtlich gilt: $\Delta(P(x)) \neq 0$ ist äquivalent zur Aussage: alle Nullstellen sind paarweise verschieden.
- Sind alle Nullstellen reell, dann gilt $\Delta(P(x)) \geq 0$.
- Selbst wenn man annimmt $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Sei $P(x) = x^4 + 4$. Dann sind die Nullstellen (Übung) $\pm 1 \pm i$, und für die Diskriminante gilt:

$$\begin{aligned}\Delta(P(x)) &= 1((1+i)-(1-i))^2((1+i)-(-1+i))^2 \\ &\qquad ((1+i)-(-1-i))^2((1-i)(-1+i))^2 \\ &\qquad\quad ((1-i)(-1-i))^2((-1+i)(-1-i))^2 \\ &= 16384,\end{aligned}$$

  $\Delta(P(x))$ ist also reell und positiv, obwohl keine der Nullstellen reell ist.

Man nennt ein Polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ generisch, wenn alle seine Nullstellen paarweise verschieden sind, also wenn gilt $\Delta(P(x)) \neq 0$. Die Frage ist: kann man die Eigenschaft verifizieren OHNE die Nullstellen auszurechnen?!

1.3.1 Symmetrische Polynome

Erinnern wir an den Hauptsatz über symmetrische Polynome. Sei $\mathfrak{S}_n$ die symmetrische Gruppe und sei R der Ring $\mathbb{C}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Die symmetrische Gruppe operiert auf R durch

$$\mathfrak{S}_n \times R \to R, \quad (\tau, f(y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \tau f := f(y_{\tau(1)}, \ldots, y_{\tau(n)}).$$

Ein Polynom $f \in R$ heißt symmetrisch falls gilt $f = \tau f$ für alle $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Ein paar Beispiele:

Beispiel 1.3.2 Die elementarsymmetrischen Polynome: diese Polynome sind die Bahnensummen der Monome $y_1 \cdots y_i$, $i = 1, \ldots, n$:

- $\sigma_1 := y_1 + ... + y_n$,
- $\sigma_2 := y_1y_2 + ... + y_1y_n + y_2y_3 + ... + y_{n?1}y_n$,
- $\vdots$

- $\sigma_n := y_1 y_2 \cdots y_n$.

Theorem 1.3.1 *Zu jedem symmetrischen Polynom $f \in \mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ gibt es genau ein $g \in \mathbb{C}[y_1, ..., y_n]$ mit $f = g(\sigma_1, \dots \sigma_n)$.*

Beweis. Der Beweis verläuft konstruktiv:
i) Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ schreibt man einfach y^α statt $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$. Man nennt das Tupel α auch das Gewicht des Monoms y^α. Wir ordnen die Gewichte lexikographisch, d.h.,

$$\alpha >_\ell \beta \Longleftrightarrow \exists 1 \leq i \leq n : \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i.$$

respektive homogen lexikographisch, d.h.,

$$\alpha >_{h\ell} \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i; \\ \text{oder} \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{ and} \\ \exists 1 \leq i \leq n : \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i. \end{cases}$$

ii) Sei nun α das homogen lexikographisch maximale in f auftretende Gewicht, und damit $f = ay^\alpha + \dots$, mit $a \neq 0$. Dann gilt wegen der Symmetrie von f, dass für alle $\tau \in \mathfrak{S}_n$ auch y^{α^τ} mit $\alpha^\tau = (\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)})$ ein Monom in f ist. Diese Monom kommt mit dem gleichen Koeffizienten a wie y^α vor. Wegen der homogen lexikographischen Ordnung folgt somit $\alpha_1 \geq_{h\ell} \dots \geq_{h\ell} \alpha_n$. Wir können demnach die folgende Differenz bilden:

$$f_1 := f - a\sigma_1^{a_1 - a_2} \sigma_2^{a_2 - a_3} \cdots \sigma_n^{a_n} = by^\beta + cy^\gamma + \dots$$

wobei in der homogen lexikographische Ordnung gilt: $\alpha >_{h\ell} \beta >_{h\ell} \gamma >_{h\ell} \dots$.

Zu einem gegebenen $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ gibt es nur endlich viele $\beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $\beta <_{h\ell} \alpha$. Wiederholt man die Prozedur, so erhält man in jedem Schritt ein neues Polynom, dessen homogen lexikographisch maximales auftretendes Gewicht echt kleiner ist als das im vorherigen Polynom. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir als Differenz das Nullpolynom, was die behauptete Existenz eines Polynoms g mit $f = g(\sigma_1, \dots \sigma_n)$ beweist.

Übung 1.3.1 Zeigen Sie:

$$\begin{gathered} 2(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) - 3(y_1^2 y_2 + y_1^2 y_3 + y_1 y_2^2 + y_1 y_3^2 + y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2) \\ = 2\sigma_1^3 + 15\sigma_3 - 9\sigma_1\sigma_2. \end{gathered}$$

iii) Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Zur Erinnerung: Polynome h_1, …, $h_p \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ heißen algebraisch unabhänging über $\mathbb{C}$ falls für jedes beliebige Polynom $q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_p] - \{0\}$ gilt $q(h_1, \ldots, h_q) \neq 0$. Man kann es auch anders formulieren: die Monome $h_1^{m_1} \cdots h_p^{m_p}$ in den h_j, $j = 1, \ldots, p$, bilden eine über $\mathbb{C}$ linear unabhängige Teilmenge in R. Die Eindeutigkeit von g folgt also sobald wir gezeigt haben, dass die elementarsymmetrischen Funktionen algebraisch unabhänging sind.

Sei also $q(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] - \{0\}$, und sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ maximal in der lexikographischen Ordnung, so dass das Monom

$$r z_1^{\alpha_1 - \alpha_2} z_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \cdots z_n^{\alpha_n}$$

als Summand mit Koeffizient ungleich 0 in q auftaucht. Anders gesagt, zu $\underline{\mathbf{z}}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ assoziiere $\alpha_{\underline{\mathbf{k}}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1 = k_1 + \ldots + k_n$, $\alpha_2 = k_2 + \ldots + k_n$, …, $\alpha_n = k_n$. Man wählt in $q(z_1, \ldots, z_n)$ das Monom $\underline{\mathbf{z}}^{\mathbf{k}}$ aus, so daß der Koeffizient ungleich 0 ist und $\alpha_{\underline{\mathbf{k}}}$ maximal in der lexikographischen Ordnung.

Setzt man nun in $q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ die elementarsymmetrischen Funktionen ein, dann taucht das Monom $\underline{\mathbf{y}}^{\alpha_{\underline{\mathbf{k}}}}$ genau einmal auf mit einem Koeffizienten verschieden von 0. Wegen der dieses der Maximalität bezüglich der lexikographischen Ordnung kann es sich nicht wegheben. Insbesondere gilt: $q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq 0$, die elementarsymmetrischen Funktionen sind also algebraisch unabhänging. •

Was bedeutet das nun für die Diskriminante? Wenn man

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

ausrechnet so erhält man:

$$P(x) = a_n(x^n - \sigma_1(x_1, \ldots, x_n)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Die Koeffizienten von $P(x)$ erhält man aus den Nullstellen (bis auf den Faktor a_n) indem man die Nullstellen in die elementarsymmetrischen Funktionen einsetzt. Weiter ist die Diskriminante:

$$\Delta(P(x)) = a_n^{2n-2}(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \cdots (x_1 - x_n)^2(x_2 - x_3)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2$$

ein symmetrischer Ausdruck in den Nullstellen (deswegen überall die Quadratpotenz, sonst gäbe es sicher Vorzeichenwechsel!), wir wissen also nach Theorem 1.3.1, dass es ein Polynom $g(y_1, \ldots, y_n)$ gibt mit

$$\Delta(P(x)) = g(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Da

$$a_{n-1} = -a_n\sigma_1(x_1,\ldots,x_n), a_{n-2} = a_n\sigma_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,a_0 = a_n\sigma_n(x_1,\ldots,x_n),$$

folgt: es gibt ein Polynom $\tilde{g}(y_1,\ldots,y_n)$, so dass

$$\Delta(P(x)) = \tilde{g}(\frac{a_{n-1}}{a_n},\ldots,\frac{a_0}{a_n}).$$

Das ist schon fast das, was man gerne hätte: die Diskriminante als Polynom in mehreren Variablen, in die man nur die Koeffizienten einsetzen braucht um $\Delta(P(x))$ auszurechnen.

Proposition 1.3.1 *Es gibt ein Polynom $\hat{g}(y_n,\ldots,y_1,y_0)$, so dass gilt*

$$\Delta(P(x)) = \hat{g}(a_n,\ldots,a_0).$$

Beweis. Wer sich gefragt hat warum der Faktor a_n^{2n-2} in der Definition der Diskriminante auftaucht, der wird es jetzt verstehen. Der Ausdruck

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\cdots(x_1-x_n)^2(x_2-x_3)^2\cdots(x_{n-1}-x_n)^2 \tag{1.4}$$

ist bereits symmetrisch, es gibt also ein Polynom $g_1(y_1,\ldots,y_n)$, so dass $g_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ gleich dem Ausdruck in (1.4) ist. Wie oben folgt dann:

$$(1.4) = \tilde{g}_1(\frac{a_{n-1}}{a_n},\ldots,\frac{a_0}{a_n})$$

Es folgt:

$$\Delta(P(x)) = a_n^{2n-2}\cdot(1.4) = a_n^{2n-2}\tilde{g}_1(\frac{a_{n-1}}{a_n},\ldots,\frac{a_0}{a_n}),$$

und wir überlassen es als Übung zu zeigen: der letzte Ausdruck ist ein polynomialer Ausdruck in $a_0,\ldots,a_n$, d.h., es gibt ein Polynom $\hat{g}(y_n,\ldots,y_0)$ mit $\Delta(P(x)) = \hat{g}(a_n,\ldots,a_0)$. •

Es bleibt noch die Frage: Wie berechnet man diese Polynom $\hat{g}(y_n,\ldots,y_0)$?

1.4 Die Resultante zweier Polynome

Definition 1.4.1 (Sylvester-Matrix, Resultante) Zu zwei Polynomen $f = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ und $g = \sum_{i=0}^m b_ix^i$ vom Grad n bzw. m, bezeichnet man folgende

$(m+n) \times (m+n)$-Matrix, gebildet aus den Koeffizienten von f und g, als *Sylvester-Matrix* der beiden Polynome:

$$S(f,g) := \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

(die m ersten Zeilen aus den a_i wie angegeben, danach n Zeilen gebildet aus den b_j). Die Determinante der Matrix heißt die *Resultante* von f und g:

$$Res(f,g) := det(S(f,g)).$$

Übung 1.4.1 Manchmal findet man auch folgende Definition für die Sylvester-Matrix:

$$\tilde{S}(f,g) := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Zeigen Sie: $det(S(f,g)) = \pm det(\tilde{S}(f,g))$.

Beispiel 1.4.1 Sei $P(x) = ax^2 + bx + c$ ein reelles Polynom vom Grad 2. Dann gilt

$$\begin{aligned} Res(P(x), P'(x)) &= \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} \\ &= ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 \\ &= -a(b^2 - 4ac) \\ &= -a\Delta(P(x)). \end{aligned}$$

Woher kommt die Sylvester-Matrix? Die Frage, die hinter dieser Matrix steckt, ist die folgende: *Haben $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen nicht-konstanten Teiler ?*

Angenommen es gibt ein nicht konstantes Polynom $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $f(x) = \phi(x)k(x)$ und $g(x) = \phi(x)h(x)$, dann folgt:

$$f(x)h(x) = g(x)k(x). \tag{1.7}$$

Andererseits, gegeben seien nicht-konstante Polynome $h(x), k(x)$ mit der Gradbedingung $\deg h(x) < \deg g(x)$, $\deg k(x) < \deg f(x)$, die eine Lösung von (1.7) ergeben. Dann betrachten wir eine Primfaktorzerlegung der rechten und der linken Seite. Insbesondere, alle Primfaktoren von $g(x)$ müssen auf der linken Seite (mit gegebenfalls entsprechenden Vielfachheiten) vorkommen. Da aber $\deg h(x) < \deg g(x)$, muss mindesten ein Primfaktor von $g(x)$ auch als Teiler von $f(x)$ vorkommen. Zusammengefaßt haben wir:

Zu gegebenen Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ hat (1.7) hat eine Lösung durch nicht-konstante Polynome $h(x), k(x)$ mit $\deg h(x) < \deg g(x)$, $\deg k(x) < \deg f(x)$ dann und nur dann, wenn $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen nicht-konstanten Teiler haben.

Um solche Polynome zu finden, machen wir den Ansatz $h(x) = c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_0$ und $k(x) = -d_{n-1}x^{n-1} - \ldots - d_0$. Dann führt (1.7) zu einem System von linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} a_n c_{m-1} & = & -b_m d_{n-1} \\ a_n c_{m-2} + a_{n-1} c_{m-1} & = & -b_m d_{n-2} - b_{m-1} d_{n-1} \\ \ldots & = & \ldots \\ a_0 c_0 & = & -b_0 d_0 \end{array}$$

Nun kommt die zunächst unmotivierte Vorzeichenwahl bei den Koeffizienten von $k(x)$ zum Zug, denn die linearen Gleichungen oben sind äquivalent zu folgendem System von $n+m$ homogenen Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} a_n c_{m-1} + b_m d_{n-1} & = & 0 \\ a_n c_{m-2} + a_{n-1} c_{m-1} + b_m d_{n-2} + b_{m-1} d_{n-1} & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \\ a_0 c_0 + b_0 d_0 & = & 0 \end{array}$$

Fassen wir die c_i, d_j als Variablen auf, so kann man dieses System umschreiben in:

$$S(f,g)^t \cdot \begin{pmatrix} c_{m-1} \\ \vdots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ \vdots \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

Insbesondere hat (1.7) eine nicht-triviale Lösung dann und nur dann wenn $Res(f,g) = \det S(f,g) = 0$. Oder, anders formuliert:

Proposition 1.4.1 *Die Resultante $Res(f,g)$ von $f, g \in \mathbb{C}[x]$ ist genau dann gleich Null, wenn f und g in $\mathbb{C}[x]$ einen gemeinsamen nicht konstanten Faktor haben.*

Bemerkung 1.4.1 Im Beweis wurde keine spezielle Eigenschaft des Körpers $\mathbb{C}$ benutzt. Der Polynomring in einer Variablen (auch der in mehreren Variablen) ist ein faktorieller Ring. Der Beweis der Äquivalenz der Frage "*Haben $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen nicht-konstanten Teiler?*" zu dem Problem Lösungen von (1.7) zu finden und die entsprechende Umformulierung des Problems in die Frage nach der Invertierbarkeit der Sylvester-Matrix kann wortwörtlich für Polynomringe in einer Variablen über einem beliebigen Körper übernommen werden. Insbesondere, Proposition 1.4.1 gilt für $\mathbb{C}[x]$ für beliebige Körper.

1.4.1 $Res(f,g)$ und die Nullstellen von f und g

Über $\mathbb{C}$ zerfallen f und g in Linearfaktoren, sei

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ g(x) &= b_m(x-y_1)\cdots(x-y_m). \end{aligned}$$

Proposition 1.4.2

$$Res(f,g) = a_n^m b_m^n (x_1-y_1)(x_1-y_2)\cdots(x_1-y_m)(x_2-y_1)\cdots(x_n-y_m).$$

Beweis. Bezeichne zunächst das Produkt $a_n^m b_m^n \prod_{i,j}(x_i - y_j)$ mit T, und wir fassen die Nullstellen x_i, y_j als Variablen auf. Setzt man $x_i = y_k$, dann verschwindet $Res(f,g)$ da f und g dann einen gemeinsamen Linearfaktor haben. Insbesondere folgt: $(x_i - y_j)$ teilt $Res(f,g)$, und damit folgt: T teilt $Res(f,g)$.

Übung 1.4.2 Sei $h(x_1, \dots, x_n)$ ein komplexes Polynom in n Variablen. Wenn $h(x_1, x_1, a_3, \dots, a_n) = 0$ für jede beliebige Wahl von $a_3, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, dann gilt $x_1 - x_2$ teilt $h(x)$.

Als nächstes schauen wir uns die Grade von T und $Res(f,g)$ in den a_i und b_j an. Einmal ist $g(x) = b_m \prod_j (x - y_j)$ und damit (es gibt n Nullstellenen $x_1, \dots, x_n$ von f)

$$T = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i). \tag{1.8}$$

Das gleiche Argument liefert

$$T = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(y_j). \tag{1.9}$$

Es folgt: T ist homogen vom Grad n in den Koeffizienten b_j von $g(x)$, und T ist homogen vom Grad m in den Koeffizienten a_i von $f(x)$. Das gilt ebenso für $Res(f,g)$. Da T ein Teiler von $Res(f,g)$ ist, unterscheiden sich die beiden nur durch einen konstanten Faktor.

Schauen wir uns einen speziellen Summanden an, und zwar denjenigen, der die höchste Potenz von b_0 enthält. Aus der Definition von $Res(f,g)$ folgt: der Summand ist $a_n^m b_0^n$. Andererseits folgt aus (1.8): der Summand mit der höchsten Potenz von b_0 ist $a_n^m b_0^n$, und somit folgt $T = Res(f,g)$. •

1.5 Die Resultante und die Diskriminante

Proposition 1.5.1 *Der Zusammenhang zwischen Diskriminante und Resultante wird von der folgenden Gleichung beschrieben:*

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n \Delta(P(x)) = Res(P(x), P'(x)).$$

Beweis. Aus (1.8) folgt

$$Res(P(x), P'(x)) = a_n^{n-1} \prod_i P'(x_i)$$

Nun gilt aber

$$P'(x) = \sum_i a_n(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

und damit

$$P'(x_i) = a_n(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n).$$

Und somit

$$\begin{array}{rcl} Res(P(x), P'(x)) & = & a_n^{n-1} \prod_i P'(x_i) \\ & = & a_n^{2n-1} \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \\ & = & (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n^{2n-1} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 \\ & = & (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n \Delta(P(x)). \end{array}$$

•

Beispiel 1.5.1 Sei $P(x) = x^3 + px + q$ ein reelles Polynom vom Grad 3. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} Res(P(x), P'(x)) & = & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix} \\ & = & 4p^3 + 27q^2 \\ & = & -\Delta(P(x)). \end{array}$$

Chapter 2

Das Theorem von Bézout

2.1 Einleitung

Dieses Kapitel ist eine kurze Einführung in die algebraische Geometrie anhand von affinen und projektiven Kurven. Es seien hier erwähnt der Abschnitt über Hilberts Nullstellensatz, die Resultante von zwei Polynomen, der projektive Raum und der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Kurven, Schnittmultiplizität, und das Theorem von Bézout. Diese Kapitel ist inspiriert durch die entsprechenden Kapitel in dem Buch *Complex Algebraic Curves* von *Frances Kirwan*.

2.2 Kurven im $\mathbb{C}^2$

Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein nicht konstantes Polynom in den Variablen x und y. Wir schauen uns die Nullstellenmenge des Polynoms an als eine Teilmenge des $\mathbb{C}^2$: $C = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1, z_2) = 0\}$.

Zur Erinnerung: ein Polynomring ist ein faktorieller Ring, d.h., jedes Polynom besitzt eine (bis auf Reihenfolge und Einheiten) eindeutige Zerlegung in Primelemente. Man sagt $P(x, y)$ hat keine *mehrfachen* Faktoren, wenn man $P(x, y)$ nicht zerlegen kann in

$$P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y),$$

wobei $Q(x, y), R(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ und $Q(x, y)$ kein konstantes Polynom ist. Zwar haben $Q(x, y)R(x, y)$ und $(Q(x, y))^2 R(x, y)$ die gleiche Nullstellenmenge, aber man ist geneigt für die Beschreibung der Nullstellenmenge das "einfachere" Polynom $P(x,y) = Q(x,y)R(x,y)$ zu nehmen.

Definition 2.2.1 Sei $P(x,y)$ ein Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$ ohne mehrfache Faktoren. Die *komplexe algebraische Kurve* C definiert durch $P(x,y)$ ist

$$C = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1,z_2) = 0\}.$$

Eine komplexe algebraische Kurve im $\mathbb{C}^2$ wird oft kurz auch einfach *affine Kurve* genannt.

Das folgende Theorem wird ohne Beweis gegeben. Den Nullstellensatz von Hilbert gibt es in vielen Versionen, empfohlen sei das Buch von David Eisenbud: *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1994. In diesem Buch werden mehrere verschiedene Versionen des Theorems beschrieben und Beweise gegeben, warum die alle äquivalent zueinander sind. Wir werden später noch eine allgemeinere Version kennenlernen.

Theorem 2.2.1 (Nullstellensatz von Hilbert) *Seien $Q(x,y)$ und $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Dann gilt*

$$C_P = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1,z_2) = 0\} \supseteq C_Q = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(z_1,z_2) = 0\}$$

dann und nur dann wenn es $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so daß Q teilt P^n. Anders gesagt: alle Primteiler von Q sind auch Primteiler von P.

Hier eine Formulierung, die die Sprache der Ideale benutzt:

Korollar 2.2.1 *Sei $\mathcal{I}_Q \subset \mathbb{C}[x,y]$ das von Q erzeugte Ideal, d.h., $\mathcal{I}_Q$ ist die Menge aller durch $Q(x,y)$ teilbaren Polynome. Dann gilt*

$$C_P \supseteq C_Q \Leftrightarrow \exists\, n \in Z_{>0} : P^n \in \mathcal{I}_Q.$$

Im Falle der Gleichheit gilt die Teilerbedingung in beide Richtungen:

Korollar 2.2.2 *Seien $Q(x,y)$ und $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Dann gilt*

$$C_P = C_Q \Leftrightarrow \exists\, m,n \in Z_{>0} : Q|P^n,\ \ P|Q^m.$$

Anders gesagt: P und Q haben die gleichen Primteiler, aber möglicherweise mit verschiedenen Vielfachheiten.

Durch die Bedingung "*Sei $P(x,y)$ ein Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$ ohne mehrfache Faktoren*" wird das Paar (P, C_P) eindeutig festgelegt:

Korollar 2.2.3 *Sei $P(x,y)$ ein nicht konstantes Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$ ohne mehrfache Faktoren, und sei $Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Dann gilt $C_Q \supseteq C_P$ dann und nur dann wenn $P(x,y)$ das Polynom $Q(x,y)$ teilt.*

Insbesondere, ist $Q(x,y)$ auch ohne mehrfache Faktoren, so gilt $C_Q = C_P$ dann und nur dann wenn $Q = P$.

In Ideale umformuliert erhält man folgende Formulierung. Sei $P(x,y)$ ein nicht konstantes Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$ ohne mehrfache Faktoren, und sei C_P die zugehörige komplexe algebraische Kurve. Bezeichne mit

$$\mathcal{I}(C_P) = \{f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(x,y)|_{C_P} \equiv 0\}.$$

Dann ist $\mathcal{I}(C_P)$ ein Ideal, denn aus $f, g \in \mathcal{I}(C_P)$ folgt $(\lambda f + \mu g)|_C \equiv 0$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, und für $h \in \mathbb{C}[x,y]$ gilt $hf|_{C_P} \equiv 0$. Man nennt $\mathcal{I}(C_P)$ das *Verwschwindungsideal* der Kurve C_P. Man kann P aus $\mathcal{I}(C_P)$ (bis auf skalare Vielfache) wiederbekommen:

Korollar 2.2.4 *Sei $P(x,y)$ ein nicht konstantes Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$ ohne mehrfache Faktoren. Dann gilt:*

$$\mathcal{I}(C_P) = \mathcal{I}_P.$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{I}(C_P) \supseteq \mathcal{I}_P$. Sei nun $Q(x,y) \in \mathcal{I}(C_P)$, also $C_Q \supseteq C_P$. Aus Korollar 2.2.3 folgt $P(x,y)$ teilt $Q(x,y)$, also $\mathcal{I}(C_P) \subseteq \mathcal{I}_P$. Aus der Gleichheit folgt: $\mathcal{I}(C_P)$ ist ein Hauptideal (Achtung! $\mathbb{C}[x,y]$ ist kein Hauptidealring! Übung), und der Erzeuger ist bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt. •

Das nachfolgende Korollar erklärt den Namen *Nullstellensatz*:

Korollar 2.2.5 *Sei $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann ist $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1, z_2) = 0\} \neq \emptyset$.*

Beweis. Angenommen $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1, z_2) = 0\} = \emptyset$. Sei $Q(x,y) = 1$ das konstante Polynom, das überall den Wert 1 annimmt. Dann gilt offensichtlich

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z_1, z_2) = 0\} = \emptyset = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(z_1, z_2) = 0\}.$$

Aus Hilberts Nullstellensatz folgt: Es gibt ein $m \geq 1$, so daß P teilt Q^m, also gibt es ein Polynom $R(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ mit

$$P(x,y)R(x,y) = Q(x,y)^m = 1.$$

Somit ist $P(x,y)$ ein invertierbares Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$. Aber die einzigen in $\mathbb{C}[x,y]$ invertierbaren Polynome sind die konstanten Polynome, im Widerspruch zur Annahme. •

Bemerkung 2.2.1 In diesem Fall ist die Aussage des Korollars nichts überraschend. Sei

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{p} f_i(y)x^i = \sum_{j=0}^{q} g_j(x)y^j$$

ein nicht-konstantes Polynom. Sind alle f_i konstante Polynome, so hängt $P(x,y)$ nur von x ab und wir schreiben nur noch $P(x)$. Die Nullstellenmenge C_P ist eine Vereinigung von Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen und auf der x-Achse durch die Nullstellen des Polynoms $P(x)$ gehen. Ebenso beschreibt man den Fall wenn alle g_i konstante Polynome sind.

In Folgenden nehmen wir an, dass weder die f_i noch die g_j nur aus konstanten Polynomen bestehen. Sei $M = \{a \in \mathbb{C} \mid g_j(a) = 0 \, \forall j = 1, \ldots, q\}$. Dann finden wir für jedes $x_0 \in \mathbb{C} - M$ mindestens ein $y_0 \in \mathbb{C}$, so dass das (nicht konstante!) Polynom $P(x_0, y) = \sum_{j=0}^{q} g_j(x_0)y^j = 0$ in y_0 eine Nullstelle hat.

Sei $P(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j}x^iy^j$ ein nicht-konstantes Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$ ohne mehrfache Faktoren, und sei C die zugehörige komplexe algebraische Kurve. Ein paar Namen und Definitionen:

(i) Der *Grad der Kurve* C ist der Grad des Polynoms $P(x,y)$, d.h., $\deg C = \max\{i + j \mid c_{i,j} \neq 0\}$.

(ii) Ein Punkt $(a,b) \in C$ heißt *singulär* (oder eine *Singularität* von C) falls

$$\frac{\partial}{\partial x}P(a,b) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}P(a,b).$$

Man bezeichnet mit $\operatorname{Sing} C$ die Menge aller singulären Punkte. Man sagt C sei *glatt* falls $\operatorname{Sing} C = \emptyset$.

(iii) Man nennt C *irreduzibel* falls $P(x,y)$ irreduzibel ist. Ist $P(x,y) = P_1(x,y)\cdots P_r(x,y)$, wobei die $P_i(x,y)$ irreduzible, nicht-konstante Polynome sind, so sei C_i die irreduzible komplexe algebraische Kurve definiert durch $P_i(x,y)$. Dann ist $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$. Man nennt die C_i die *irreduziblen Komponenten* von C.

Beispiel 2.2.1 Sei $P(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ und sei $Q(x,y) = x^3 - y^2$. Die Kurve C_P definiert durch $P(x,y)$ ist glatt, denn

$$\frac{\partial}{\partial x}P(a,b) = 2a = 0 = 2b = \frac{\partial}{\partial y}P(a,b) \Leftrightarrow a = b = 0 \Rightarrow (a,b) \notin C.$$

Für die Kurve C_Q ergibt die gleiche Rechnung

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(a,b) = 3a = 0 = -2b = \frac{\partial}{\partial y}Q(a,b) \Leftrightarrow a = b = 0,$$

also ist $\operatorname{Sing} C_Q = \{(0,0)\}$.

Beispiel 2.2.2 Sei $P(x,y) = xy$, dann ist C_P die Vereinigung der x-Achse und der y-Achse, die auch beide die jeweils irreduziblen Komponenten sind. Für die Ableitungen gilt $\frac{\partial}{\partial x}P(a,b) = b$, $\frac{\partial}{\partial y}P(a,b) = a$. Somit

$$\frac{\partial}{\partial x}P(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}P(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0,$$

die Kurve C_P ist also glatt ausserhalb des Ursprungs.

Beispiel 2.2.3 Sei $P(x,y) = Q(x,y)R(x,y)$ mit $Q(x,y), R(x,y)$ nicht konstant und irreduzibel. Dann ist $C_P = C_Q \cup C_R$ die Vereinigung der beiden Kurven, und sei $(a,b) \in C_Q \cap C_R$. Dann ist (a,b) ein singulärer Punkt von C_P, auch wenn (a,b) ein glatter Punkt in C_Q und ebenfalls ein glatter Punkt in C_R ist, dies folgt sofort aus der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial P}{\partial x}(a,b) &= \left(Q(x,y)\tfrac{\partial R(x,y)}{\partial x}\right)(a,b) + \left(R(x,y)\tfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)(a,b) \\
&= Q(a,b)\tfrac{\partial R}{\partial x}(a,b) + R(a,b)\tfrac{\partial Q}{\partial x}(a,b) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.3 Kurven im $\mathbb{P}^2$

2.3.1 Der projektive Raum

Zunächst ein paar Worte allgemein zum projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$. Kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ haben mehr Struktur und sind oft einfacher zu untersuchen als nicht kompakte Teilmengen. In unseren Beispielen bisher haben wir unter anderem komplexe algebraische Kurven C_P betrachtet, die definiert sind durch ein nicht konstantes Polynom P. Eine solche Kurve ist niemals kompakt: erinnern wir uns, dass eine Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ kompakt ist dann und nur dann wenn sie abgeschlossen ist und beschränkt. Die Kurve C_P ist sicher abgeschlossen. Aber, wie wir schon im Bemerkung 2.2.1 gesehen haben, gibt es immer entweder für alle (bis auf endlich viele) $a \in \mathbb{C}$ ein $b \in \mathbb{C}$, so daß $P(a, b) = 0$, oder es gibt immer für alle (bis auf endlich viele) $b \in \mathbb{C}$ ein $a \in \mathbb{C}$, so daß $P(a, b) = 0$. In jedem Fall ist die Nullstellenmenge nicht beschränkt, und damit nicht kompakt.

Um dieses Manko zu umgehen, kompaktifiziert man die Objekte. Aus $\mathbb{C}^1$ macht man $\mathbb{P}^1$ indem man an $\mathbb{C}^1$ einen Punkt im *Unendlichen* hinzufügt, and dem $\mathbb{C}^2$ fügt man im *Unendlichen* eine Gerade hinzu und erhält den $\mathbb{P}^2$, usw. Präziser:

Definition 2.3.1 Der *projektive Raum* $\mathbb{P}^n$ ist die Menge aller eindimensionalen Unterräume im $\mathbb{C}^{n+1}$. Den $\mathbb{P}^1$ bezeichnet man auch oft als die *projektive Gerade*, den $\mathbb{P}^2$ bezeichnet man als die *projektive Ebene*.

Jeder eindimensionale Unterraum $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ hat als Basis einen Vektor $u = (u_0, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Zwei solche Vektoren $u, u' \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ erzeugen den gleichen Unterraum dann und nur dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $u = \lambda u'$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation:

$$u \sim u' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \; u = \lambda u' \Leftrightarrow \langle u \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u' \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Man kann den $\mathbb{P}^n$ also auch auffassen als $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$. Ein Vektor $(s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ repräsentiert also ein Element $s \in \mathbb{P}^n$. Man nennt die Koordinaten $(s_0, \ldots, s_n)$ die homogenen Koordinaten von s und schreibt

$$s = [s_0, \ldots, s_n] \in \mathbb{P}^n$$

mit eckigen Klammern um darauf hinzuweisen, dass die Koordinaten nur bis auf ein gemeinsames skalares Vielfaches bestimmt sind.

Man macht aus dem $\mathbb{P}^n$ einen topologischen Raum wie folgt: Sei

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n, \quad (s_0, \ldots, s_n) \mapsto [s_0, \ldots, s_n]$$

die Quotientenabbildung, die einen Vektor auf seine Äquivalenzklasse schickt. Wir versehen den $\mathbb{P}^n$ mit der *Quotiententopologie*, d.h., eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}^n$ ist offen dann und nur dann wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ offen ist. Aus der Konstruktion der Quotiententopologie folgt direkt:

Lemma 2.3.1 *(i) $B \subset \mathbb{P}^n$ ist abgeschlossen dann und nur dann wenn $\pi^{-1}(B) \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ abgeschlossen ist.*

(ii) Die Abbildung $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ ist stetig.

(iii) Sei $A \subset \mathbb{P}^n$ eine Teilmenge und sei X ein topologischer Raum. Dann ist eine Abbildung $f : A \to X$ stetig dann und nur dann wenn $f \circ \pi : \pi^{-1}(A) \to X$ stetig ist.

Man kann sich den $\mathbb{P}^n$ auch vorstellen als zusammengeklebte $\mathbb{C}^n$'s. Genauer, bezeichne mit $U_i \subset \mathbb{P}^n$ die Teilmenge

$$U_i = \{s = [s_0, \ldots, s_n] \in \mathbb{P}^n \mid s_i \neq 0\}. \tag{2.1}$$

Da $\pi^{-1}(U_i) = \{(s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid s_i \neq 0\}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^{n+1}$ ist, folgt $U_i \subset \mathbb{P}^n$ ist eine offene Teilmenge. Da es für jedes $s = [s_0, \ldots, s_n] \in \mathbb{P}^n$ mindestens ein $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gibt mit $s_j \neq 0$, folgt:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0,\ldots,n} U_j.$$

Lemma 2.3.2 *Die Abbildung $\phi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$,*

$$[s_0, \ldots, s_n] \mapsto \left(\frac{s_0}{s_j}, \ldots \frac{s_{j-1}}{s_j}, \frac{s_{j+1}}{s_j}, \ldots, \frac{s_n}{s_j} \right),$$

ist ein Homeomorphismus, mit der inversen Abbildung

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto [y_1, \ldots, y_{j-1}, 1, y_j, \ldots, y_n].$$

Bemerkung 2.3.1 Ist $s = [s_0, \ldots, s_n] \in U_j$, dann ist $s_j \neq 0$. Da die homogenen Koordinaten ja nur bis auf skalare Vielfache definiert sind, kann man ohne Einschränkung die Koordinate $s_j = 1$ wählen. Die Koordinaten eines solchen Repräsentanten $s = [s_0, \ldots, s_{j-1}, 1, s_{j+1}, \ldots, s_n] \in U_j \subset \mathbb{P}^n$ nennt man die inhomogenen Koordinaten von s in U_j.

Beweis. Die Abbildung $\phi_j \circ \pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}^n$ ist stetig und damit ist auch ϕ_j stetig (Lemma 2.3.1). Die angegebene Abbildung ist offensichtlich die inverse Abbildung, und man kann sie beschreiben als Komposition der stetigen Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \ldots, y_n)$, und der Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$. Insbesondere ist die Umkehrabbildung stetig. •

Definition 2.3.2 Eine *Hyperebene* im $\mathbb{P}^n$ ist das Bild $\pi(H - \{0\})$ eines Untervektorraums $H \subset \mathbb{C}^{n+1}$ der Kodimension 1.

Ein Vektorraumisomorphism $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ schickt eindimensionale Unterräume auf eindimensionale Unteräume, und ϕ induziert daher eine Abbildung

$$\bar{\phi} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, \quad s = [s_0, \ldots, s_n] \mapsto [\phi(s_0, \ldots, s_n)].$$

Lemma 2.3.3 *$\bar{\phi}$ ist stetig.*

Beweis. Offensichtlich gilt $\bar{\phi} \circ \pi = \pi \circ \phi$. Da ϕ und π stetig sind folgt $\bar{\phi} \circ \pi$ ist stetig, und damit ist $\bar{\phi}$ stetig. •

Eine projektive Transformation ist eine Abbildung $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, so daß es einen Vektorraumisomorphism $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ mit $f = \bar{\phi}$.

Lemma 2.3.4 *Seien gegeben $n+2$ Punkte $p_0, \ldots, p_n$ und q im $\mathbb{P}^n$, von denen keine $n+1$ in einer Hyperebene liegen. Dann gibt es eine projektive Transformation f mit*

$$f(p_i) = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots, 0],\ i = 0, \ldots, n,\ \text{und}\ f(q) = [1, \ldots, 1].$$

Beweis. Seien $u_0, \ldots, u_n, v \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ mit $[u_i] = p_i$, $i = 0, \ldots, n$, und $[v] = [q]$. Da $p_0, \ldots, p_n$ nicht in einer Hyperebene liegen, bilden die

$u_0, \ldots, u_n$ eine Basis des $\mathbb{C}^{n+1}$. Es gibt also eine projektive Transformation f mit $f(p_i) = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$.

Im Folgenden können wir daher ohne Einschränkung annehmen: $p_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$. Da auch q nicht in einer der Hyperebenen liegen darf, die von jeweils n Elementen der $p_0, \ldots, p_n$ aufgespannt wird, folgt: $v = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

Sei ϕ der lineare Automorphismus des $\mathbb{C}^{n+1}$ mit Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_0} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

bezüglich der gewählten Basis. Dann gilt $\bar{\phi}(p_i) = p_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$, und $\bar{\phi}(q) = [1, \ldots, 1]$. •

Proposition 2.3.1 *Der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Sei

$$S^{n+1} = \{(s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |s_0|^2 + \ldots + |s_n|^2 = 1\}$$

die $n+1$-dimensionale Späre. Die Späre ist kompakt. Da $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ stetig ist, ist auch das Bild $\pi(S^{n+1}) \subseteq \mathbb{P}^n$ kompakt. Man sieht leicht, dass $\pi|_{S^{n+1}}$ surjektiv ist. •

2.3.2 Homogene Polynome

23. April ab hier

Sei $s \in \mathbb{P}^n$ mit homogenen Koordinaten $s = [s_0 \ldots, s_n]$. Ist $P \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, dann hat der Ausdruck $P(s) = P(s_0, \ldots, s_n)$ keinen Sinn da die homogenen Koordinaten nur bis auf ein gemeinsames skalares Vielfaches bestimmt sind.

Man nennt ein Polynom *homogen vom Grad d* falls

$$P(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d P(x_0, \ldots, x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Äquivalent dazu ist die Aussage

$$P(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{r_1 + \ldots + r_n = d} a_{r_0, \ldots, r_n} x_0^{r_0} \cdots x_n^{r_n}.$$

Die Homogenität bleibt erhalten unter der Zerlegung in irreduzible Faktoren.

Lemma 2.3.5 *Ist P homogen und*

$$P(x_0,\ldots,x_n) = P_1(x_0,\ldots,x_n)\cdots P_\ell(x_0,\ldots,x_n)$$

eine Zerlegung von P in irreduzible Polynome, dann sind alle irreduziblen Faktoren auch homogen.

Beweis. Es reicht zu zeigen: Ist $P(x_0,\ldots,x_n) = Q(x_0,\ldots,x_n)R(x_0,\ldots,x_n)$ eine Zerlegung von P in zwei Faktoren, dann sind auch Q und R homogen.

Sei also $P = QR$ und $Q = Q_a + Q_{a+1} + \ldots + Q_b$ sowie $R = R_c + R_{c+1} + \ldots + R_d$, wobei die Q_j, R_ℓ homogene Polynome sind vom Grad j respektive ℓ. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an $Q_a, R_c \neq 0$ sowie $Q_b, R_d \neq 0$, wobei $b > a$ und $d \geq c$.

Das Produkt zweier homogener Polynome $Q_j R_\ell$ ist homogen vom Grad $r + \ell$. Da $P = QR$, folgt

$$P = QR = Q_a R_c + \sum_{b+d>e>a+c} \left(\sum_{j+\ell=e} Q_j R_\ell \right) + Q_b R_d.$$

Da P homogen ist und sowohl $Q_a R_c \neq 0$ als auch $Q_b R_d \neq 0$, bekommmt man einen Widerspruch. Es folgt also notwendigerweise $a = b$ und $c = d$, also Q und R sind wieder homogen. $\bullet$

Der Übergang von Polynomen auf homogene Polynome löst das Problem, dass $P(s) = P(s_0,\ldots,s_n)$ für $s \in \mathbb{P}^n$ und P keinen Sinn hat, nicht vollkommen, denn auch für P homogen ist der Wert $P(s_0,\ldots,s_n)$ nicht eindeutig bestimmt. Die einzige Ausnahme bildet der Wert 0, denn für P homogen und $s = [s_0,\ldots,s_n]$ gilt

$$P(s_0,\ldots,s_n) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda s_0,\ldots,\lambda s_n) = 0 \,\forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Somit kann man die Formulierung der Definition einer algebraischen Kurve in einem projektiven Raum direkt aus dem $\mathbb{C}^2$-Fall übernehmen:

2.3.3 Algebraische Kurven im $\mathbb{P}^2$

Definition 2.3.3 Sei $P(x, y, z)$ ein homogenes Polynom in $\mathbb{C}[x, y, z]$ ohne mehrfache Faktoren. Die *projektive komplexe algebraische Kurve* $\tilde{C}_P$ definiert durch $P(x, y, z)$ im $\mathbb{P}^2$ ist

$$\tilde{C} = \{[a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^2 \mid P(a_1, a_2, a_3) = 0\}.$$

Der *Grad* der projektiven Kurve ist der Grad des definierenden Polynoms. Man nennt die projektive Kurve *irreduzibel* wenn P irreduzibel ist. Eine irreduzible projektive Kurve $\tilde{D}_Q$ nennt man eine irreduzible Komponente einer projektiven Kurve $\tilde{C}_P$ wenn Q ein Teiler von P ist.

Sei $p = [a, b, c] \in \tilde{C}_P$ ein Punkt einer projektiven Kurve definiert durch ein homogenes Polynom $P(x, y, z)$ ohne mehrfache Faktoren. Mann nennt p einen *singulären Punkt* falls

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

Die Menge aller singulären Punkte bezeichnet man mit $\mathrm{Sing}(\tilde{C}_P)$. Man nennt die Kurve glatt wenn $\mathrm{Sing}(\tilde{C}_P) = \emptyset$.

Beispiel 2.3.1 (i) Die projektive Kurve definiert durch $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ist glatt, denn

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = 2a, \ \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = 2b, \ \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = -2c.$$

Alle drei Ableitungen verschwinden gleichzeitig nur wenn $a = b = c = 0$, aber dies ist kein Punkt im $\mathbb{P}^2$.

(ii) Die projektive Kurve definiert durch $P(x, y, z) = y^2 z - x^3$ hat in $[0, 0, 1]$ einen singulären Punkt:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = -3a^2, \ \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = 2bc, \ \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = b^2.$$

Alle drei Ableitungen verschwinden gleichzeitig nur wenn $a = b = 0$ ist, diese Bedingung erfüllt nur der Punkt $[0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$.

Lemma 2.3.6 *Eine projektive Kurve $\tilde{C}_P$ ist kompakt.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\tilde{C}_P \subseteq \mathbb{P}^2$ abgeschlossen ist. Aber dies ist äquivalent dazu, dass

$$\pi^{-1}(\tilde{C}_P) = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 - \{0\} \mid P(a, b, c) = 0\},$$

abgeschlossen ist, und das ist offensichtlich. •

Definition 2.3.4 Eine projektive Kurve, die durch ein lineare Gleichung definiert wird $L(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ (wobei nicht α, β, γ alle gleichzeitig gleich 0 sein können), nennt man eine *projective Gerade*.

Ist $\tilde{C}_P$ eine projektive Kurve definiert durch ein homogenes Polynom (ohne mehrfache Faktoren) und ist $p = [a, b, c] \in \tilde{C}_p$ ein glatter Punkt, dann nennt man die projektive Gerade definiert durch

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c)z = 0$$

die *Tangentialgerade* an $\tilde{C}_P$ in p.

Beispiel 2.3.2 Sei $L(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ (wobei nicht α, β, γ alle gleichzeitig gleich 0 sind). Dann gilt gilt für $p = (a, b, c) \in \tilde{C}_L$:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a, b, c) = \alpha, \ \frac{\partial L}{\partial y}(a, b, c) = \beta, \ \frac{\partial L}{\partial z}(a, b, c) = \gamma.$$

Die Gerade ist also glatt in jedem Punkt. Ist $p = (a, b, c)$, dann ist die Tangentialgerade durch den Punkt p definiert durch die lineare Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial L}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial L}{\partial z}(a, b, c)z = \alpha x + \beta y + \gamma z = L(x, y, z),$$

man erhält also, wie erwartet, die projektive Gerade als Tangentialgerade zurück.

2.3.4 Affine und projektive Kurven

Zur Erinnerung: Eine affine Kurve C_P im $\mathbb{C}^2$ ist gegeben durch ein Polynom (ohne mehrfache Faktoren) $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$:

$$C_P = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid P(a, b) = 0\},$$

eine projektive Kurve $\tilde{C}_Q$ im $\mathbb{P}^2$ ist gegeben durch ein homogenes Polynom (ohne mehrfache Faktoren) $Q(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$:

$$\tilde{C}_Q = \{[a, b, c]) \in \mathbb{P}^2 \mid Q(a, b, c) = 0\}.$$

Aus der Tatsache, dass affine Kurven nie, aber projektive Kurven immer kompakt sind, folgt: es handelt sich um unterschiedliche Objekte. Um zu sehen, wie die beiden doch zusammenhängen, betrachten wir zunächst die affine Kurve C_P vom Grad d, wobei

$$P(x,y) = \sum_{r+s\leq d} a_{r,s}x^r y^s.$$

Dieses Polynom ist nicht notwendigerweise homogen, aber man kann es homogenisieren. Sei

$$\tilde{P}(x,y,z) = \sum_{r+s\leq d} a_{r,s}x^r y^s z^{d-r-s}. \tag{2.2}$$

dann ist $\tilde{P}$ ein homogenes Polynom in $\mathbb{C}[x,y,z]$, und man bekommt P wieder zurück als

$$P(x,y) = \tilde{P}(x,y,1). \tag{2.3}$$

Ist nun $P(x,y) = Q(x,y)R(x,y)$ eine Zerlegung von P als ein Produkt von zwei nicht-konstanten Polynomen, so gilt $\tilde{P}(x,y,z) = \tilde{Q}(x,y,z)\tilde{R}(x,y,z)$. Und umgekehrt, hat man eine Zerlegung der Homogenisierung $\tilde{P}(x,y,z)$ als ein Produkt von homogenen, nicht-konstanten Polynomen: $\tilde{P}(x,y,z) = \tilde{Q}(x,y,z)\tilde{R}(x,y,z)$, so folgt

$$P(x,y) = \tilde{P}(x,y,1) = \tilde{Q}(x,y,1)\tilde{R}(x,y,1).$$

ist eine Zerlegung als ein Produkt von nicht-konstanten Polynomen.

Bemerkung 2.3.2 Man beachte, dass in der Vorschrift in (2.2) sichergestellt wird, dass die Homogenisierung $\tilde{P}(x,y,z)$ nicht durch z teilbar ist. Damit haben bei einer Zerlegung von $\tilde{P}(x,y,z) = \tilde{Q}(x,y,z)\tilde{R}(x,y,z)$ auch $\tilde{Q}(x,y,z)$ und $\tilde{R}(x,y,z)$ diese Eigenschaft. Insbesondere sind dann $\tilde{Q}(x,y,1)$ und $\tilde{R}(x,y,1)$ nicht konstante Polynome.

Zusammengefaßt liefert das Spiel von Homogenisierung (siehe (2.2)) und Dehomogenisierung (siehe (2.3)) also:

Lemma 2.3.7 *Die Abbildung $P(x,y) \mapsto \tilde{P}(x,y,z)$ induziert eine Bijektion zwischen den nicht-konstanten Polynomen ohne mehrfache Faktoren in $\mathbb{C}[x,y]$ und den nicht-konstanten homogenen Polynomen ohne mehrfache Faktoren in $\mathbb{C}[x,y,z]$, die nicht durch z teilbar sind.*

Um genau zu sehen, was geometrisch bei der Homogenisierung vorgeht, betrachten wir die offene Teilmenge (vergleiche (2.1))

$$U = \{u = [u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{P}^2 \mid u_3 \neq 0\}.$$

Diese offene Teilmenge ist homeomorph zum $\mathbb{C}^2$ (siehe Lemma 2.3.2), der Homeomorphismus ist gegeben durch $\mathbb{C}^2 \ni (u_1, u_2) \mapsto [u_1, u_2, 1] \in \mathbb{P}^2$. Mit dieser Identifizierung ist klar:

Lemma 2.3.8 *Sei $P(x, y)$ ein nicht-konstantes Polynom ohne mehrfache Faktoren und sei $\tilde{P}(x, y, z)$ die Homogenisierung. Dann gilt*

$$\tilde{C}_{\tilde{P}} \cap U = C_P.$$

Den $\mathbb{P}^2$ kann man auffassen als die disjunkte Vereinigung von $U \simeq \mathbb{C}^2$ und dem Komplement von U:

$$\mathcal{C}U := \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{P}^2 \mid u_3 = 0\} \simeq \mathbb{P}^1,$$

das man natürlich identifizieren kann mit einem $\mathbb{P}^1$. Dieser $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ wird die *Gerade im Unendlichen* genannt.

Es bleibt zu klären, welche zusätzlichen Punkte $p \in \mathcal{C}U$ man an die affine Kurve C_P ankleben muss um die projektive Kurve $\tilde{C}_{\tilde{P}}$ zu erhalten, oder, umgekehrt, was muss man weglassen um C_P aus $\tilde{C}_{\tilde{P}}$ zu erhalten.

Sei also $P(x, y) = \sum_{r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s$ ein nicht-konstantes Polynom vom Grad d, ohne mehrfache Faktoren, und sei $\tilde{P}(x, y, z)$ die Homogenisierung. Wir wollen den Schnitt von $\tilde{C}_{\tilde{P}}$ mit der Gerade im Unendlichen berechnen:

$$\tilde{C}_{\tilde{P}} \cap \mathbb{P}^1 = \{[u_1, u_2, 0] \in \mathbb{P}^2 \mid \sum_{r+s=d} a_{r,s} u_1^r u_2^s = 0\}$$

Zusammenfassend formuliert:

Lemma 2.3.9 *Sei $P_d(x, y) = \sum_{r+s=d} a_{r,s} x^r y^s$ der homogene Anteil von $P(x, y)$ von maximalen Grad d. Die Nullstellen dieses homogenen Polynoms im $\mathbb{P}^1$ enstsprechen genau den Punkten von $\tilde{C}_{\tilde{P}} - C_P$.*

Man kann also die zusätzlichen Punkte beim Übergang von C_P auf $\tilde{C}_{\tilde{P}}$ direkt von $P(x, y, z)$ ablesen. Homogene Polynome in zwei Variablen haben noch zusätzlich eine besonders einfache Struktur:

Lemma 2.3.10 *Sei* $P(x,y) = \sum_{r=0}^{d} a_r x^r y^{d-r} \in \mathbb{C}[x,y]$ *ein homogenes Polynom vom Grad* $d > 0$. *Dann zerfällt* $P(x,y)$ *in Linearfaktoren, d.h., es gibt komplexe Zahlen* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_d, \beta_d$, *so dass*

$$P(x,y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y) \cdots (\alpha_d x + \beta_d y).$$

Beweis. Schreiben wir $P(x,y)$ um als

$$y^d (\sum_{r=0}^{d} a_r \frac{x^r}{y^r}).$$

Sei e maximal, so dass $a_e \neq 0$. Dann kann man $\sum_{r=0}^{e} a_r \frac{x^r}{y^r}$ auffassen als ein Polynom in der Variablen $\frac{x}{y}$, es zerfällt daher über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, d.h., es gibt komplexe Zahlen γ_j, $j = 1, \ldots, e$, so dass

$$\sum_{r=0}^{e} a_r (\frac{x}{y})^r = a_e \prod_{i=0}^{e} (\frac{x}{y} - \gamma_i).$$

Aber damit folgt:

$$P(x,y) = a_e y^d \prod_{i=0}^{e} (\frac{x}{y} - \gamma_i) = a_e y^{d-e} \prod_{i=0}^{e} (x - \gamma_i y).$$

•

Zusammengefaßt erhalten wir also:

Sei $P(x,y) = \sum_{r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s$ ein nicht-konstantes Polynom vom Grad d, ohne mehrfache Faktoren, sei $\tilde{P}(x,y,z)$ die Homogenisierung und sei

$$P_d(x,y) = \sum_{r+s=d} a_{r,s} x^r y^s = (\alpha_1 x + \beta_1 y) \cdots (\alpha_d x + \beta_d y)$$

der homogene Anteil von $P(x,y)$ von maximalen Grad d. Die Geraden im $\mathbb{C}^2$ definiert durch die Gleichungen

$$g_i := \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha_i u_1 + \beta_i u_2\}$$

nennt man die *Asymptoten* an die affine Kurve C_P.

Lemma 2.3.11 *Die Asymptoten entsprechen genau den Punkten* $[-\beta_i, \alpha_i] \in \mathbb{P}^1$, *die man, wenn man den* $\mathbb{P}^1$ *identifiziert mit der Geraden im Unendlichen* $\{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{P}^2 \mid u_3 = 0\}$, *als Differenz von* $\tilde{C}_{\tilde{P}}$ *und* C_P *erhält.*

Beispiel 2.3.3 Sei $P(x,y) = x^2 - y^2 - 1$, sei $\tilde{P}(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$ die Homogenisierung und sei $P_2(x,y) = x^2 - y^2$ der homogene Anteil vom maximalen Grad (der hier $d = 2$ ist). Da $P_2(x,y) = (x-y)(x+y)$ ein Zerlegung in Linearfaktoren ist, folgt $\tilde{C}_{\tilde{P}} = C_P \cup [1,1,0] \cup [-1,1,0]$.

2.4 Das Theorem von Bézout

Gegeben zwei homogene Polynome $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$, so wissen wir, dass die zugehörigen projektiven Kurven $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ nicht nur aus der leeren Menge bestehen. Aber was ist mit $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$?

Theorem 2.4.1 *Seien $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ homogene Polynomen vom Grad n respektive m, ohne mehrfache Faktoren und ohne gemeinsamen Faktor. Seien $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ die zugehörigen projektiven Kurven im $\mathbb{P}^2$. Dann enthält der Schnitt der Kurven genau $n \cdot m$ Punkte, mit Multiplizität gezählt:*

$$\sum_{p \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q} I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = nm.$$

Bemerkung 2.4.1 Sei $Q(x,y,z)$ eine lineare Gleichung, d.h. $\tilde{C}_Q$ ist eine Hyperebene. Anders gesagt, $\tilde{C}_Q$ ist das Bild eines linearen Unterraums der Kodimension 1. Insbesondere, egal welche Koordinatenwahl man trifft, $Q(x,y,z)$ ist immer ein homogenes Polynom vom Grad 1. Man bekommt damit aus dem Theorem von Bézout eine neue Definition des Grads einer Kurve: Der Grad von $\tilde{C}_P$ ist die Anzahl der Punkte, mit Multiplizität gezählt, im Schnitt von $\tilde{C}_P$ mit einer Hyperebene.

Das Theorem wird offiziell das Theorem von Bézout genannt. Eigentlich geht das Resultat zurück auf Newton (1687), wo es aber recht "implizit" formuliert ist. Bézout hat das Resultat in der Form eines Theorems veröffentlicht, mit einem Beweis der aber nach heutigen Maßstäben recht lax respektive falsch ist. Zum Beispiel werden die Voraussetzungen, unter denen das Theorem gilt, nicht erwähnt.

Wir werden den Beweis in mehrere Schritte aufteilen. Zunächst kehren wir zurück zur Resultante von zwei Polynomen. Die ist zwar bisher nur formuliert für Polynome in einer Variablen, aber im Folgenden betrachten wir ein homogenes Polynom $P(x,y,z)$ in drei Variablen als ein Polynom in der Variablen x mit Koeffizienten im Polynomring $\mathbb{C}[y,z]$:

$$P(x,y,z) = \sum_{r+s+t=d} a_{r,s,t} x^r y^s z^t = \sum_{r=0}^{d} f_r(y,z) x^r.$$

In dieser Schreibweise ist klar, was die Resultante zweier homogener Polynome $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ sein soll: Die Einträge in die Sylvester-Matrix (siehe (1.5)) sind jetzt Polynome in den Variablen y und z, und die Resultante $Res(P,Q)(y,z)$, d.h. die Determinante der Sylvester-Matrix, ist jetzt ein Polynom im Polynomring $\mathbb{C}[y,z]$.

Beispiel 2.4.1 Sei $P(x,y,z) = yz + xy + xz + x^2$ und $Q(x,y,z) = y^2z + xyz + xz^2 + x^2y$, dann ist die Sylvester-Matrix in x eine 4×4-Matrix:

$$S(P,Q)(y,z) = \begin{pmatrix} 1 & y+z & yz & 0 \\ 0 & 1 & y+z & yz \\ y & yz+z^2 & y^2z & 0 \\ 0 & y & yz+z^2 & y^2z \end{pmatrix}$$

Lemma 2.4.1 *Seien $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ nicht-konstante homogene Polynome, so daß $P(1,0,0) \neq 0 \neq Q(1,0,0)$. Dann haben $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ einen gemeinsamen nicht-konstanten homogenen Teiler dann und nur dann wenn die Resultante $Res(P,Q)(y,z)$ das Nullpolynom ist.*

Bemerkung 2.4.2 Die Voraussetzung $P(1,0,0) \neq 0$ stellt sicher, dass das Polynom $P = \sum_{r=0}^{d} f_r(y,z)x^r$, gesehen als Polynom nur in der Variablen x, immer noch den gleichen Grad hat wie als homogenes Polynom, denn es folgt $f_d =$ konstantes Polynom $\neq 0$. Das gilt natürlich ebenso für $Q(x,y,z)$. Das ist keine große Einschränkung in der Anwendung. Zunächst teile man Q respektive P durch die maximal mögliche Potenz von z (das ergibt gegebenfalls schon mal gemeinsame nicht-konstante homogene Teiler). Sei $P_1(x,y)$ respektive $Q_1(x,y)$ die Summe der Summanden von P respektive Q, die keine positive Potenz von z enthalten. Diese Polynome sind homogen, von gleichen Grad wie P und Q, und beide zerfallen gemäß Lemma 2.3.10 in ein Produkt von Linearfaktoren. Indem man, falls nötig, neue x & y Koordinaten wählt, kann man sicherstellen, das in jedem der Linearfaktoren der Koeffizient von x ungleich null ist. Damit ist sichergestellt, dass der Koeffizient von $x^{\deg P}$ in $P(x,y,z)$ respektive $x^{\deg Q}$ in $Q(x,y,z)$ eine komplexe Zahl verschieden von null ist, und somit $P(1,0,0) \neq 0 \neq Q(1,0,0)$.

Beweis. Betrachten wir die Polynome zunächst als Elemente in $\mathbb{C}(y,z)[x]$. Aus Proposition 1.4.1 und Bemerkung 1.4.1 folgt, dass $Res(P,Q)(y,z)$ identisch verschwindet dann und nur dann wenn $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ einen gemeinsamen Teiler in $\mathbb{C}(y,z)[x]$ haben.

Dies ist noch nicht ganz die Antwort, die wir brauchen. Jetzt kommt wieder die Voraussetzung $P(1,0,0) \neq 0 \neq Q(1,0,0)$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $P(1,0,0) = 1 = Q(1,0,0)$. Es folgt: $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ sind, als Polynome in der Variablen x mit Koeffizienten in $\mathbb{C}[y,z]$, nomiert, d.h. der Leitkoeffizient ist gleich eins. Also sind sie insbesondere primitiv. Aus dem Lemma von Gauß folgt: ein primitives Polynom ist irreduzibel in $(\mathbb{C}[y,z])[x]$ dann und nur dann es irreduzibel ist in $\mathbb{C}(y,z)[x]$. $\bullet$

Aus Proposition 1.4.2 folgt für drei Polynome $P(x), Q(x), R(x)$, das

$$Res(P, QR) = Res(P,Q)Res(P,R).$$

Lemma 2.4.2 *Es gilt $Res(P,QR)(y,z) = Res(P,Q)(y,z)Res(P,R)(y,z)$ auch für homogene Polynome $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.*

Beweis. Es gilt offensichtlich (Proposition 1.4.2) für alle $b, c \in \mathbb{C}$:

$$Res(P,QR)(b,c) = Res(P,Q)(b,c)Res(P,R)(b,c),$$

und damit gilt die Identät auch für die Polynome. $\bullet$

Lemma 2.4.3 *Seien $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ homogene Polynome vom Grad n respektive Grad m. Dann ist die Resultante $Res(P,Q)(y,z)$ ein homogenes Polynom in $\mathbb{C}[y,z]$ vom Grad nm.*

Beweis. Sei $S(P,Q)(y,z) = (r_{i,j})$ die Sylvester-Matrix. Dann ist $r_{i,j}(y,z)$ ein homogenes Polynom in y und z von Grad $d_{i,j}$, wobei

$$d_{i,j} = \begin{cases} j-i & \text{für } 1 \leq i \leq m \\ j-(i-m) & \text{für } m+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

Dann ist $Res(P,Q)(y,z)$ eine Summe von Termen der Form

$$\pm \prod r_{i\sigma(i)}(y,z)$$

wobei σ über die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, m+n\}$ läuft. Als Produkt von homogenen Polynomen ist jeder Term wieder homogen, und zwar von Grad

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n+m} d_{i,\sigma(i)} &= \textstyle\sum_{i=1}^{m}(\sigma(i)-i) + \sum_{i=m+1}^{n+m}(\sigma(i)-(i-m)) \\ &= nm - \textstyle\sum_{i=1}^{n+m} i + \sum_{i=1}^{n+m}\sigma(i) \\ &= nm. \end{aligned}$$

•

Theorem 2.4.2 *Zwei projektive Kurven im $\mathbb{P}^2$ treffen sich immer in mindestens einem Punkt.*

Beweis. Seien $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ homogene Polynome vom Grad n respektive Grad m, ohne mehrfache Faktoren, und seien $\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q \subset \mathbb{P}^2$ die zugehörigen projektiven Kurven. Die Resultante $Res(P,Q)(y,z)$ ist ein homogenes Polynom in y, z vom Grad nm (Lemma 2.4.3). Ist es nicht das Nullpolynom, so kann man es zerlegen als ein Produkt von Linearfaktoren (Lemma 2.3.10). In beiden Fällen kann man $(b,c) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ finden, so daß $Res(P,Q)(b,c) = 0$. Das bedeutet aber, daß $P(x,b,c)$ und $Q(x,b,c)$ eine gemeinsame Nullstelle haben, also gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $P(a,b,c) = 0 = Q(a,b,c)$, und somit $[a,b,c] \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$. •

Theorem 2.4.3 (Schwache Version von Bézouts Theorem) *Zwei projektive Kurven im $\mathbb{P}^2$, die keine gemeinsame Komponente haben, treffen sich in höchstens $n \cdot m$ Punkten.*

Beweis. Seien $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ homogene Polynome vom Grad n respektive Grad m, ohne mehrfache Faktoren und ohne gemeinsame Faktoren, und seien $\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q \subset \mathbb{P}^2$ die zugehörigen projektiven Kurven.

Angenommen $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ enthält mehr als nm verschiedene Punkte, sei S eine $nm+1$-elementige Teilmenge davon. Dann kann man einen Punkt $p \in \mathbb{P}^2$ wählen, der folgende Eigenschaften hat. Er liegt weder auf $\tilde{C}_P$ noch auf $\tilde{C}_Q$ noch auf einer der Geraden, die durch zwei verschiedene Punkte in in S gehen. Nach einer projektiven Transformation (Koordinatenwahl) kann man annehmen, daß $p = [1,0,0]$.

Da somit $P(1,0,0) \neq 0 \neq Q(1,0,0)$, folgt aus Lemma 2.4.1: die Resultante $Res(P,Q)(y,z)$ ist nicht das Nullpolynom, und aus Lemma 2.4.3 folgt damit: $Res(P,Q)(y,z)$ ist ein homogenes Polynom in y, z vom Grad

nm. Aus Lemma 2.3.10 folgt, dass man die Resultante zerlegen kann in Linearfaktoren, d.h. $Res(P,Q)(y,z)$ ist ein Produkt von Faktoren den Form $(bz - cy)$ mit $(b,c) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Man beachte: gegeben $(b,c) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$, dann ist $(bz - cy)$ ein Teiler von $Res(P,Q)(y,z)$ dann und nur dann wenn die Resultante von $P(x,b,c)$ und $Q(x,b,c)$ in x verschwindet, also $P(x,b,c)$ und $Q(x,b,c)$ eine gemeinsame Nullstelle $x = a$ haben.

Also wenn $p = [a,b,c] \in S$, dann gilt $P(a,b,c) = 0 = Q(a,b,c)$, und b und c sind nicht gleichzeitig gleich 0 da $[1,0,0] \notin S$. Also ist $(bz - cy)$ ein Faktor von $Res(P,Q)(y,z)$. Weiter beachte: wenn $[a,b,c]$ und $[\alpha,\beta,\gamma]$ beide in S liegen aber verschieden sind, dann ist $(bz - cy)$ nicht ein skalares Vielfaches von $(\beta z - \gamma y)$, denn sonst würden $[a,b,c]$, $[\alpha,\beta,\gamma]$ und $[1,0,0]$ alle auf der projektiven Geraden definiert durch $bz = cy$ liegen, was der Annahme über $[1,0,0]$ widerspricht. Enthielte also $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ mehr als nm verschiedene Punkte, so hätte $Res(P,Q)(y,z)$ mehr als mn lineare Faktoren, im Widerspruch zum Grad mn von $Res(P,Q)(y,z)$. •

Es bleibt die Schnittmultiplizität $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ zu erklären, damit man den Beweis der starken Version von Bézouts Theorem angehen kann.

Theorem 2.4.4 *Es gibt eine eindeutige Schnittmultiplizität $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$, die für alle $p \in \mathbb{P}^2$ und auf allen projektiven Kurven $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ definiert ist und die folgenden sechs Eigenschaften hat:*

(i) $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = I_p(\tilde{C}_Q, \tilde{C}_P)$

(ii) $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = \infty$ *wenn p auf einer gemeinsamen Komponente von $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ liegt, und sonst in $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ eine nicht-negative ganze Zahl.*

(iii) $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = 0 \Leftrightarrow p \notin \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$.

(iv) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich mit Schnittmultiplizität 1 in ihrem einzigen Schnittpunkt.

(v) Wenn $\tilde{C}_P$, $\tilde{C}_Q$ definiert sind durch homogene Polynome $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$, und $\tilde{C}_R$ ist definiert durch das homogene Polynome

$$R(x,y,z) = P(x,y,z)Q(x,y,z),$$

dann gilt für alle projektiven Kurven $\tilde{C}_D$

$$I_p(\tilde{C}_R, \tilde{C}_D) = I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_D) + I_p(\tilde{C}_Q, \tilde{C}_D).$$

(vi) *Wenn $\tilde{C}_P$, $\tilde{C}_Q$ definiert sind durch homogene Polynome $P(x, y, z)$ und $Q(x, y, z)$ vom Grad n respektive m, und $\tilde{C}_F$ ist definiert durch $F = PR + Q$, wobei $R(x, y, z)$ homogen ist vom Grad $m - n$, dann gilt*

$$I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_F).$$

Wenn zusätzlich $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ keine gemeinsame Komponente haben und man die projektiven Koordinaten so wählt, dass die Bedingungen

(a) $[1, 0, 0] \notin \tilde{C}_P \cup \tilde{C}_Q$;

(b) $[1, 0, 0]$ *liegt auf keiner Geraden, die zwei verschieden Punkte von $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ enthält;*

(c) $[1, 0, 0]$ *liegt auf keiner Tangentengerade an $\tilde{C}_P$ oder $\tilde{C}_Q$ für einen Punkt in $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$;*

erfüllt sind, dann ist die Schnittmultiplizität $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ von jedem Punkt $p = [a, b, c] \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ die größte Zahl k, so daß $(bz - cy)^k$ ein Teiler von $Res(P, Q)(y, z)$ ist.

Beweis. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass die Vorschriften *i)–vi)* die Schnittmultiplizit $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ eindeutig festlegen. Im zweiten Schritt zeigen wir die Existenz.

Die Vorschriften (ausser in *vi)*) sind unabhängig von der Wahl der Koordinaten, wir nehmen also ohne Einschränkung an: $p = [0, 0, 1] \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$. Wegen *i)* und *v)* können wir annehmen P und Q sind irreduzibel. Wegen *ii)* ist $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ endlich, und wegen *iii)* ist $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = k > 0$. Wir machen nun weiter per Induktion über k und nehmen an, dass für Schnittmultiplizitäten kleiner als k die Vorschriften ausreichend sind um diese eindeutig zu berechnen.

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir im Folgenden oft NUR $I_p(P, Q)$ STATT $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$.

Betrachte zunächst die Polynome in einer Variablen x: $P(x, 0, 1)$ und $Q(x, 0, 1)$, sie seien vom Grad r respektive s. Wegen i) können wir ohne Einschränkung annehmen: $r \leq s$.

Fall 1: $r = 0$**.** In diesem Fall ist $P(x, 0, 1)$ ein konstantes Polynom. Da $P(0, 0, 1) = 0$ nach Annahme, folgt $P(x, 0, 1) = 0$. Da $P(x, y, z)$ homogen ist, folgt damit sogar $P(x, 0, z) = 0$, denn $P(x, 0, z)$ ist die (x, z)-Homogenisierung von $P(x, 0, 1)$. Es folgt: alle Summanden von $P(x, y, z)$

sind durch y teilbar und somit $P(x,y,z) = yR(x,y,z)$ für ein homogenes Polynom $R(x,y,z)$. Weiterhin kann man $Q(x,y,z)$ umschreiben in

$$Q(x,y,z) = Q(x,0,z) + yS(x,y,z) = x^q T(x,z) + yS(x,y,z),$$

wobei $T(0,1) \neq 0$ und $q > 0$ angenommen werden kann (man zieht die maximale Potenz von x aus der Summe, und da $Q(0,0,1) = 0$ ist, kann in $Q(x,0,z)$ keine reine z-Potenz auftauchen).

Die Bedingung $T(0,1) \neq 0$ bedeutet $p = [0,0,1]$ liegt nicht auf dem Schnitt der Kurven $T(x,z) = 0$ und $y = 0$, und somit erhält man wegen *iii)*

$$I_p(y, T(x,z)) = 0,$$

und *iv)* impliziert: $I_p(x,y) = 1$. Das ergibt dank *v)*:

$$I_p(P,Q) = I_p(R,Q) + I_p(y,Q),$$

und aus *vi)* erhält man $I_p(y,Q) = I_p(y, x^q T(x,z))$. Indem man mehrfach *i),iv)* und *v)* anwendet bekommt man

$$I_p(y, x^q T(x,z)) = qI_p(y,x) + I_p(y, T(x,z)) = q$$

und damit

$$I_p(P,Q) = I_p(R,Q) + q.$$

Da $q > 0$, folgt die Schnittmultiplizität $I_p(R,Q)$ ist kleiner als k und damit eindeutig durch die Regeln *i)–vi)* festgelegt.

Fall 2: $r > 0$**.** Da sich die Kurven nicht ändern wenn man das definierende Polynom mit einem Skalar verschieden von Null multipliziert, nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an: $P(x,0,1)$ und $Q(x,0,1)$ haben als Leitkoeffizienten eine 1. Seien n respektive m die Grade von P respektive Q, und setze

$$S(x,y,z) := z^{n+s-r} Q(x,y,z) - x^{s-r} z^m P(x,y,z).$$

Die Polynome P und Q sind irreduzibel und verschieden, daher ist $S(x,y,z)$ sicher nicht das Nullpolynom. Nach Konstruktion ist dieses Polynom homogen in x,y,z, und das Polynom

$$S(x,0,1) = Q(x,0,1) - x^{s-r} P(x,0,1)$$

ist ein Polynom in der Variablen x vom Grad t, wobei $t < s$. Aus *i)*, *v)* und *vi)* folgt weiter

$$I_p(P,S) = I_p(P, z^{n+s-r}Q) = I_p(P,Q)$$

Nun ersetze P und Q durch P und S (respektive durch S und P falls $t < r$). Beachte, dass $\deg P(x,0,1) + \deg S(x,0,1) < \deg P(x,0,1) + \deg Q(x,0,1)$. Indem man diesen Prozess mehrfach wiederholt, gelangt man endlich vielen Schritten zu einer Situation wie im Fall 1.

Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt, es bleibt die Existenz zu zeigen. Wir definieren $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ wie folgt:

- Wenn p auf einer gemeinsamen Komponente von $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ liegt, dann sei $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = \infty$.
- $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = 0$ falls $p \notin \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$.
- Wenn $p \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$, aber nicht in einer gemeinsamen Komponente von $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ liegt, dann entferne zunächst alle gemeinsamen Komponenten und wähle Koordinaten, so daß die Bedingungen *a)–c)* erüllt sind. Sei $p = [a,b,c]$ in diesen Koordinaten. Dann definieren wir als $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q)$ die größte Zahl k, so daß $(bz - cy)^k$ die Resultante $Res_{P,Q}(y,z)$ teilt.

Es bleibt zu zeigen, dass diese so definierte Abbildung die Bedingungen *i)–vi)* erfüllt.

Da die Determinante einer Matrix sich nicht ändert bis auf Vorzeichen, folgt die Symmetrie in *i)* aus $Res_{P,Q}(y,z) = \pm Res_{Q,P}(y,z)$.

Die Eigenschaft *ii)* und *iii)* folgen aus der Definition und Lemma 2.4.1. Entweder haben wir $p \notin \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ und damit $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = 0$, oder $p \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$, dann sind gemäß Definition die Koordinaten so gewählt, dass die Voraussetzungen für Lemma 2.4.1 erfüllt sind. Da alle gemeinsamen Faktoren entfernt worden sind folgt $Res_{P,Q}(y,z)$ ist nicht das Nullpolynom. Also ist $Res_{P,Q}(y,z) = \prod_j(\alpha_j y + \beta_j z)$ ein Produkt von Linearfaktoren (Lemma 2.3.10). Da $p \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$, haben die Polynome $P(x,b,c)$ und $Q(x,b,c)$ eine gemeinsame Wurzel: $x = a$, also gilt $Res_{P,Q}(b,c) = 0$. Damit folgt $(bz - cy)$ ist ein Teiler von $Res_{P,Q}(y,z)$, also $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) > 0$.

Um *iv)* zu zeigen, seien $P(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ sowie $Q(x,y,z) = \tau x + \delta y + \mu z$. Die beiden Vektoren (α, β, γ) und (τ, δ, μ) sind linear unabhängig im $\mathbb{C}^3$ da nach Annahme $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ verschieden sind. Wir können die Koordinaten also so wählen, dass $P(x,y,z) = x$ und $Q(x,y,z) = x + y$. Somit ist $p = [0,0,1] = \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$. Es folgt: *a)* $[1,0,0] \notin \tilde{C}_P \cup \tilde{C}_Q$, *b)* ist sowieso erfüllt, da der Schnitt nur einen Punkt enthält, und *c)* ist erfüllt wegen *b)*, weil in diesem Fall die Tangentengeraden mit den ursprünglichen Kurven übereinstimmen. Für die Sylvester-Matrix und die Resultante erhalten wir dann

$$S(P,Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix}, \quad Res(P,Q)(y,z) = y,$$

und damit 1 ist die größte Zahl k, so daß $(-y)^k$ die Resultante $Res(P,Q)(y,z)$ teilt. Es folgt: $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = 1$.

Die Eigenschaft *v)* folgt direkt aus Lemma 2.4.2, es bleibt noch *vi)* zu zeigen. Auch diese Eigenschaft folgt wieder aus dem Determinantenkalkül. Doch zunächst beachte: Es gilt $p \notin \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ dann und nur dann wenn $p \notin \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_{PR+Q}$, und p liegt in einer gemeinsamen Komponente von $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_Q$ dann und nur dann wenn p in einer gemeinsamen Komponente von $\tilde{C}_P$ und $\tilde{C}_{PR+Q}$ liegt. In diesen Fällen gilt also $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_{PR+Q}) = 0$ respektive ∞. Im verbleibenden Fall wird die Schnittmultiplizität über die Resultante ausgerechnet. Sei $S(P,Q) = (k_{i,j})$ die Sylvester-Matrix zu $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$, und sei $S(P,PR+Q) = (\ell_{i,j})$ die Sylvester-Matrix zu $P(x,y,z)$ und dem Polynom $P(x,y,z)R(x,y,z) + Q(x,y,z)$. Seien n und m der Grad der Polynome P und Q. Zur Erinnerung, wir können annehmen, $P(x,y,z)$ und $Q(x,y,z)$ haben keinen gemeinsamen Teiler, also $P(x,y,z)R(x,y,z) + Q(x,y,z)$ ist nicht das Nullpolynom. Es ist daher ein homogenes Polynom vom Grad m.

Die Sylvester-Matrizen $S(P,Q)$ und $S(P,PR+Q)$ haben nach Konstruktion die gleichen ersten m Zeilen. Und verbleibenden n Zeilen von $S(P,PR+Q)$ erhält man aus denen von $S(P,Q)$, indem man jeweils ein Vielfaches (die Multiplikatoren sind homogene Polynome in y und z!) der ersten m Zeilen zu einer der unteren n Zeilen dazu addiert. Aber das Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert der Wert der Determinante nicht. Somit gilt:

$$\begin{aligned} Res(P,Q)(y,z) = \det S(P,Q)(y,z) &= \det(k_{i,j}) \\ &= \det(\ell_{i,j}) \\ &= \det S(P,PR+Q)(y,z) \\ &= Res(P,PR+Q)(y,z). \end{aligned}$$

•

Nun kommen wir zum Beweis des Theorems von Bézout:

Beweis. Da der Schnitt $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ nur endlich viele Punkte enthält, können wir Koordinaten wählen, so daß die Bedingungen *a)– c)* von Theorem 2.4.4 für alle Punkte in $\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$ erfüllt sind. Aus Lemma 2.4.1 und Lemma 2.4.3 folgt, dass $Res(P, Q)$ ein homogenes Polynom in y, z ist, es ist nicht das Nullpolynom und es ist vom Grad nm. Dann können wir es schreiben als ein Produkt von Linearfaktoren (Lemma 2.3.10):

$$Res(P, Q)(x, y) = \prod_{j=1}^{k} (c_i z - b_i y)^{e_i},$$

wobei die $e_j > 0$ positive Zahlen sind, $\sum_{j=1}^{k} e_j = nm$, und (b_i, c_i) ist kein skalares Vielfaches von (b_j, c_j) für $i \neq j$.

Wir haben bereits gesehen (Beweis Theorem 2.4.4): wenn $p = (a, b, c) \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q$, dann ist $(bz - cy)$ ein Teiler von $Res(P, Q)(x, y)$. Andererseits, wenn man einen Teiler $(bz - cy)$ von $Res(P, Q)(x, y)$ hat, dann bedeutet es dass die Resultante von $P(x, b, c)$ und $Q(x, b, c)$ verschwindet, die Polynome $P(x, b, c)$ und $Q(x, b, c)$ haben also eine gemeinsame Nullstelle und es gibt ein $a \in \mathbb{C}$, so daß $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$. Damit folgt:

$$\sum_{p \in \tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q} I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) = \sum_{j=1}^{k} e_j = mn.$$

•

Chapter 3

Newton Verfahren

3.1 Der eindimensionale Fall

Die nächste Frage ist: Wie findet man die Nullstellen? Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall und das Newton Verfahren.

Netwon: In der *Epistola prior* (1676) beschreibt Newton sein Verfahren am Beispiel der reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0. \tag{3.1}$$

Er schlägt $x = 2$ vor als eine Annäherung an die Wurzel. Allerdings ist $x = 2$ keine Lösung, und substituiert $x = 2 + p$ in die Gleichung. und erhält als neue Bedingung dann für p: $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Er vernachlässigt die nicht linearen Terme "*on account of their smallness*", was übrig bleibt ist die lineare Bedingung $10p - 1 = 0$. Also haben wir $p = \frac{1}{10}$, und Newtons neue Annäherung an die Lösung ist $x = 2+p = 2+0.1$. Wiederum ist $x = 2.1$ keine Wurzel, er wiederholt die Prozedur. Jetzt substituiert er p durch $p = 0.1 + q$ in die Gleichung für p, die ergibt $q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$. Wieder vernachlässigt er die nicht linearen Terme und erhält als lineare Gleichung $11.23q + 0.061 = 0$. Damit ist $q = -0.061/11.23 = -0.0054$, und Newtons Annäherung für die Wurzel ist $y = 2 + 0.1 - 0.0054$. Das Verfahren wird jetzt wieder auf q angewendet, und man ersetzt q durch $q = -0.0054 + r$ in der Gleichung für q, vernachlässigt die die nicht-linearen Terme, und bekommt $r = -0.00004852$. Man hat also relativ schnell eine Annäherung der Nullstelle als $x_0 = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004852 = 2.09455148$ (aber man könnte auch weitermachen...). So praktisch diese rekursive Methode für "*händisches*" Rechnen ist, sie ist nicht iterativ, in jedem Schritt benützt man eine neue Gleichung: aus der Gleichung von x gewinnt man die für p, aus der für p die für q, aus der ....

Raphson: Im Jahre 1690 kam ein neuer Vorschlag von Raphson, der in seinem Artikel den Namen Newton nirgendwo erwähnt. Sein Vorschlag würde in diesem Beispiel ergeben: Man started mit 2, substituiert 2 durch $2+p$ in (3.1), erhält durch vernachlässigen der nicht-linearen Terme $p = 0.1$. Aber im nächsten Schritt ersetzt man nun x durch $2.1 + q$ wieder in (3.1):

$$\begin{aligned}(2.1+q)^3 - 2(2.1+q) - 5 &= 9,261 + 13,23q + 6,3q^2 + q^3 - 4,2 - 2q - 5 \\ &= q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061\end{aligned}$$

man erhält also dieselbe Gleichung für q wie Newton. Dann benutzt man dieses neue $q = -0.0054$ und substituiert x durch $2 + 0.1 - 0.0054 + r = 2.0946 + r$ in (3.1), und erhält so eine Gleichung für r, betrachtet nur den linearen Teil und so weiter.

Es sollte an dem Beispiel klar geworden sein, dass die beiden Methoden algebraisch vollkommen äquivalent sind. Mehr findet man in dem Artikel *Newton's Method for Resolving Affected Equations* von *Chris Christensen*.

Ich habe beide Ansätze hier vorgeführt, weil viele mit dem Newton Verfahren im eindimensionalen Fall vertraut sind. Das Newton Verfahren im zweidimensionalen Fall versteht man besser wenn man den ursprünglichen Ansatz von Newton kennt. Der Bezug zu dem, was man heute üblicherweise als Newton Methode bezeichnet, wird besser klar durch Raphsons Darstellung:

Gegeben sei eine stetig differenzierbare reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das Newton Verfahren ist definiert wie folgt. Man started mit einem Ansatz s_0, so dass $f(s_0)$ fast gleich Null ist, und definiert rekursiv eine Folge

$$s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}.$$

Wenn s_0 gut gewählt ist, dann konvergiert diese Folge gegen eine Nullstelle von f.

Übung 3.1.1 Zeigen Sie, dass im Fall von Polynomen die oben definierte Folge die gleiche ist wie die mit der von Raphson definierte Methode. (Benutzen Sie zum Beispiel die Taylorentwicklung).

Beispiel 3.1.1 Als Beispiel sei hier $P(x) = x^2 - a$ angeführt, dann gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}).$$

Man kann zeigen, dass das Verfahren konvergiert für all $a \geq 0$ und beliebigem Anfangswert $x_0 \neq 0$.

Das Verfahren funktioniert genauso im komplexen Fall. Gegeben ein komplexes Polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, so nennt man die Abbildung

$$N_P(x) : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \quad x \mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)},$$

die zu $P(x)$ assoziierte Newton Abbildung. Wenn die Folge

$$x_0, x_1 = N_P(x_0), x_2 = N_P(x_1), x_3 = N_P(x_2), \ldots$$

gegen eine Wurzel ξ von $P(x)$ konvergiert, dann sagt man x_0 liegt im Becken von ξ. Die Frage ist: wie findet man Punkte, die in dem Becken einer Wurzel liegen? Das Newton Verfahren ist zwar ziemlich alt, aber es gibt immer wieder etwas neues über dieses Verfahren zu berichten. Das folgende Theorem liefert *universelle Startpunkte* für das Newton Verfahren. Man findet das Theorem (und den Beweis dazu) in einem Artikel von Hubbard, Schleicher, Sutherland, publiziert in **2001** in *Inventiones Mathematicae*.

Theorem 3.1.1 *Sei $\mathcal{P}_d$ die Menge aller Polynome vom Grad d in $\mathbb{C}[x]$, deren Nullstellen im Einheitskreis liegen. Für jedes $d \geq 2$ gibt es eine Menge $\mathcal{S}_d$, welche aus höchstens $1.11 d \log^2 d$ Punkten besteht, so daß für jedes Polynom $P(x) \in \mathcal{P}_d$ und jedem seiner Wurzeln ξ es mindestens einen Punkt in $\mathcal{S}_d$ gibt, der im Becken von ξ liegt.*

3.2 Der zweidimensionale Fall und Puiseux Reihen

3.2.1 Einleitung

Gegeben sei eine affine algebraische Kurve $C \subset \mathbb{C}^2$ durch die Gleichung $P(x, y) = 0$. Wie findet man nun die Kurve? Wie beschreibt man sie?

Wenn man einen genügend schönen Punkt x_0 in der Kurve hat, so weiß man dank des Theorems über implizite Funktionen, dass man zumindest lokal eine Funktion $g(x)$ findet, so dass die Kurve durch $y = g(x)$ in einer Umgebung von x_0 beschrieben wird, d.h. $P(x, g(x)) = 0$ für Elemente in einer Umgebung von x_0. Die Frage ist: Wie berechnet man g überhaupt, und was macht man wenn die Voraussetzungen des Theorems über implizite Funktionen nicht erfüllt sind?

Im Folgenden setzen wir immer voraus: $P(0,0) = 0$, notfalls macht man eine Koordinatentransformation. Oft kann man Überlegungen reduzieren auf den Fall, dass $P(x,y)$ irreduzibel ist, denn Lösungen $g_1(x), g_2(x)$ mit $P_i(x, g_i(x)) = 0$ sind auch Lösungen für $P(x,y) = P_1(x,y)P_2(x,y)$.

Um die Strategie zu erläutern, schauen wir uns ein Beispiel an: Sei gegeben die Gleichung

$$y^3 + x + xy + y + x^3 = 0, \tag{3.2}$$

Die Idee von Newton ist es die Variable y als eine Potenzreihe in x darzustellen.

Im eindimensionalen Fall sortieren wir die Monome nach den Potenzen von x, aber hier haben wir zwei Variablen. Man kann sie dann zum Beispiel nach dem Totalgrad sortieren:

$$P(x,y) = (x + y) + xy + (y^3 + x^3). \tag{3.3}$$

Der Anfang ist wie im eindimensionalen Fall. Wir vergessen die Terme vom höheren Grad und suchen eine Lösung der vereinfachten Gleichung $x + y = 0$. Das ist in diesem Fall einfach, es ist $y = -x$. Dies ist keine Lösung ist für $P(x,y) = 0$, die erhaltene Funktion ist nur eine Approximation und muss verbessert werden. Der Ansatz: die Lösung ist

$$\begin{aligned} y &= -x + \text{Terme höherer Ordnung} \\ &= -x(1 + y_1) \end{aligned}$$

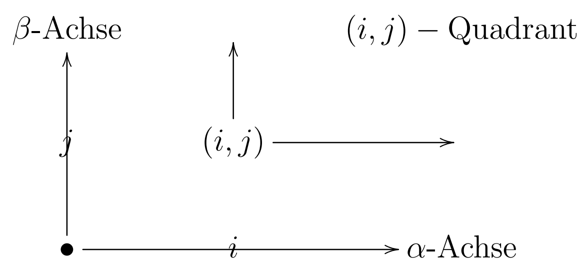
Substituiert man entsprechend in $P(x,y)$, so erhält man

$$\begin{aligned} P(x, -x(1+y_1)) &= (x + (-x(1+y_1)) + x(-x(1+y_1)) \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +((-x(1+y_1))^3 + x^3) \\ &= -xy_1 - x^2(1+y_1) - x^3((1+y_1)^3 - 1) \\ &= -x(y_1 + x(1+y_1) + x^2(3y_1 + 3y_1^2 + y_1^3)) \\ &= -xP_1(x, y_1). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Korrektur erhält man somit als Lösung der Gleichung $P_1(x, y_1) = 0$. Will man analog zum eindimensionalen Fall weiterrechnen, so löscht man alle Terme von “hohem Grad” und nimmt als nächsten Schritt zu einer Verbesserung die Lösung der verbliebenen “einfacheren” Gleichung. Also ist die nächte Frage: Was soll genau der Grad sein? Welcher Begriff ist gut für weitere Rechnungen? Im ersten Schritt hat man eigentlich vollständig unbegründet den totalen homogenen Grad benutzt, aber es gibt viele andere Möglichkeiten, wie wir jetzt sehen werden.

3.2.2 Newton Polygon

Newton führte dazu das Newton Polygon ein. Startet man mit einem Polynom in zwei Variablen $P(x, y) = \sum_{i,j} c_{i,j} x^i y^j$ wie zum Beispiel in (3.2) und (3.4), so nennt man einen Punkt (i, j) ein Element im Träger des Polynoms falls das Monom $x^i y^j$ mit einem Koeffizienten $c_{i,j} \neq 0$ in der Summe auftaucht. Nennen wir den Träger $\Delta(P)$. Jeder Punkt im Träger liefert einen Punkt mit Koordinaten (i, j) im $\mathbb{R}^2$. Um diese Koordinaten nicht mit den Variablen x, y zu vermischen, nennen wir i die α-Koordinate und j die β-Koordinate:



Der zu (i, j) zugehörige Quadrant besteht aus allen Punkten im $\mathbb{R}^2$, deren α-Koordintate größer gleich i und deren β-Koordinate größer gleich j ist.

Da wir angenommen haben $P(x, y)$ ist irreduzibel, liegt mindestens ein Punkt auf der x-Achse und ein Punkt auf der y-Achse, und $(0, 0)$ liegt nicht im Träger da $P(x, y) = 0$.

Wir betrachten die konvexe Hülle aller (i, j)-Quadranten

$$convex\Big(\bigcup_{(i,j)\in\Delta(P)} (i, j) - \text{Quadranten}\Big),$$

dann ist der Rand davon ein polygonaler Weg mit zwei unendlichen Teilen: der eine ist ein Teil der α-Achse, der andere ist Teil der β-Achse. Der mittlere kompakte Teil wird das *Newton Polygon* zu $P(x, y)$ genannt. Man beachte, dass alle linearen Teilstücke des Polygons eine negative Steigung haben.

Beispiel 3.2.1 Sei $P(x, y) = x^p - y^q$. Dann besteht das Newton Polygon nur aus der Strecke, die die Punkte $(0, q)$ und $(p, 0)$ miteinander verbindet. Diese Strecke ist ein Abschnitt der affinen Geraden mit der Gleichung $\alpha + \frac{p}{q}\beta = p$, die Gerade hat also die Steigung $-\frac{q}{p}$. Man beachte: Die Lösungen der Gleichung $P(x, y) = 0$ sind von der Form $y = x^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln(x)}$.

Man kann sowieso nicht erwarten, nur Polynome wieder als mögliche Lösungen angeboten zu bekommen. Das Beispiel zeigt, dass man auch Reihen mit rationalen Exponenten erwarten muß.

Beispiel 3.2.2 Sei $P(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 + x^6$. Das Newton Polygon besteht aus der Strecke, die die Punkte $(0, 4)$ und $(6, 0)$ miteinander verbindet, die affine Gerade hat die Steigung $-\frac{3}{2}$. Um eine Lösung zu finden, machen wir den Ansatz $y = tx^{\frac{3}{2}}$, einsetzen in $P(x, y)$ ergibt:

$$P(x, tx^{\frac{3}{2}}) = x^6(t^4 - 2t^2 + 1)$$

Jede Nullstelle des Polynoms $g(t) = (t^4 - 2t^2 + 1)$ gibt eine Lösung des Problems. Da $g(t) = (t^2 - 1)^2$ erhält man zwei Lösungen: $y = x^{\frac{3}{2}}$ und $y = -x^{\frac{3}{2}}$.

Beispiel 3.2.3 Sei $P(x, y)$ so, dass der Träger vollständig auf einem Geradenabschnitt liegt, die Gleichung der affinen Geraden sei $\alpha + \mu\beta = \nu$, wobei wieder α, β die Koordinaten sind und μ, ν sind fest gewählt. Ein solches Polynom nennt man *quasi-homogen* bezüglich μ und ν. Wir können also schreiben:

$$P(x, y) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\nu} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$$

Weil man sonst das Polynom durch Potenzen von x respektive y teilen kann, sollte in dem Polynom eine reine Potenz von x auftauchen. Das Monom muß dann x^ν sein, also ist ν eine positive ganze Zahl. Ebenso sollte eine reine Potenz von y in dem Polynom auftauchen, das muß $y^{\frac{\nu}{\mu}}$ sein. Insbesondere, $m = \frac{\nu}{\mu}$ ist eine positive ganze Zahl.

Wir machen wieder den Ansatz $y = tx^\mu$ (nach Konstruktion ist $\mu = \frac{\nu}{m}$ eine rationale Zahl) und erhalten

$$P(x, tx^\mu) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\mu m} c_{\alpha,\beta} t^\beta x^\alpha x^{\mu\beta} = x^\nu g(t), \tag{3.5}$$

wobei $g(t) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\mu m} c_{\alpha,\beta} t^\beta$ ein Polynom vom Grad m ist. Da mindestens zwei Koeffizienten ungleich Null sind, hat dieses Polynom mindestens eine Nullstelle $t_0 \neq 0$.

Dann gilt: $P(x, t_0 x^\mu) = x^\nu g(t_0) = 0$, also ist $y = t_0 x^\mu$ eine Lösung.

Somit wissen wir zumindest im quasi-homogenen Fall, wie man Lösungen findet. Im Allgemeinen ist $P(x, y)$ natürlich nicht unbedingt quasi-homogen, sondern eine Summe von quasi-homogenen. Newtons Idee war es, in dem Newton Polygon zu $P(x, y)$ das steilste Segment auszusuchen, die Steigung sei $-\frac{1}{\mu_0}$. Dann zerlegt sich das Polynom in

$$P(x, y) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\mu_0\beta>\nu} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$$

und die Näherungslösungen erhält man als Lösung des quasi-homogenen Teils

$$P_\nu(x, y) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Beispiel 3.2.4 Kehren wir zurück zu dem Beispiel in Abschnitt 3.2.1. Für das Polynom $P(x, y) = y^3 + x + xy + y + x^3$ (siehe (3.2)) besteht das Polygon nur aus der Verbindungsstrecke zwischen $(0, 1)$ und $(1, 0)$, die Steigung ist also $-\frac{1}{\mu_0} = -1$. Die Aufteilung von $P(x, y)$ in seine quasi-homogene Teile ist also gleich der Aufteilung von $P(x, y)$ in seine homogenen Teile bezüglich des Totalgrads:

$$\begin{array}{rcl} P(x, y) & = & (x + y) + xy + (x^3 + y^3) \\ & = & \sum_{\alpha+\beta=1} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta=2} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\beta=+} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \ldots \end{array}$$

Das ist die gleiche Aufteilung wie in (3.3). Wir vernachlässigen den Teil mit $\alpha + \beta \geq 2$ und schauen und nur den Teil an mit $\alpha + \beta = 1$, also $(x + y)$. Man macht den Ansatz $y = tx^{\mu_0} = tx$. Es folgt für den (quasi-) homogenen

Teil: $x + tx = 0$ dann und nur dann wenn $t = -1$. Also ist $y_0 = -x$ die erste Näherungslösung. Dies ist keine Lösung für $P(x, y)$, denn

$$\begin{aligned} P(x, -x) &= (x + (-x)) + x(-x) + (x^3 + (-x)^3) \\ &= -x^2. \end{aligned}$$

Also: y_0 muss verbessert werden. Der Ansatz ist: $y = -x(1 + y_1)$. Substituiert man entsprechend in $P(x, y)$ so erhält man (siehe (3.4)):

$$P_1(x, y_1) = y_1 + x(1 + y_1) + x^2(3y_1 + 3y_1^2 + y_1^3).$$

Für das Polynom $P_1(x, y)$ besteht das Polygon aus der Verbindungsstrecke zwischen $(0, 1)$ und $(1, 0)$, die Steigung ist also $-\frac{1}{\mu_0} = -1$. Die Aufteilung von $P_1(x, y)$ in seine quasi-homogene Teile ist also gleich der Aufteilung von $P_1(x, y)$ in seine homogenen Teile bezüglich des Totalgrads:

$$P_1(x, y_1) = (x + y_1) + \sum_{\alpha+\beta>1} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y_1^\beta$$

Man macht den Ansatz $y_1 = tx^{\mu_0} = tx$. Es folgt für den (quasi-) homogenen Teil: $x + tx = 0$ dann und nur dann wenn $t = -1$. Also ist $y_1 = -x$ die Näherungslösung für $P_1(x, y_1)$ und

$$y = -x(1 + y_1) = -x(1 - x) = -x + x^2$$

ist die zweite Näherungslösung für $P(x, y)$. Dies ist keine Lösung für $P(x, y)$, denn

$$\begin{aligned} P(x, -x + x^2) &= (x + (-x + x^2)) + x(-x + x^2) + (x^3 + (-x + x^2)^3) \\ &= x^2 - x^2 + x^3 + x^3 - x^3 + 3x^4 - 3x^5 + x^6 \\ &= x^3 + 3x^5 + x^6. \end{aligned}$$

Also muss y_1 verbessert werden und man macht den Ansatz

$$y_1 = -x + \text{Terme höhere Ordnung} = -x(1 + y_2).$$

Substituiert man entsprechend in $P_1(x, y_1)$, so erhält man

$$\begin{aligned} P_1(x, -x(1 + y_2)) = &\; -x(1 + y_2) + x(1 - x(1 + y_2)) + x^2(3(-x(1 + y_2)) \\ &\qquad + x^2(3(-x(1 + y_2))^2 + (-x(1 + y_2))^3) \\ = &\; -x(y_2 + x(1 + y_2) + 3x^2(1 + y_2) - 3x^3(1 + y_2)^2 \\ &\qquad + x^4(1 + y_2)^3)) \\ = &\; -x(P_2(x, y_2)). \end{aligned}$$

Für das Polynom $P_2(x, y)$ besteht das Polygon wieder aus der Verbindungsstrecke zwischen $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Also ist $y_2 = -x$ die Näherungslösung für $P_2(x, y_2)$ und $y_1 = -x(1 + y_2) = -x(1 - x) = -x + x^2$ ist die zweite Näherungslösung für $P_1(x, y)$ und somit ist

$$y = -x(1 + y_1) = -x(1 - x + x^2) = -x + x^2 - x^3$$

ist die dritte Näherungslösung für $P(x, y) = 0$, aber es ist keine Lösung, denn

$$\begin{aligned} P(x, -x + x^2 - x^3) &= (x + (-x + x^2 - x^3)) + x(-x + x^2 - x^3) \\ &\qquad + (x^3 + (-x + x^2 - x^3)^3) \\ &= -x^4 + x^3 - x^9 + 3x^8 - 6x^7 + 7x^6 - 6x^5 + 3x^4 - x^3 \\ &= 2x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 6x^7 + 3x^8 - x^9. \end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt den Effekt der Rekursion: die n-te Näherungslösung ist vielleicht keine Lösung, aber

$$P(x, n\text{-te Näherungslösung}) = x^{n+1} \cdot \text{Polynom}.$$

Als Übung fahre man fort die Reihe zu berechnen...

3.2.3 Der allgemeinen Algorithmus

Sei $P(x, y)$ das Polynom in zwei Variablen

$$P(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$$

Wir nehmen ŒE an, dass die Voraussetzungen in der Einleitung (siehe Abschnitt 3.2.1) erfüllt sind, also $P(0, 0) = 0$ (und somit $c_{0,0} = 0$). Weiterhin nehmen wir an, dass P y-generisch vom Grad $m > 0$ ist, d.h. $c_{0,m} \neq 0$ und $c_{0,j} = 0$ für $j = 0, \ldots, m - 1$. (Übung: dies kann immer durch eine lineare Transformation erreicht werden).

1. Fall Das Newton Polygon ist nur ein Punkt. Das ist allerding nur möglich, wenn alle Monome mit Koeffizient $\neq 0$ durch y^m teilbar sind. In diesem Fall zerfällt $P(x, y) = y^m Q(x, y)$, wobei $Q(0, 0) = c_{0,m} \neq 0$. Also sieht die Kurve $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid P(a, b) = 0\}$ in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ also aus wie die Kurve $y = 0$.

2. Fall Das assoziierte Newton Polygon ist nicht nur ein Punkt. Aus dem Newton Polygon wähle das steilste Segment aus. Wegen der Konvexität ist es ist das Segment, das im Punkt $(0, m)$ beginnt. Die Steigung sei $-\frac{1}{\mu_0}$. Dann zerlegt sich das Polynom in

$$P(x,y) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\mu_0\beta>\nu} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \tag{3.6}$$

Die erste Annäherungslösung ist dann $y_0 = t_0 x^{\mu_0}$, wobei t_0 eine Nullstelle des Polynoms $g(t)$ ist, das man durch den Ansatz $y = t x^{\mu_0}$ aus dem quasi-homogenen Teil von $P(x,y)$ erhält:

$$\sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu} c_{\alpha,\beta} t^\beta x^\alpha x^\beta = x^\nu g(t). \tag{3.7}$$

Die Zahl $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0}$ ist eine rationale Zahl, wobei p_0, q_0 teilerfremd seien. Um nicht zu viele Probleme mit Nennern zu bekommen, setzen wir $x_1 := x^{\frac{1}{q_0}}$, in dieser Notation ist die erste Annäherung $y_0 = t_0 x_1^{p_0}$.

Ist dies bereits eine Lösung (also $P(x,y)$ ist quasi-homogen), dann ist man fertig. Sonst verbessert man die Lösung mit dem Ansatz:

$$y = t_0 x_1^{p_0} + \text{Terme grösserer Ordnung},$$

oder, anders formuliert

$$y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1).$$

Man substituiert entsprechend im Polynom. Aus (3.6) folgt:

$$P(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) = x_1^{\nu q_0} P_1(x_1, y_1),$$

denn jedes Monom ist teilbar durch einen Term der Form

$$x_1^{q_0\alpha + p_0\beta} = x_1^{q_0(\alpha + \frac{p_0}{q_0}\beta)} = x_1^{\nu q_0}.$$

Als Folge sieht man, dass in $P_1(x_1, y_1)$ eine m-te Potenz von y_1 auftaucht:

$$y^m = (x_1^{p_0}(t_0 + y_1))^m = x_1^\nu y_1^m + \text{Produkte kleinerer Potenzen von } x_1 \text{ und } y_1$$

$P_1(x_1, y_1)$ ist also wieder y-generisch, vom Grad $m_1 \leq m$.

Rekursion: Man wiederholt das Verfahren mit $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ usw., und erhält so eine Folge von Näherungslösungen (die Folge bricht eventuel ab, vielleicht aber auch nicht):

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^{\mu_0}(t_0 + y_1) \\ y_1 & = & x_1^{\mu_1}(t_1 + y_2) \\ y_2 & = & x_2^{\mu_2}(t_2 + y_3) \\ & \vdots & \end{array}$$

und somit

$$\begin{aligned} y &= x^{\mu_0}(t_0 + x_1^{\mu_1}(t_1 + x_2^{\mu_2}(t_2 + \ldots))) \\ &= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x^{\mu_0} x_1^{\mu_1} + t_2 x^{\mu_0} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} + \ldots \\ &= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x^{\mu_0 + \frac{\mu_1}{q_0}} + t_2 x^{\mu_0 + \frac{\mu_1}{q_0} + \frac{\mu_2}{q_0 q_1}} + \ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Wahl des steilsten Streckenabschnitts: Wenn die Rekursion abbricht, so hat man eine geschlossene Formel für eine Lösung. Wenn die Rekursion nicht abbricht, so hätte man gerne eine Kontrolle darüber, welche rationalen Zahlen als Potenzen in der Reihe auftauchen. Hier kommt die Wahl des steilsten Streckenabschnitts zum Tragen, denn der garantiert:

Lemma 3.2.1 *Es gibt einen Index i_0, so dass $\mu_i = \frac{p_i}{q_i}$ eine ganze Zahl ist für alle $i \geq i_0$.*

Beweis. Wir nehmen an, die Rekursion bricht nicht ab, sonst ist nichts zu zeigen. In der Rekursion hat man gesehen, dass die $P_i(x, y)$ y_i-generisch sind vom Grad m_i, wobei $m \geq m_1 \geq m_2 \geq \ldots$. Wir zeigen: wenn $m_i = m_{i+1}$ ist, dann ist μ_i eine ganze Zahl. Ist somit μ_i keine ganze Zahl, dann folgt notwendigerweise $m_i > m_{i+1}$. Da dies nur endlich oft vorkommen kann, folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen: $m_i = m_{i+1} \Rightarrow \mu_i \in \mathbb{N}$. Œ sei $i = 0$, wir substituieren $x = x_1^{q_0}$, $y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ in $P(x, y)$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1^{\nu q_0} P_1(x_1, y_1) &= P(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) \\ &= x_1^{\nu q_0}\left(\textstyle\sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m} c_{\alpha,\beta}(t_0 + y_1)^\beta + x_1(\ldots)\right). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: ein Monom $x^\alpha y^\beta$ in $P(x, y)$ wird ersetzt durch das Monom $x_1^{\alpha p_0}(x_1^{p_0}(t_0 + y_1))^\beta$, der x_1-Anteil an jedem Summanden ist daher

$$x_1^{q_0 \alpha + p_0 \beta} = x_1^{q_0(\alpha + \frac{p_0}{q_0}\beta)} = x_1^{q_0(\alpha + \mu_0 \beta)} = x_1^{\nu' q_0}$$

mit $\nu' = \mu_0 m$ falls (α, β) auf der Geraden $\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m$ liegt, sonst gilt $\nu' > \mu_0 m$. Es folgt für P_1:

$$P_1(0, y_1) = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m} c_{\alpha,\beta}(t_0 + y_1)^\beta = g(t_0 + y_1),$$

wobei g die Funktion in (3.5) und (3.7) vom Grad m ist und $t_0 \neq 0$ ist eine Nullstelle dieser Funktion. Nach Definition ist m_1 die minimale Potenz, mit der $y_1^{m_1}$ als Monom mit Koeffizient $\neq 0$ in P_1 auftaucht. Anders gesagt, es ist die Ordnung der Nullstelle $y_1 = 0$ von g, und damit ist es die Ordnung von t_0 als Nullstelle von $g(t)$. Da $m = m_1$ folgt $g(t) = c(t - t_0)^m$ für ein $c \neq 0$. Insbesondere ist der Koeffizient von $t^{m-1} \neq 0$. Andererseits gilt (siehe (3.5))

$$g(t) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} c_{\alpha,\beta} t^\beta,$$

es gibt also ein α mit $\alpha+\mu_0(m-1) = \mu_0 m$, so dass $c_{\alpha,m-1} \neq 0$. Das bedeutet aber $\alpha = \mu_0$, und somit ist $\mu_0 \in \mathbb{N}$. •

Wenn man also für den durch Lemma 3.2.1 garantierten Index i_0 setzt $n = q_0 q_1 \cdots q_{i_0}$, dann folgt aus (3.8):

$$y = \sum_{k>0} c_k x^{\frac{k}{n}}. \tag{3.9}$$

Diese Form der Beschreibung von y als Potenzreihe mit rationalen Potenzen (deren Nenner beschränkt sind) nennt man die *Puiseux Entwicklung* um $(0,0)$ der Kurve C_P definiert durch $P(x,y) = 0$. Eigentlich geht diese Beschreibung zurück auf Newton, ist dann vergessen worden und von Puiseux neu entwickelt worden. Allerdings hat Puiseux die nach ihm benannten Puiseux Reihen intensiv untersucht, während Newton zum Beispiel kein Wort über die Konvergenz der Reihen zu schreiben scheint. Man kann zeigen: (für eine präzise Formulierung siehe Brieskorn und Knörrer, *Plane algebraic curves*, Chapter III, Section 8.3)

Theorem. *Die Puiseux Entwicklung einer algebraischen Kurve ist konvergent. Genauer, zu jeder Wahl eines Zweiges der n-ten Wurzelfunktion konvergiert die Reihe für $|x|$ klein genug und definiert eine analytische Parametrisierung eines Zweiges des Kurve C_P in einer Umgebung von $(0,0)$.*

Abschliessend einige Worte zur Idee des Beweises und allgemeiner zu Puiseux Reihen: Man hat den Polynomring $\mathbb{C}[x]$, ein Element ist eine endliche Summe

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

man hat den Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{C}[[x]]$, ein Element ist eine möglicherweise unendliche Summe

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Dies ist ein Integritätsbereich, $\mathbb{C}[[x]]$ hat also eine Quotientenkörper, das ist der Körper der Laurent Reihen $\mathbb{C}((x))$. Ein Element ist eine möglicherweise unendliche Summe

$$p(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^i,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. Es sind also endlich viele negative Potenzen erlaubt. Die Reihe in (3.9) ist ein Element in dem Körper $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$

Der Körper der Puiseux Reihen ist die Vereinigung aller dieser Körper

$$\mathbb{C}{\ll}x{\gg} := \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})),$$

wobei $x^{\frac{a}{b}}$ mit $x^{\frac{c}{d}}$ identifiziert wird falls $ad = bc$. Das folgende Theorem (hier ohne Beweis) geht zurück auf Newton und auf Puiseux. Zu zeigen ist, dass jedes nicht konstante Polynom in $\mathbb{C}{\ll}x{\gg}\,[y]$ eine Nullstelle besitzt. Diese konstruiert man mit dem oben beschriebenen Verfahren, das nicht nur für $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ funktioniert sondern auch für $\mathbb{C}{\ll}x{\gg}\,[y]$.

Theorem 3.2.1 (Newton-Puiseux Theorem) $\mathbb{C}{\ll}x{\gg}$ *ist algebraisch abgeschlossen.*

Insbesondere, wenn $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \subset \mathbb{C}{\ll}x{\gg}[y]$ vom Grad $n > 0$ ist (gesehen als Polynom in der Variablen y), dann hat $P(x,y)$ genau n Nullstellen in dem Körper $\mathbb{C}{\ll}x{\gg}$.

Für alle Details und technischen Feinheiten siehe zum Beispiel das Buch von Brieskorn und Knörrer, *Plane algebraic curves*, Chapter III, Section 8.3, hier wird nur eine sehr, sehr grobe Zusammenfassung gegeben. Sei der Einfachheit halber $P(x,y)$ irreduzibel und y-generisch vom Grad $n > 0$ als Polynom in y, und sei $P(x,y)$ ein Weierstraß-Polynom, d.h, $P(x,y) = y^m + c_1(x)y^{m-1} + \ldots + c_n(x)$ (Weierstraß-Vorbereitungssatz: f komplex analytisch, $f(0,0,\ldots,0) = 0$ und z_1 generisch in der Reihenentwicklung, dann gibt es ein Weierstraß Polynom W so dass $f(z_1,\ldots,z_n) = W(z_1)h(z_1,\ldots,z_n)$, wobei die Koeffizienten von $W(z_1)$ komplex analytische Funktionen in $z_2,\ldots,z_n$ sind und h ist eine komplex analytische Funktion, die in einer Umgebung von 0 nicht verschwindet. Die Nullstellen von f in einer Umgebung von 0 sind also genau die Nullstellen von W). Dann gibt es eine (in einer kleinen Umgebung) konvergente Reihe $y(x^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}{\ll}x{\gg}$ mit $P(x, y(x^{\frac{1}{n}})) = 0$. (Siehe Brieskorn und Knörrer, *Plane algebraic curves*, Chapter III, Section 8.3, Theorem 1, respektive Satz über implizite Funktionen).

Aus dieser kann man nun insgesamt n verschiedene Lösungen basteln. In der Tat, ist $y(x^{\frac{1}{n}})$ eine Lösung, d.h. $P(x, y(x^{\frac{1}{n}})) = 0$, dann sind für $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $j = 0, \ldots, n-1$, auch $y(\xi^j x^{\frac{1}{n}})$, $j = 0, \ldots, m-1$ Lösungen.

Die Reihe, die mit dem Newton Verfahren konstruiert worden ist, ist auch ein Element in $\mathbb{C}{\ll}x{\gg}$ und ist eine Lösung der Gleichung $P(x, y) = 0$. Da $P(x, y) = 0$ nur n Lösungen in $\mathbb{C}{\ll}x{\gg}$ haben kann, muß diese Reihe eine der n bereits gefundenen sein. Insbesondere ist die Reihe konvergent.

Chapter 4

Varietäten, Algebren, Bewertungen und Newton-Okounkov-Körper

4.1 Affine algebraische Mengen und Varietäten

Eine *affine algebraische Menge* ist eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{C}^n$, die definiert wird als Nullstellengebilde von endlich vielen polynomialen Gleichungen. Anders gesagt, es gibt endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, so daß

$$Y = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f_1(v) = \ldots = f_r(v) = 0\}$$

Sind Y und X affine algebraische Mengen mit

$$Y = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, f_1(v) = \ldots = f_r(v) = 0\}, \; X = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, g_1(v) = \ldots = g_s(v) = 0\}$$

dann sind auch $X \cup Y$ und $X \cap Y$ affine algebraische Mengen mit

$$X \cup Y = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, (f_1g_1)(v) = (f_1g_2)(v) = \ldots = (f_rg_s)(v) = 0\}$$

und

$$X \cap Y = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, f_1(v) = \ldots = f_r(v) = g_1(v) = \ldots = g_s(v) = 0\}.$$

Beispiel 4.1.1 $SL_n = \{A \in M_n \mid \det A - 1 = 0\}$ ist eine affine algebraische Menge. Jede Kurve im $\mathbb{C}^2$ ist eine affine algebraische Menge. Die Hyperfläche

$$\{v \in \mathbb{C}^4 \mid (x_1x_2 - x_3x_4)(v) = 0\} \subset \mathbb{C}^4$$

ist eine affine algebraische Menge. Ebenso ist

$$\{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid (x_ix_{j+1} - x_{i+1}x_j)(v) = 0; \forall \ \leq i < j \leq n-1\},$$

eine affine algebraische Menge.

Beispiel 4.1.2 Die Menge $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ kann man zu einer affinen algebraischen Menge machen indem man sie identifiziert mit

$$Y = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid (x_1x_2 - 1)(v) = 0\}$$

durch die Abbildung $\mathbb{C}^* \ni t \leftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ t^{-1} \end{pmatrix} \in Y$. Allgemeiner kann man auf diese Weise $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ zu einer algebraischen Menge machen.

Übung 4.1.1 Zeigen Sie: Auf die gleiche Weise kann man $GL_n(\mathbb{C})$ zu einer affinen Menge machen, in dem man $GL_n(\mathbb{C})$ identifiziert mit

$$\{(A, c) \in M_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \mid c \det A - 1 = 0\}.$$

Sei $I = \sum_{j=1}^r \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]f_j$ das von $f_1, \ldots, f_r$ erzeugte Ideal. Dann gilt offensichtlich

$$Y = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f_1(v) = \ldots = f_r(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid f(v) = 0 \ \forall f \in I\}.$$

Da $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist, ist jedes Ideal endlich erzeugt. Eine äquivalente Definition eine algebraischen Menge ist also: Eine *affine algebraische Menge* ist eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{C}^n$, die definiert wird als Nullstellengebilde eines Ideals $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\mathcal{V}(I) := \{v \in \mathbb{C}^n \mid f(v) = 0 \ \forall f \in I\}$$

Umgekehrt, ist $Z \subseteq \mathbb{C}^n$ eine Teilmenge (nicht notwendigerweise eine algebraische Menge), so sei

$$\mathcal{I}(Z) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid f|_Z \equiv 0\}.$$

Dies ist offensichtlich ein Ideal. Als Konsequenz bekommt man die folgenden Abbildungen zwischen Idealen in Polynomringen und affinen algebraischen Teilmengen:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{affine algebraische} \\ \text{Mengen im } \mathbb{C}^m \end{array} \right\} \qquad \begin{array}{c} \longrightarrow^{\mathcal{I}} \\ \longleftarrow_{\mathcal{V}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideale in} \\ S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m] \end{array} \right\}$$

definiert durch

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathcal{I}(Y) := \{f \in S \mid f|_Y \equiv 0\} \\ & & \\ \mathcal{V}(I) = \{y \in \mathbb{C}^m \mid f(y) = 0 \,\forall\, f \in I\} & \longleftarrow & I \end{array} \tag{4.1}$$

Das Ideal $\mathcal{I}(Y)$ wird auch das *Verschwindungsideal* von Y genannt.

Bei den Abbildungen handelt es sich nicht um Bijektionen. Zum Beipiel sei $J_m \subset \mathbb{C}[x]$ das Ideal erzeugt von x^m, dann ist $V(J_m) = \{0\}$ für alle $m \geq 1$.

Übung 4.1.2 Seien $X \subset \mathbb{C}^n$ und $Y \subset \mathbb{C}^m$ affine algebraische Mengen. Zeigen Sie: das kartesische Produkt $X \times Y$ ist eine affine algebraische Menge. (Hinweis: Sei R der Ring der Polynomfunktionen auf $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$:

$$R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m].$$

Seien $\mathcal{I}(X) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathcal{I}(Y) \subset \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$ die Verschwindungsideale, und sei $I = \mathcal{I}(X)R + \mathcal{I}(Y)R$ das von den beiden erzeugte Ideal in R. Dann ist $\mathcal{V}(I) = X \times Y \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$.)

Wir haben immer offensichtlich $J \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ für ein Ideal $J \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$. Als das *Radikal* $\sqrt{J}$ eines Ideals J bezeichnet man das Ideal

$$\sqrt{J} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m] \mid \exists r \in \mathbb{N} : \, f^r \in J\}.$$

Man sagt ein Ideal ist ein *Radikalideal* falls $J = \sqrt{J}$.

Theorem 4.1.1 (Hilberts Nullstellensatz) *Sei $J \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$ ein Ideal und sei $Y = \mathcal{V}(J)$ die zugehörige affine algebraische Menge. Dann ist*

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}.$$

Die Abbildungen in (4.2) definieren also Bijektionen:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{affine algebraische} \\ \text{Mengen im } \mathbb{C}^m \end{array} \right\} \quad \underset{\mathcal{V}}{\overset{\mathcal{I}}{\rightleftarrows}} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale in} \\ S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m] \end{array} \right\}$$

Desweiteren haben wir:

Korollar 4.1.1 *Sei $J \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ ein Ideal. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(J) = \emptyset \Leftrightarrow J = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$$

Beweis. Wenn $J = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$, dann ist offensichtlich die gemeinsame Nullstellenmenge die leere Menge. Ist $\mathcal{V}(J) = \emptyset$, so folgt aus Hilberts Nullstellensatz: $\sqrt{J} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$. Insbesondere, $\exists\, n > 0$, so dass $1^n \in J$, aber das bedeutet $1 \in J$ und damit $J = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$. •

Übung 4.1.3 Zeigen Sie: sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein nicht konstantes Polynom. Dann ist das von $P(x, y)$ erzeugte Ideal ein Radikalideal dann und nur dann wenn $P(x, y)$ ohne mehrfache Faktoren ist.

Seien $X \subset \mathbb{C}^n$ und $Y \subset \mathbb{C}^m$ affine algebraische Mengen. Ein *Morphismus* affiner algebraischer Mengen $\psi : X \to Y$ ist eine Abbildung, für die eine polynomiale Abbildung $\tilde{\psi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ existiert, so daß man ein kommutatives Diagramm hat:

$$\begin{array}{ccccc} \psi & : & X & \to & Y \\ & & \bigcap & & \bigcap \\ \tilde{\psi} & : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \end{array}$$

Ein Isomorphismus wird dann auf die offensichtliche Art definiert: Ein Morphismus $\psi : X \to Y$ wird ein *Isomorphismus* genannt, wenn es einen Morphismus $\psi' : Y \to X$ gibt, so daß $\psi \circ \psi'$ and $\psi' \circ \psi$ jeweils die identische Abbildung ist.

Bemerkung 4.1.1 Achtung, es reicht nicht zu verlangen, daß $\psi : X \to Y$ ein bijektiver Morphismus, denn die Umkehrabbildung nicht notwendigerweise ein Morphismus.

Übung 4.1.4 Sei $Y = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 - y^2 = 0\}$. Zeigen SIe: Die Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, ist ein bijektiver Morphismus von $\mathbb{C}$ auf Y, aber kein Isomorphismus von affinen algebraischen Mengen.

Am Begriff des Isomorphismus wird klar, daß die Beschreibung der Objekte *einzig und allein* durch die Einbettung $Y \subset \mathbb{C}^n$ auf die Dauer sehr umständlichen ist. Dies legt nahe, sich der doch sehr lästigen Abhängigkeit von der Einbettung zu entledigen und eine Beschreibung zu finden, die unabhänging davon ist.

Betrachten wir zunächst einen Morphismus $f : Y \to \mathbb{C}$ für $Y \subset \mathbb{C}^n$, so existiert gemäß der Definition ein Polynom $\tilde{f} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, so daß $f = \tilde{f}|_Y$. Zwei solche Polynome $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ ergeben den gleichen Morphismus dann und nur dann wenn $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ auf Y verschwindet, also ein Element in $\mathcal{I}(Y)$ ist.

Der Quotient des Polynomringes $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ nach dem Ideal $\mathcal{I}(Y)$ beschreibt also genau die Morphismen von Y nach $\mathbb{C}$, oder genauer, die *regulären Funktion* auf Y.

Definition 4.1.1 Die Algebra $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(Y)$ wird die Algebra der *regulären Funktionen* auf Y oder auch der *Koordinatenring* von Y genannt, und mit $\mathbb{C}[Y]$ bezeichnet.

Beispiel 4.1.3 Der Polynomring $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ist die Algebra der regulären Funktionen auf dem $\mathbb{C}^n$.

Beispiel 4.1.4 Der Koordinatenring einer affine Kurve C_P ist $\mathbb{C}[x, y]/\langle P\rangle$.

Beispiel 4.1.5 Der Koordinatenring von $\mathbb{C}^*$ ist $\mathbb{C}[x_1, x_2]/\langle x_1x_2 - 1\rangle$. Die Abbildung $\mathbb{C}[x_1, x_2] \to \mathbb{C}[x, x^{-1}]$, $x_1 \mapsto x$, $x_2 \mapsto x^{-1}$, induziert einen Isomorphismus $\mathbb{C}[x_1, x_2]/\langle x_1x_2 - 1\rangle \simeq \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Wir schreiben deswegen für den Koordinatenring $\mathbb{C}[\mathbb{C}^*] = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$, und, allgemeiner,

$$\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n] = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}].$$

Man nennt die algebraische Menge $(\mathbb{C}^*)^n$ auch den *n-dimensionalen Torus.*

Wie verhält sich nun diese Algebra unter Morphismen von affinen algebraischen Mengen? Seien $X \subset \mathbb{C}^n$ und $Y \subset \mathbb{C}^m$ algebraische Mengen, sei $\psi : X \to Y$ ein Morphismus. Dann stellt sich die natürliche Frage ob für $f \in \mathbb{C}[Y]$ die Abbildung $f \circ \psi : X \to \mathbb{C}$ wieder eine reguläre Funktion ist und wir somit einen Algebrahomomorphismus

$$\psi^\sharp : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$$

bekommen. Sei also $\tilde{\psi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ eine polynomiale Abbildung, so daß ψ die Einschränkung von $\tilde{\psi}$ auf X ist. Es gibt also Polynome $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, so daß für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$\tilde{\psi}(\underline{x}) = (h_1(\underline{x}), \ldots, h_m(\underline{x})).$$

Die Verküpfung $f \mapsto f \circ \tilde{\psi}$ induziert daher einen Algebrahomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\psi}^\sharp : \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] & \to & \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \\ y_i & \mapsto & h_i(\underline{x}). \end{array}$$

zwischen der Algebra der regulären Funktionen auf dem $\mathbb{C}^m$ und der Algebra der regulären Funktionen auf dem $\mathbb{C}^n$. Da nach Voraussetzung $\psi(X) \subset Y$ folgt $f \circ \tilde{\psi} \in \mathcal{I}(X)$ falls $f \in \mathcal{I}(Y)$, also $\tilde{\psi}^\sharp(\mathcal{I}(Y)) \subset \mathcal{I}(X)$, bekommen wir einen induzierten k-Algebrahomomorphism $\psi^\sharp : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$ und ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \psi^\sharp & : & \mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]/\mathcal{I}(Y) & \to & \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(X) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{\psi}^\sharp & : & \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] & \to & \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \end{array}$$

Übung 4.1.5 Sei $Mor(X, Y)$ die Menge der algebraischen Morphismen von X nach Y und sei $Alg([Y], \mathbb{C}[X])$ die Menge der Algebrahomorphismen von $\mathbb{C}[Y]$ nach $\mathbb{C}[X]$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$Mor(X, Y) \to Alg([Y], \mathbb{C}[X]), \quad \psi \mapsto \psi^\sharp$$

ist injektiv.

Allgemeiner hat man folgende "Übersetzung" von Morphismen zwischen algebraischen Mengen und Algebrahomomorphismen.

Theorem 4.1.2 *Die Abbildung $\psi \to \psi^\sharp$, die jedem Morphismus $\psi : X \to Y$ den Algebrahomomorphism $\psi^\sharp : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$ zuordnet, ist eine Bijektion, d.h., für jeden Algebrahomomorphism $\phi : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $\psi : X \to Y$, so daß $\phi = \psi^\sharp$.*

Beweis. Sei $\phi : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$ ein Algebrahomomorphismus. Durch Verknüpfung mit der Quotientenabbildung $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_{n_2}] \to \mathbb{C}[Y]$ erhält man einen

Homomorphismus $\phi' : \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] \to \mathbb{C}[X]$. Wähle Polynome $f_1, \ldots, f_m$ in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\overline{f}_j = \phi'(y_j) \bmod \mathcal{I}(X)$, und sei

$$\tilde{\phi} : \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n] \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{definiert durch} \quad \tilde{\phi}(y_j) = f_j.$$

Für den Morphismus $\tilde{\psi} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$, definiert durch

$$v \mapsto (f_1(v), f_2(v), \ldots, f_m(v)),$$

gilt: $\tilde{\psi}^\sharp = \tilde{\phi}$. Sei nun $h \in \mathcal{I}(Y)$ und $v \in k^n$, dann gilt nach Konstruktion $h(\tilde{\psi}(v)) = (h \circ \tilde{\psi})(v) = \big(\tilde{\psi}^\sharp(h)\big)(v) = \big(\tilde{\phi}(h)\big)(v)$, und damit folgt

$$\forall v \in X : h(\tilde{\psi}(v)) = \big(\tilde{\phi}(h)\big)(v) = \big(\phi'(h)\big)(v) = 0 \Longrightarrow \tilde{\psi}(X) \subset Y.$$

Man erhält somit einen Morphismus $\psi = \tilde{\psi}|_X : X \to Y$, der, nach Konstruktion, die Eigenschaft hat: $\psi^\sharp = \phi$. •

Als Konsequenz bekommen wir die folgende Charakterisierung von isomorphen affinen algebraischen Mengen:

Korollar 4.1.2 *Zwei affine algebraische Mengen sind dann und nur dann isomorph, wenn die Koordinatenringe isomorph sind.*

Definition 4.1.2 Eine algebraische Menge $Y \subset \mathbb{C}^m$ wird eine *affine algebraische Varietät* genannt falls der Koordinatenring

$$\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]/\mathcal{I}(Y)$$

von Y keine Nullteiler hat.

Proposition 4.1.1 *Eine affine Kurve C_P ist eine affine Varietät dann und nur dann wenn $P(x, y)$ irreduzibel ist.*

Beweis. Nach Annahme hat $P(x, y)$ keine mehrfachen Faktoren, also ist das von $P(x, y)$ erzeugte Ideal ein Radikalideal. Insbesondere: $\mathbb{C}[C_P] = \mathbb{C}[x, y]/\langle P(x, y)\rangle$. Weiter sei $P(x, y) = P_1(x, y) \cdots P_r(x, y)$, wobei die $P_j(x, y)$ irreduzibel sind und teilerfremd.

Angenommen $P(x, y)$ ist nicht irreduzibel, also $r \geq 2$. Dann gilt $C_{P_i} \cap C_{P_j}$ ist eine endliche Anzahl von Punkten (Bézout) für $i \neq j$. Insbesondere gilt $P_i|_{C_{P_j}} \not\equiv 0$ für $i \neq j$. Es folgt: die Nebenklassen $\overline{P}_j$, $j = 1, \ldots, r$, der $P_j(x, y)$

in $\mathbb{C}[C_P]$ sind nicht 0. Aber $\overline{P}_1 \cdots \overline{P}_r = \overline{P} = 0$ in $\mathbb{C}[C_P] = \mathbb{C}[x,y]/\langle P(x,y)\rangle$, der Koordinatenring hat somit Nullteiler.

Angenommen $P(x,y)$ ist irreduzibel und $Q(x,y), R(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ sind so, dass $\overline{Q(x,y)R(x,y)} = 0$ in $\mathbb{C}[C_P]$. Das ist äquivalent zu $Q(x,y)R(x,y) \in \langle P(x,y)\rangle$, oder, anders gesagt, $Q(x,y)R(x,y)$ ist teilbar durch $P(x,y)$. Da $\mathbb{C}[x,y]$ ein faktorieller Ring ist bedeutet das aber, dass entweder $Q(x,y)$ oder $R(x,y)$ durch $P(x,y)$ teilbar ist. Somit ist entweder $\overline{Q(x,y)} = 0$ oder $\overline{R(x,y)} = 0$. Der Koordinatenring hat also keine Nullteiler. •

Beispiel 4.1.6 Der Torus $(\mathbb{C}^*)^n$ ist irreduzibel, denn der Koordinatenring ist der Ring der Laurent Polynome $\mathbb{C}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$, und der hat keine Nullteiler.

Der Koordinatenring eines Torus $T = (\mathbb{C}^*)^n$ hat eine besondere Eigenschaft. Man nennt einen Morphismus $\rho : T \to \mathbb{C}^*$ (von affinen algebraischen Varietäten) einen Charakter, wenn es auch ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h., $\rho(tt') = \rho(t)\rho(t')$.

Lemma 4.1.1 *Die Charaktere bilden eine Vektorraumbasis des Koordinatenrings.*

Beweis. Jedes Monom $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ ist ein Charakter (Übung!), und die Monome bilden eine Vektorraumbasis. Es bleibt zu zeigen, dass dies alle Charaktere sind. Da das Produkt von Charakteren wieder ein Charakter ist (Übung!), kann man nach Multiplikation mit einem entsprechenden Monom im Folgenden annehmen, dass der Charakter ein Polynom ist. Der Beweis ist per Induktion über n. Ist $n = 1$, dann ist ein Charakter χ ein Polynom, das 0 als einzige Nullstelle hat. Da $\chi(1) = 1$ folgt $\chi = x^m$. Sei nun $n \geq 2$. Da

$$\chi(t_1, \ldots, t_n) = \chi(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1)\chi(1, \ldots, 1, t_n),$$

folgt per Induktion: $\chi = x_1^{m_1} \cdots x_{n-1}^{m_{n-1}} x_n^{m_n}$. •

Definition 4.1.3 Die *Zariski-Topologie* auf dem $\mathbb{C}^n$ ist die Topologie, die als offene Teilmengen genau die Komplemente der algebraischen Mengen nimmt.

Dies ist eine Topologie, da der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen und die Vereinigung von beliebig vielen offenen Teilmengen wieder offen ist, und sowohl die leere als auch die offenen Teilmenge ist offen.

Proposition 4.1.2 *Eine affine algebraische Menge ist reduzibel dann und nur dann wenn man sie als die Vereinigung von zwei abgeschlossenen echten Teilmengen schreiben kann.*

Beweis. Wenn Y reduzibel ist, dann kann man $f, g \in \mathbb{C}[Y] - \{0\}$ finden, so dass $fg = 0$. Sei $Y_1 = \{y \in Y \mid f(y) = 0\}$ und sei $Y_2 = \{y \in Y \mid g(y) = 0\}$. Da $fg = 0$ folgt $Y_1 \cup Y_2 = Y$, und beides sind echte Teilmengen, abgeschlossen in der Zariski Topologie.

Umgekehrt, sei $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset \mathbb{C}^n$, wobei beides echte Teilmengen von Y sind, und beide sind abgeschlossen in der Zariski Topologie. Sei $I = \mathcal{V}(Y)$ und $I_j = \mathcal{V}(Y_j)$, $j = 1, 2$. Da $Y_j \subsetneq Y$, $j = 1, 2$, gilt $I \subsetneq I_j$. Man kann also Polynome $f_j \in I_j - I$, $j = 1, 2$, finden. Damit gilt für die Nebenklassen $\overline{f_j} \not\equiv 0$ auf Y, $j = 1, 2$, aber $\overline{f_1 f_2} = 0$ auf Y. Der Koordinatenring enthält somit Nullteiler. •

Proposition 4.1.3 *Jede algebraische Menge ist eine endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.*

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen, die nicht als eine endliche Vereinigung von irreduziblen Varietäten geschrieben werden. Angenommen die Menge ist nicht leer. Sind $S_1 \supsetneq S_2 \supsetneq S_3 \supsetneq \ldots$ ineinander enthaltene Teilmengen aus $\mathcal{S}$, so folgt für die Ideale $\mathcal{I}(S_1) \subsetneq \mathcal{I}(S_2) \subsetneq \ldots$. Da $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist, ist wird Folge der Ideale stationär, jede absteigende Folge von Teilmenge in $\mathcal{S}$ wird also auch stationär. Die Menge $\mathcal{S}$ hat also minimale Elemente. Sei Y eine solche minimale Menge. Nach Konstruktion ist Y nicht irreduzibel, es gibt also eine Zerlegung $Y = Y_1 \cup Y_2$. Wegen der Minimalität von Y sind aber sowohl Y_1 als auch Y_2 endliche vereinigung von irreduziblen Varietäten, und damit ist auch Y eine endliche Vereinigung von irreduziblen Varietäten, im Widerspruch zur Annahme. •

4.2 Bewertungen

Für mehr Details über Bewertungen siehe, zum Beispiel, das Buch von A. J. Engler und A. Prestel, *Valued Fields*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2005. Im Folgenden sei immer $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, zum Beispiel $\mathbb{Z}^n$. Γ sei dabei versehen mit einer totalen Ordnung als abelsche Gruppe, d.h., “>” definiert eine totale Ordnung auf Γ, und aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$ für alle $a, b, c \in \Gamma$.

Beispiel 4.2.1 Sei $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, als totale Ordnung kann die lexikographische Ordung $>_{lex}$ oder die rechte lexikographische Ordnung $>_{rlex}$ nehmen.

Definition 4.2.1 Sei A eine Algebra über dem Körper $\mathbb{C}$, zum Beispiel der Koordinatenring einer affinen Varietät. Eime *quasi-Bewertung* von A mit Werten in einer total geordneten abelschen Gruppe Γ ist eine Abbildung $\nu : A\backslash\{0\} \to \Gamma$, die den folgenden Regeln genügt:

(a) $\nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ für alle $x, y \in A\backslash\{0\}$,

(b) $\nu(cx) = \nu(x)$ für alle $x \in A\backslash\{0\}$ und $c \in C$,

(c) $\nu(xy) \geq \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in A\backslash\{0\}$.

Man nennt ν eine *Bewertung* wenn die Ungleichung in (c) ersetzt werden kann durch die Gleichung:

(c') $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in A\backslash\{0\}$.

Beispiel 4.2.2 Sei $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ und sei "$>$" eine Totalordnung auf Γ. Die Γ-wertige *Minimum-Bewertung* auf $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ bezüglich "$>$" ist definiert durch

$$\nu(\sum_{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\mathbf{m}}} x^{\underline{\mathbf{m}}}) := \min\{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^n \mid a_{\underline{\mathbf{m}}} \neq 0\}$$

Beispiel 4.2.3 Sei $A = \mathbb{C}[x, y]$ und sei $\mu \in \mathbb{Q}$ $\mu > 0$, $\mu = \frac{p}{q}$ mit p, q teilerfremd. Sei $\Gamma = \mathbb{Z}[\frac{1}{q}] = \{\frac{a}{q} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$. Für ein Monom $x^\alpha y^\beta$ sei

$$\nu(x^\alpha y^\beta) := \alpha + \mu\beta.$$

Allgemein für ein Polynom $P(x, y) = \sum c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}[x, y]$ sei

$$\nu(P(x, y)) := \min\{\nu(x^\alpha y^\beta) \mid c_{\alpha,\beta} \neq 0\}.$$

Dann ist ν eine Bewertung.

Bemerkung 4.2.1 Sei $\nu : A\backslash\{0\} \to \Gamma$ eine quasi-Bewertung. Seien $x, y \in A\backslash\{0\}$ mit der Eigenschaft $\nu(y) > \nu(x)$. Dann haben die Bedingungen (a) und (b) in Definition 4.2.1 zur Folge:

$$\nu(x) = \nu((x+y)-y) \geq \min\{\nu(x+y), \nu(-y)\} = \nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\},$$

und damit $\nu(x) = \nu\,(x+y)$.

Bemerkung 4.2.2 Ist die Algebra A ein Integritätsbereich, dann kann man eine Bewertung ausdehenen auf den Quotientenkörper $Q(A)$ of A durch:

$$\nu\left(\frac{x}{y}\right) = \nu(x) - \nu(y) \quad \forall\, x, y \in A\backslash\{0\}.$$

Sei $\nu : A\backslash\{0\} \to \Gamma$ eine quasi-Bewertung. Für $\gamma \in \Gamma$ sei

$$A_\gamma = \{f \in A - \{0\} \mid \nu(f) \geq \gamma\} \cup \{0\}.$$

Aus den Bedingungen für eine quasi-Bewertung folgt mit $f \in A_\gamma$ is $cf \in A_\gamma$ für alle $c \in \mathbb{C}$ (Bedingung b)), mit $f, f' \in A_\gamma$ ist auch $f + f' \in A_\gamma$ (Bedingung a)) und mit $f \in A_\gamma$ und $g \in A_\delta$ folgt $fg \in A_{\gamma+\delta}$ (Bedingung c)). Eine solche Folge von Untervektorräumen $A_\gamma \subset A$ mit den Eigenschaften

$$A_\gamma \subseteq A_\delta \text{ falls } \gamma \leq \delta, \text{ und } A_\gamma \cdot A_\delta \subseteq A_{\gamma+\delta}$$

nennt man eine Filtrierung von A. Sei

$$A_{>\gamma} = \{f \in A - \{0\} \mid \nu(f) > \gamma\} \cup \{0\},$$

dann ist

$$gr_{\Gamma,\nu} A = \bigoplus A_\gamma / A_{>\gamma}$$

nicht nur ein Vektorraum sondern wieder eine Algebra, genannt die *graduierte assoziierte Algebra*.

Beispiel 4.2.4 Sei $A = \mathbb{C}[x, y]$, sei $\mu \in \mathbb{Q} > 0$ und sei $\Gamma = \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ wie in Beispiel 4.2.3. Für eine Monom $x^\alpha y^\beta$ sei

$$\nu(x^\alpha y^\beta) := \alpha + \mu\beta.$$

und allgemein für ein Polynom $P(x, y) = \sum c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}[x, y]$ sei

$$\nu(P(x, y)) := \min\{\nu(x^\alpha y^\beta) \mid c_{\alpha,\beta} \neq 0\}.$$

Die Gerade $\alpha + \mu\beta = 0$ geht durch den Ursprung und den Punkt $(-1, \frac{1}{\mu})$. Die affinen Geraden mit der Gleichung $\alpha + \mu\beta = \eta$ erhält man durch Parallelverschiebung. Sei $P(x, y)$ das Polynom in zwei Variablen

$$P(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$$

Wir nehmen ŒE an, dass $P(0,0) = 0$, P ist y-generisch vom Grad $m > 0$, und das Newton Polygon ist nicht nur ein Punkt. Dann haben wir μ so gewählt, dass die Steigung der Geraden genau der des Segments entspricht, dass in $(0, m)$ beginnt. Man benutzt also das Newton Polygon um eine Bewertung

$$\mathcal{V} : \mathbb{C}[x, y] \to \Gamma$$

zu definieren. Sei $\mu = \frac{p}{q}$, dann kann man für das gegebene Polynom $P(x, y)$ rationale Zahlen finden: $\eta_1 = \frac{p_1}{q}$, $\eta_2 = \frac{p_2}{q}$, $\ldots$, $\eta_s = \frac{p_s}{q}$, $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_s$, so dass $P(x, y) = P_1(x, y) + \ldots + P_s(x, y)$, wobei

$$P_j(x, y) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\eta_j} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$$

Sei jetzt zusätzlich $P(x, y)$ ohne mehrfache Faktoren, also der Koordinatenring der Kurve C_P ist

$$\mathbb{C}[C_P] = \mathbb{C}[x, y]/\langle P(x, y)\rangle.$$

Wir führen eine zustzliche Variable t ein und betrachten den Polynomring $\mathbb{C}[x, y, t]$ und das Polynom

$$\mathfrak{P}(x, y, t) = P_1(x, y) + P_2(x, y)t^{p_2-p_1} + P_3(x, y)t^{p_3-p_1} + \ldots + P_s(x, y)t^{p_s-p_1}.$$

Es sei daran erinnert, dass $P_1(x, y)$ das Polynom ist, das bei der Puiseux-Reihenentwicklung den ersten Beitrag liefert. Sei

$$X = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \mathfrak{P}(v) = 0\} \text{ und } H_{t,a} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid t(v) = a\}.$$

Somit ist, zum Beispiel, $H_{t,0}$ die x,y Ebene im $\mathbb{C}^3$. Wenn man X mit $H_{t,a}$ schneidet, dann erhält man

$$X_a = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid t(v) = a, \mathfrak{P}(v) = 0\}.$$

Insbesondere sieht man:

$$X_1 = C_P \subset \text{affine Hyperebene } \{t = 1\} \subset \mathbb{C}^3$$

und

$$X_0 = C_{P_1} \subset \text{Hyperebene } \{t = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

Zur Erinnerung, $\mu = \frac{p}{q}$, betrachte die Operation von $\mathbb{C}^*$ auf dem $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ (z, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) & \mapsto & \begin{pmatrix} z^q a \\ z^p b \\ z^{-1} c \end{pmatrix} \end{array}$$

Für $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ sei $v' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dann gilt für $\alpha + \mu\beta = \eta_j$ und $z \in \mathbb{C}^*$:

$$x^\alpha y^\beta (z^q a, z^p b) = z^{q\alpha + p\beta} a^\alpha b^\beta = z^{q(\alpha+\mu\beta)} a^\alpha b^\beta = z^{q\eta_j} a^\alpha b^\beta = z^{p_j} a^\alpha b^\beta.$$

und damit:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P}(z \cdot v) & = & P_1(z^q a, z^p b) + P_2(z^q a, z^p b) z^{p_1 - p_2} + \ldots + P_s(z^q a, z^p b) z^{p_1 - p_s} \\ & = & z^{p_1} P_1(a, b) + P_2(a, b) z^{p_1} + \ldots + P_s(a, b) z^{p_1} \\ & = & z^{p_1} P(v'). \end{array}$$

Insbesondere sieht man für $c \in \mathbb{C}^*$:

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c^{-1} \cdot \begin{pmatrix} ac^q \\ bc^p \\ 1 \end{pmatrix} \in X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ac^q \\ bc^p \end{pmatrix} \in C_P.$$

Also gilt für alle $a \in \mathbb{C}^*$:

$$X_a = a^{-1} \cdot X_1.$$

Insbesondere sind die X_a, $a \in \mathbb{C}^*$, alle isomorph zu X_1 als affine Varietäten, und damit isomorph zu C_P.

Man kann sich also X vorstellen als eine Vereinigung $\bigcup_{a \in \mathbb{C}^*} X_a$ von Kurven, die alle isomorph sind zu C_P, zusammen mit EINER speziellen Kurve, der Kurve C_{P_1}.

Was bedeutet hier speziell? Bei der $\mathbb{C}^*$-Aktion muss man darauf achten, was mit der dritten Koordinate passiert, die Aktion $c \cdot X_a$ "verschiebt" eine Punkt in X_a auf einen Punkt in $X_{c^{-1}a}$. Ist aber $a = 0$, so ist $c \cdot X_0 = X_0$. Man kann das auch direkt nachrechnen:

$$P_1(z^q a, z^p b) = z^{p_1} P_1(a, b).$$

und damit
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in C_{P_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z^q a \\ z^p b \end{pmatrix} \in C_{P_1}$$
Man hat also eine Kurve mit mehr Symmetrien, d.h., man hat eine natrliche $\mathbb{C}^*$-Aktion auf C_{P_1}:
$$\mathbb{C}^* \times C_{P_1} \longrightarrow C_{P_1}$$
gegeben durch Automorphismen von C_{P_1} als affine Menge.

Wenn P_1 irreduzibel ist, dann gilt sogar: Sei $v \in C_{P_1}$, $v \neq 0$, dann ist $C_{P_1} = \overline{\mathbb{C}^* \cdot v}$. Dies ist dann ein Beispiel für eine torische Varietät und eine Degenerierung einer Varietät in eine torische Varietät.

Eines der Ziele den Newton-Okounkov Theorie ist es, diese Strategie: degeneriere eine Varietät in eine torische Varietät, zu verallgemeinern.

Zunächst noch ein paar Beispiele wie man Bewertungen konstruieren kann.

Definition 4.2.2 Sei Γ versehen mit einer Totalordnung. Wir schreiben für zwei Elemente $g, h \in \Gamma$: $g \gg h$ falls $g > mh$ für alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Eine Folge $(g_1, \ldots, g_k)$ von Elementen in Γ nennt man *streng ansteigend* falls $0 \ll g_1 \ll g_2 \ll \ldots \ll g_k$.

Beispiel 4.2.5 Sei $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ und sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die natürliche Basis von Γ als $\mathbb{Z}$-Modul. Die Folge $(e_1, \ldots, e_n)$ ist streng ansteigend bezüglich $>_{rlex}$, die Folge $(e_n, \ldots, e_1)$ ist streng ansteigend bezüglich $>_{lex}$.

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q(A)$. Sei Γ versehen mit einer Totalordnung. Die Elemente $f_1, \ldots, f_n \in A$ seien algebraisch unabhängig und sei $(\gamma_1, \ldots \gamma_n)$ eine streng ansteigende Folge in Γ.

Lemma 4.2.1 *Es gibt eine Bewertung $\nu : Q(A) \to \Gamma$, so dass $\nu(f_j) = \gamma_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$*

Beweis. Da die Elemente $f_1, \ldots, f_n$ algebraisch unabhängig sind, ist die Unteralgebra $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq A$ isomorph zu einem Polynomring. Da die Folge vom Elementen $(\gamma_1, \ldots \gamma_n)$ in Γ streng ansteigend ist, erzeugen die Elemente $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ eine freien $\mathbb{Z}$-Untermodul $G \subseteq \Gamma$.

Die Zuordnung, die jedem Monom $f_1^{m_1} \cdots f_n^{m_n}$ das Element $m_1\gamma_1 + \ldots + m_n\gamma_n$ in Γ zurodnet, kann man so natürlich zu einer Bewertung auf die Unteralgebra $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ erweitern: Betrachte zunächst den Isomorphismus
$$G \to \mathbb{Z}^n, \quad \sum_{i=1}^n a_i\gamma_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Aus Bemerkung 4.2.1 folgt, dass die (von Γ induzierte) Totalordnung auf G unter diesem Isomorphismus der rechten lexikographischen Ordnung $>_{rlex}$ auf dem $\mathbb{Z}^n$ entspricht. Die Bewertung auf $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ entspricht dann der $\mathbb{Z}^n$-wertigen Minimum-Bewertung. Diese Bewertung kann man (siehe Bemerkung 4.2.2) ausdehnen auf den Quotientenkörper. Nun gibt es (allgemeine Theorie der Bewertungen, siehe zum Beispiel Engler / Prestel, *Valued Fields*, Theorem 3.2) eine (nicht notwendigerweise eindeutige!) Ausdehnung der Bewertung auf die Körpererweiterung $Q(A)/\mathbb{K}(f_1, \dots, f_n)$. •

Übung 4.2.1 Wenn $\nu_1, \dots, \nu_r$ quasi-Bewertungen sind auf A mit Werten in Γ, dann ist

$$\nu : A\backslash\{0\} \to \Gamma, \quad f \mapsto \min\{\nu_1(f), \dots, \nu_r(f)\}$$

wieder ein quasi-Bewertung auf A mit Werten in Γ.

4.3 Projektive algebraische Mengen und Varietäten

Eine *projektive algebraische Menge* ist eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{P}^n$, die definiert wird als Nullstellengebilde von endlich vielen homogenen polynomialen Gleichungen. Anders gesagt, es gibt endlich viele homogene Polynome, bezweichnen wir sie mit $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, so daß

$$Y = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid f_1(v) = \ldots = f_r(v) = 0\}.$$

Sind Y und X projektive algebraische Mengen mit

$$Y=\{[v] \in \mathbb{P}^n \,|\, f_1(v) = \ldots = f_r(v) = 0\},\ X=\{[v] \in \mathbb{P}^n \,|\, g_1(v) = \ldots = g_s(v) = 0\}$$

dann sind auch $X \cup Y$ und $X \cap Y$ projektive algebraische Mengen mit

$$X \cup Y=\{[v] \in \mathbb{P}^n \,|\, (f_1g_1)(v) = (f_1g_2)(v) = \ldots = (f_rg_s)(v) = 0\}$$

und

$$X \cap Y=\{[v] \in \mathbb{P}^n \,|\, f_1(v) = \ldots = f_r(v) = g_1(v) = \ldots = g_s(v) = 0\}.$$

Weiter sind die leere Menge und der $\mathbb{P}^n$ projektive Mengen.

Jedes Polynom kann in die Summe seiner homogenen Teile zerlegt werden: $P(\underline{x}) = P_0(\underline{x}) + P_1(\underline{x}) + \ldots + P_r(\underline{x})$, wobei wir $(\underline{x})$ schreiben für $(x_0, \dots, x_n)$.

Ein Ideal J nennt man homogen wenn für jedes Polynom $P \in J$ auch alle seine homogenen Teile in I liegen. Anders formuliert: Der Polynmring

$$\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{j \geq 0} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_j$$

ist graduiert durch den Totalgrad der Monome, d.h. $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_j$ ist der Unterraum homogenen Polynome vom Grad j, und es gilt

$$\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_j \cdot \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_k \subseteq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_{j+k}$$

Ein Ideal J ist homogen dann und nur dann wenn

$$J = \bigoplus_{k \geq 0} J_k \quad \text{wobei } J_k = J \cap \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_k.$$

Ein Ideal, das erzeugt wird durch homogene Polynome ist sicher homogen. Umgekehrt, ein homogenes Ideal hat ein endliches homogenes Erzeugendensystem. Wie im affinen Fall bekommt man eine äquivalente Definition einer projektiven algebraischen Menge: Eine *projektive algebraische Menge* ist eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{P}^n$, die definiert wird als Nullstellengebilde eines homogenen Ideals $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\mathcal{V}(I) := \{v \in \mathbb{C}^n \mid f(v) = 0 \;\forall f \in I\}$$

Umgekehrt, ist $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Teilmenge (nicht notwendigerweise eine algebraische Menge), so sei

$$\mathcal{I}(Z) = \langle \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid f \text{ homogen}, f|_Z \equiv 0\} \rangle.$$

Dies ist offensichtlich ein homogenes Ideal. Als Konsequenz bekommt man die folgenden Abbildungen zwischen homogenen Idealen in Polynomringen und projektiven algebraischen Teilmengen:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{projektive algebraische} \\ \text{Mengen im } \mathbb{C}^m \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow^{\mathcal{I}} \\ \longleftarrow_{\mathcal{V}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{homogene Ideale in} \\ S = kx_0[x_1, \ldots, x_m] \end{array} \right\}$$

definiert durch

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathcal{I}(Y) := \langle f \text{ homogen}, f|_Y \equiv 0 \rangle \\ \mathcal{V}(I) = \{y \in \mathbb{P}^m \mid f(y) = 0 \,\forall f \in I\} & \longleftarrow & I \end{array} \tag{4.2}$$

Das Ideal $\mathcal{I}(Y)$ wird auch das *Verschwindungsideal* von Y genannt.

Bei den Abbildungen handelt es sich nicht um Bijektionen. Zum Beipiel sei $S^+ = \bigoplus_{j>0} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_j$, dann ist S^+ ein echtes Ideal aber (im Gegensatz zum affinen Fall) gilt $\mathcal{V}(S^+) = \emptyset$.

Übung 4.3.1 Der *homogene Nullstellensatz*: Zeigen Sie: Sei $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal und sei $P \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ homogen und nicht konstant. Wenn $P|_{\mathcal{V}(I)} \equiv 0$, dann gibt es ein $m > 0$, so dass $P^m \in I$. (Hinweis: übersetzen Sie das Problem in ein affines Problem und benützen Sie Hilberts Nullstellensatz.)

Wie im affinen Fall folgt mit dem Nullstellensatz:

Lemma 4.3.1 *Die Abbildung $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ induziert eine bijektive Abbildung zwischen projektiven algebraischen Mengen im $\mathbb{P}^n$ und Radikalidealen in $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, die verschieden sind von S^+.*

Definition 4.3.1 Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive algebraische Menge. Der Quotient

$$\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(Y) = \bigoplus_{j \geq 0} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_j/\mathcal{I}(Y)_j$$

ist eine graduierte Algebra, genannt der *homogene Koordinatenring* von Y.

Definition 4.3.2 Die *Zariski-Topologie* auf dem $\mathbb{P}^n$ ist die Topologie, die als offene Teilmengen genau die Komplemente der projektiven algebraischen Mengen nimmt. Auf einer projektiven algebraischen Menge $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ ist die *Zariski-Topologie* die Topologie auf Y induziert durch die Zariski-Topologie auf dem $\mathbb{P}^n$.

Dies ist eine Topologie, da der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen und die Vereinigung von beliebig vielen offenen Teilmengen wieder offen ist, und sowohl die leere als auch die offenen Teilmenge ist offen. Wir nehmen als Definition für irreduzibel diesmal die topologische Version (siehe Proposition 4.1.2):

Definition 4.3.3 Eine projektive algebraische Menge $Y \subset \mathbb{P}^n$ nennt man *irreduzibel*, wenn man sie nicht als Vereinigung von zwei abgeschlossenen echten Teilmengen schreiben kann.

Wie im affinen Fall zeigt man

Proposition 4.3.1 *Eine projektive algebraische Menge ist irreduzibel dann und nur dann wenn der homogene Koordinatenring keine Nullteiler hat.*

Beispiel 4.3.1 Sei $G = GL_3(\mathbb{C})$ und $V = M_3(\mathbb{C})$. Dann operiert G auf V durch Konjugation (Lineare Algebra II)

$$G \times M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C}), \quad (g, A) \mapsto gAg^{-1}.$$

Die Operation schickt Geraden auf Geraden, man bekommt eine induzierte Operation auf dem projektiven Raum:

$$G \times \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})) \to \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})), \quad (g, [A]) \mapsto [gAg^{-1}].$$

Sei $Y \subset \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C}))$ die Nullstellenmenge der folgenden Gleichungen:

$$Y = \left\{ [A] \in \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})) \mid \forall\, i, j = 1, \ldots, 3 : \sum_{k=1}^{3} x_{i,k} x_{k,j}(A) = 0 \right\}.$$

Die definierenden Gleichungen sind homogen, vom Grad 2, definieren also eine projektive algebraische Menge. Was für Matrizen sind das genau? Die Gleichungen kommen von der folgenden Identität:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \left((\sum_{k=1}^{3} x_{i,k} x_{k,j})_{i,j} \right),$$

die Menge Y besteht also aus allen Geraden durch Matrizen, deren Quadrat die Nullmatrix ist. Es sind also Matrizen, die nilpotent sind (somit sind alle Eigenwerte sind gleich Null). Die Jordan-Normalform ist also entweder

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da bereits das Quadrat der Matrix die Nullmatrix ist, folgt:

$$Y = \left\{ \left[g \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \right] \mid g \in GL_3(\mathbb{C}) \right\}.$$

Das Ideal

$$\langle \sum_{k=1}^{3} x_{i,k}x_{k,j} \mid i,j = 1,\ldots,3\rangle \subset \mathbb{C}[x_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq 3]$$

ist kein Radikalideal. Zum Beispiel ist $\operatorname{Tr} X = x_{1,1} + x_{2,2} + x_{3,3}$ sicher eine Funktion, die auf den nilpotenten Matrizen verschwindet, aber sie liegt nicht im Ideal, aus Gradgründen. Man kann zeigen:

$$\sqrt{I} = \langle \det X, \operatorname{Tr} X, \sum_{k=1}^{3} x_{i,k}x_{k,j} \mid i,j = 1,\ldots,3\rangle$$

4.3.1 Tensor– und Dachprodukt von Vektorräumen

Wir geben noch eine andere Interpretation des Orbits, aber zunächst etwas Wiederholung: Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit der natürlichen Basis $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Dann kann man daraus mehrere neue Vektorräume konstruieren:
• der Dualraum V^* mit der dualen Basis $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$.
• das Tensorprodukt $U \otimes W$ von zwei Vektorräumen U und W, mit Basen $\{u_1,\ldots,u_n\}$ respektive $\{w_1,\ldots,w_m\}$ ist ein Vektorraum, der besteht aus Linearkombinationen von Ausdrücken der Form $u \otimes w$, $u \in U, w \in W$, hat als Basis die Elemente $u_i \otimes w_j$, $1 \leq i \leq n$, $1, \leq j \leq m$, und genügt den Rechenregeln:

$$(u_1 + u_2) \otimes (w_1 + w_2) = u_1 \otimes w_1 + u_1 \otimes w_2 + u_2 \otimes w_1 + u_2 \otimes w_2$$

sowie $\lambda(u \otimes w) = (\lambda u) \otimes w = u \otimes (\lambda w)$. Die formale Definition: $U \otimes W$ ist der bis auf eindeutige Isomorphie bestimmte Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:
– es gibt eine bilineare Abbildung $\iota : U \times W \to U \otimes W$, so daß
– zu jeder bilineare Abbildung $\phi : U \times W \to M$ in einen Vektorraum M gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tilde{\phi} : U \otimes W \to M$ mit

$$\begin{array}{ccc} U \times W & \to^{\phi} & M \\ \downarrow^{\iota} & \nearrow \tilde{\phi} & \\ U \otimes W & & \end{array}$$

kommutiert.

• Das Tensorprodukt $\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^n)^*$ ist nichts weiter als der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Betrachte zunächst die lineare Abbildung

$$V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V), \quad v \otimes \ell \mapsto \phi_{v,\ell} : V \to V,\ w \mapsto \ell(w)v.$$

(Man rechnet leicht nach: die Abbildung $V \times V^* \to \mathrm{End}(V)$, $(v, \ell) \mapsto \phi_{v,\ell}$ ist bilinear, wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ist die Abbildung oben dann linear). Auf den Basiselementen ergibt die Abbildung

$$e_i \otimes e_j^* \mapsto \phi_{e_i,e_j^*} = \text{Abbildung schickt } e_j \text{ nach } e_i, \text{ sonst nach } = 0 = E_{i,j}.$$

Die Abbildung ist surjektiv, Räume haben gleiche Dimension, also ein Isomorphismus.
• Das Dachprodukt $\Lambda^k V$ ist eine Vektorraum, der aus Linearkombinationen von Ausdrücken der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ besteht, mit Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$$

und den Rechenregeln: zu den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sei $A = (v_1 \mid \ldots \mid v_k) = (v_{i,j})$ die Matrix, die diese Vektoren als Spalten hat. Für $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ sei $p_{\underline{i}}(A)$ die Determinante des Minors von A bestehend aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_k$. Dann gilt

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} p_{\underline{i}}(A) e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}.$$

Auf Grund der Rechenregeln gilt zum Beispiel $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0$ dann und nur dann wenn die Vektoren linear abhängig sind (LA I), und für $\sigma \in S_k$ gilt

$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k.$$

Wir sehen insbesondere: $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$ impliziert $v_1, \ldots, v_k$ spannen einen k-dimensionalen Unterraum auf. Umgekehrt, ist $U \subset V$ ein k-dimensionaler Unterraum und sind $\{u_1, \ldots, u_k\}$ und $\{w_1, \ldots, w_k\}$ Basen von U, dann gilt

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_k = (\det B) w_1 \wedge \ldots \wedge w_k,$$

wobei B die Basiswechelmatrix ist, die die $u_1, \ldots, u_k$ als Linearkombinationen in den $w_1, \ldots, w_k$ beschreibt. Die Menge

$$Gr_{k,n} := \{[v_1 \wedge \ldots \wedge v_k] \mid v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

ist also die Menge aller Unterräume der Dimension k. Die formale Definition lautet: $\Lambda^k V$ ist der bis auf eindeutige Isomorphie bestimmte Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:
– es gibt eine alternierende multilineare Abbildung

$$\iota : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k} \to \Lambda^k V,$$

so daß es
– zu jeder alternierenden Abbildung $\phi : V \times V \times \ldots \times V \to M$ in einen Vektorraum M es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tilde{\phi} : \Lambda^k V \to M$ gibt mit

$$\begin{tikzcd} V \times V \times \ldots \times V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"] & M \\ \Lambda^k V \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
• $(\Lambda^k V)^* \simeq \Lambda^{n-k} V$ – der Isomorphismus folgt aus

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k V \times \Lambda^{n-k} V & \to & \Lambda^n V = \mathbb{C} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \simeq \mathbb{C} \\ (\sum_{\underline{i}=1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{\underline{i}} e_{\underline{i}}, \sum_{\underline{j}=1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-k} \leq n} b_{\underline{j}} e_{\underline{j}}) & \mapsto & \sum_{\substack{\underline{i}=1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \\ \underline{j}=1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-k} \leq n}} a_{\underline{i}} b_{\underline{j}} e_{\underline{i}} \wedge e_{\underline{j}} \end{array}$$

4.3.2 Die Fahnenvarietät $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$

Als Menge ist die Fahnenvarietät $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$ definiert als

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) := \{(U_1, U_2) \mid U_1 \subset U_2 \,\text{Unterräume des}\, \mathbb{C}^3 \,, \dim U_i = i, \, i = 1, 2\} \,.$$

Die Gruppe $GL_3(\mathbb{C})$ operiert in natürlicher Weise auf $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$: Ist $(U_1, U_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$ und $g \in GL_3(\mathbb{C})$, dann ist $gU_1 = \{gu \mid u \in U_1\}$ auch wieder eine Gerade, $gU_2 = \{gu \mid u \in U_2\}$ ist wieder ein zweidimensionaler Unterraum und $gU_1 \subset gU_2$. Es folgt: $(gU_1, gU_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$. Wir bekommen somit eine Operation

$$\begin{array}{ccc} GL_3(\mathbb{C}) \times \mathcal{F}(\mathbb{C}^3) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{C}^3) \\ (g; (U_1, U_2)) & \mapsto & (gU_1, gU_2). \end{array}$$

Sei $(U, W) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$ ein Element, d.h., U ist eine Gerade in $\mathbb{C}^3$, W ist ein zweidimensionaler Unterraum im $\mathbb{C}^3$, und $U \subset W$. Man kann dann einen Basisvektor $u \in U$ wählen, und diesen ergänzen mit einem Vektor $w \in W$ zu einer Basis $\{u, w\}$ von W. Die Vektoren u und w sind linear unabhängig, es gibt also ein Element $g \in GL_3(\mathbb{C})$ mit $ge_1 = u$ und $ge_2 = w$. Wenn man also setzt $U_0 = \langle e_1 \rangle$ und $W_0 = \langle e_1, e_2 \rangle$, dann ist $(U_0, W_0) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$, und

$$(U, W) = g(U_0, W_0).$$

Mit anderen Worten:

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) = GL_3(\mathbb{C}) \cdot (U_0, W_0).$$

ist eine Bahn unter der Aktion von $GL_3(\mathbb{C})$.

Das erinnert an die in Beispiel 4.3.1 betrachtete projektive Varietät. Um zu zeigen, dass die beiden gleich sind, betrachten wir zunächst den projektiven Raum $\mathbb{P}^2$. Der $\mathbb{P}^2$ ist der projektive Raum der Geraden = eindimensionalen Unterräume im $\mathbb{C}^3$. Betrachte nun den Raum $\Lambda^2\mathbb{C}^3$. Der Raum hat als Basis die Vektoren $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$. Auf Grund der Rechenregeln gilt

$$\begin{aligned} a(e_1 \wedge e_2) + b(e_1 \wedge e_3) + c(e_2 \wedge e_3) &= e_1 \wedge (ae_2 + be_3) + ce_2 \wedge e_3 \\ &= e_1 \wedge (ae_2 + be_3) + \tfrac{c}{b} e_2 \wedge (ae_2 + be_3) \\ &= (e_1 + \tfrac{c}{b} e_2) \wedge (ae_2 + be_3). \end{aligned}$$

für $b \neq 0$, und für $b = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} ae_1 \wedge e_2 + ce_2 \wedge e_3 &= ae_1 \wedge e_2 - ce_3 \wedge e_2 \\ &= (ae_1 - ce_3) \wedge e_2. \end{aligned}$$

Oder, anders ausgedrückt, in $\Lambda^2\mathbb{C}^3$ läßt sich jedes Element schreiben als $v \wedge w$, wobei die beiden Vektoren linear unabhängig voneinander sind. Zwei linear unabhängige Vektoren bilden die Basis eines zweidimensionalen Unterraums $U \subset \mathbb{C}^3$. Nun sind $\{v, w\}$ und $\{u, x\}$ Basen des gleichen Vektorraums dann und nur dann wenn es Linearkombinationen gibt

$$\begin{aligned} u &= av + bw \\ x &= cv + dw \end{aligned} \quad \text{mit } \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Aber dann gilt

$$u \wedge x = (av + bw) \wedge (cv + dw) = (ad - bc) v \wedge w = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} v \wedge w$$

Somit ist $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^3)$ nichts weiter als die Menge aller zweidimensionalen Unterräume des $\mathbb{C}^3$.

Die Aktion der $GL_n(\mathbb{C})$ auf dem $\mathbb{C}^n$ schickt Geraden auf Geraden und induziert eine Aktion auf dem $\mathbb{P}^{n-1}$ durch $g \cdot [v] := [gv]$. Natürlich schickt ein $g \in GL_n(\mathbb{C})$ einen k-dimensionalen Unterraum U auf einen k-dimensionalen Unterraum gU:

$$gU := \{gu \mid u \in U\}.$$

Sieht man diese Aktion auch auf $\Lambda^k\mathbb{C}^n$? Erinnern wir uns an die formale Definition: sei $V = \mathbb{C}^n$, dann ist $\Lambda^k V$ der bis auf eindeutige Isomorphie bestimmte Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:
– es gibt eine alternierende multilineare Abbildung

$$\iota : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k} \to \Lambda^k V,$$

so daß es
– zu jeder alternierenden multilineare Abbildung $\phi : V \times V \times \ldots \times V \to M$ in einen Vektorraum M es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tilde{\phi} : \Lambda^k V \to M$ gibt mit

$$\begin{array}{ccc} V \times V \times \ldots \times V & \to^{\phi} & M \\ \downarrow^{\iota} & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \Lambda^k V & & \end{array}$$

kommutiert.
Sei nun $g \in GL_n(\mathbb{C})$. Dann ist

$$\begin{array}{rccl} \iota \circ g : & V \times V \times \ldots \times V & \to & \Lambda^k V \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & (gv_1) \wedge (gv_2) \wedge \ldots \wedge (gv_k) \end{array}$$

auch wieder multilinear und alternierend, und somit wissen wir: es gibt eine lineare Abbildung $\tilde{g}$

$$\begin{array}{ccc} V \times V \times \ldots \times V & \to^{\iota \circ g} & \Lambda^k V \\ \downarrow^{\iota} & \nearrow \tilde{g} & \\ \Lambda^k V & & \end{array}$$

mit der Eigenschaft:

$$\tilde{g}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = (gv_1) \wedge (gv_2) \wedge \ldots \wedge (gv_k).$$

Wir lassen im Folgenden das “$\sim$” oft weg und schreiben einfach $g(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)$.

Was bedeutet das für Unterräume der Dimension k? Sei $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset U$ eine Basis, dann ist $\{(gv_1), \ldots, (gv_k)\} \subset gU$ eine Basis. Im $\Lambda^k\mathbb{C}^n$ gehört zu U die Gerade $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$, und zu gU die Gerade

$$(gv_1) \wedge (gv_2) \wedge \ldots \wedge (gv_k) = g(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k),$$

diese Aktion entspricht also genau den Wünschen.

Mit dem gleichen Argument behandelt man diese Frage beim Tensorprodukt. Das ist der bis auf eindeutige Isomorphie eindeutige bestimmte Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:
– es gibt eine bilineare Abbildung $\iota : U \times W \to U \otimes W$, so daß
– zu jeder bilineare Abbildung $\phi : U \times W \to M$ in einen Vektorraum M gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tilde{\phi} : U \otimes W \to M$ mit

$$\begin{array}{ccc} U \times W & \to^{\phi} & M \\ \downarrow^{\iota} & \nearrow \tilde{\phi} & \\ U \otimes W & & \end{array}$$

kommutiert. Sei nun $g \in GL(U)$, $h \in GL(V)$, dann ist

$$\begin{array}{rccc} \iota \circ (g,h) : & U \times W & \to & U \otimes W \\ & (u,w) & \mapsto & (gu) \otimes (hw) \end{array}$$

auch wieder multilinear, und somit wissen wir: es gibt eine lineare Abbildung $\widetilde{(g,h)}$ mit

$$\begin{array}{ccc} U \times W & \to^{\iota \circ (g,h)} & U \otimes W \\ \downarrow^{\iota} & \nearrow \widetilde{(g,h)} & \\ U \otimes W & & \end{array}$$

kommutiert. Insbesondere gilt $\widetilde{(g,h)}(u \otimes w) = (gu) \otimes (hw)$, deswegen lässt man im Allgemeinen das "$\sim$" einfach weg und schreibt

$$(g,h)(u \otimes w) = (gu) \otimes (hw).$$

Zurück zur Fahnenvarietät $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$. Betrachten wir $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3)$, und ein Element darin von der Form $[v \otimes (u_1 \wedge u_2)]$. So ein Element ist nichts weiter als ein Paar (U, U'), wobei U der von v aufgespannte eindimensionale Unterraum ist, und U' der von u_1 und u_2 aufgespannte zweidimensionale Unterraum ist. Nehmen wir das Element $[e_1 \otimes (e_1 \wedge e_2)]$, so entspricht das Element dem

Paar $(U_0, W_0) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$. Gemäß der obigen Beschreibung haben wir eine Operation der $GL_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccc} GL_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3 \\ (g, u \otimes (v \wedge w)) & \mapsto & (gu) \otimes ((gv) \wedge (gw)). \end{array}$$

Diese Operation ist linear, man bekommt also eine induzierte Operation

$$\begin{array}{ccc} GL_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3) & \to & \mathbb{P}(\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3) \\ (g, [u \otimes (v \wedge w)]) & \mapsto & [(gu) \otimes ((gv) \wedge gw))]. \end{array}$$

Nun haben wir gesehen: $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) = GL_3(\mathbb{C}) \cdot (U_0, W_0)$.

Die Operation der $GL_3(\mathbb{C})$ oben auf $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3)$ entspricht bei einem Tensor der Form $[v \otimes u \wedge w]$ in der ersten Komponente genau der Aktion auf Geraden und in der zweiten der auf 2-dimensionalen Unterräumen. Man bekommt also:

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) = GL_3(\mathbb{C}) \cdot [e_1 \otimes (e_1 \wedge e_2)] \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^3).$$

Um die Verbindung zum Beispiel 4.3.1 herzustellen, muss man sich nur noch erinnern:

$$\Lambda^2\mathbb{C}^3 \simeq (\mathbb{C}^3)^*$$

und unter diesem Isomorphismus gilt $e_1 \wedge e_2 \mapsto e_3^*$, denn

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 = 0,\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 = 0,\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \widehat{=} 1.$$

Also

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) = GL_3(\mathbb{C}) \cdot [e_1 \otimes e_3^*] \subset \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})).$$

Es bleibt nur noch anzumerken, dass die Matrix zu $e_1 \otimes e_3^*$ unter dem Isomorphismus $\mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)^* \simeq M_3(\mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix vom Rang eins ist, also in dem Konjugationsklasse der Matrix im Beispiel 4.3.1 liegt, und somit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{C}^3) &= \left\{ \left[g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \right] \mid g \in GL_3(\mathbb{C}) \right\} \\ &= \left\{ \left[g \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \right] \mid g \in GL_3(\mathbb{C}) \right\}. \end{aligned}$$

4.3.3 Die Grassmann Varietät $Gr_2(\mathbb{C}^4)$

Wir haben vorher gesehen, dass jedes Element in $\Lambda^2\mathbb{C}^3$ verschieden von 0 sich schreiben lässt als $v\wedge w$ mit v, w linear unabhängig. Das gilt im Allgemeinen nicht mehr. Um das besser zu verstehen, seien

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix},$$

und betrachte

$$\begin{aligned} v\wedge w = \det\begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix} e_1\wedge e_2 + \det\begin{pmatrix} a & p \\ c & r \end{pmatrix} e_1\wedge e_3 + \det\begin{pmatrix} a & p \\ d & s \end{pmatrix} e_1\wedge e_4 \\ + \det\begin{pmatrix} b & q \\ c & r \end{pmatrix} e_2\wedge e_3 + \det\begin{pmatrix} b & q \\ d & s \end{pmatrix} e_2\wedge e_4 + \det\begin{pmatrix} c & r \\ d & s \end{pmatrix} e_3\wedge e_4. \end{aligned}$$

Wenn sich jeder Vektor in $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ als $v\wedge w$ schreiben lassen würde, könnte man zu einem Element $\sum_{1\le i<j\le 4} a_{i,j}e_i\wedge e_j$ die Gleichungen lösen und passende komplexe Zahlen $a, b, \ldots, r, s$ finden.

Nun gilt aber $(v\wedge w)\wedge(v\wedge w) = 0$ (in $\Lambda^4\mathbb{C}^4$). Also wenn

$$v\wedge w = \sum_{1\le i<j\le 4} x_{i,j}e_i\wedge e_j,$$

so folgt

$$\Big(\sum_{1\le i<j\le 4} x_{i,j}e_i\wedge e_j\Big)\wedge\Big(\sum_{1\le i<j\le 4} x_{i,j}e_i\wedge e_j\Big) = (x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3})e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4.$$

Somit folgt: sei

$$p(x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}) = x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3} \in \mathbb{C}[\Lambda^2\mathbb{C}^4].$$

Dann lässt sich ein Element $u \in \Lambda^2\mathbb{C}^4$ schreiben als $u = v\wedge w$ mit $v, w \in \mathbb{C}^4$ nur wenn gilt

$$u \in \mathcal{V}(p(x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}))$$

Damit ist das Verschwinden von p eine notwendige Bedingung. Man kann umgekehrt zeigen, dass dies sogar eine hinreichende Bedingung ist: sei

$$u = a_{1,2}e_1\wedge e_2 + a_{1,3}e_1\wedge e_3 + a_{1,4}e_1\wedge e_4 + a_{2,3}e_2\wedge e_3 + a_{2,4}e_2\wedge e_4 + a_{3,4}e_3\wedge e_4 \in \Lambda^2\mathbb{C}^4$$

mit $p(u) = 0$. Ist $u \neq 0$, so ist zumindest einer der Koeffizienten ungleich Null. Ohne Einschränkung sei zunächst $a_{1,2} \neq 0$, und, da p homogen ist, sei sogar $a_{1,2} = 1$. Sei dann

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a_{2,3} \\ -a_{2,4} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \end{pmatrix},$$

dann gilt $v \wedge w = u$, denn der Koeffizient von $e_3 \wedge e_4$ in $v \wedge w$ ist $-a_{2,3}a_{1,4} + a_{1,3}a_{2,4} = a_{3,4}$, da nach Voraussetzung $p(u) = 0$ und $a_{1,2} = 1$. Ist $a_{1,2} = 0$, so verfährt man auf die gleiche Weise, aber beginnt mit einem anderem Startpaar von 1en in u und v: Ist $a_{i,j} \neq 0$, so sei ohne Einschränkung $a_{i,j} = 1$, im Vektor v sei der i-te Eintrag gleich 1, der j-te gleich 0, und in w sei der i-te Eintrag gleich 0 und der j-te gleich 1. Die restlichen kann man wie oben auffüllen. Das $v \wedge w = u$ folgt dann ebenso wieder aus der Gleichung $p(u) = 0$.

Somit ist

$$Gr_2(\mathbb{C}^4) = \mathcal{V}(p(x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4})) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$$

eine projektive Varietät.

4.3.4 Die Grassmann Varietät $Gr_2(\mathbb{C}^n)$

Wir verallgemeinern die obigen Argumente um eine Beschreibung der $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ als projektive Varietät zu bekommen. Sei

$$u = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2\mathbb{C}^n \tag{4.3}$$

eine generisches Element. Wir schreiben die Koordinatenfunktionen auf dem $\Lambda^2\mathbb{C}^n$ als $x_{i,j}$ für $1 \leq i < j \leq n$ und $1 \leq k < \ell \leq n$, wobei

$$x_{i,j}(e_k \wedge e_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{falls } (i,j) \not(k,\ell) \end{cases}$$

Die $x_{i,j}$ sind also die duale Basis zur Basis gegeben durch die

$$\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Für das Element u in (4.3) gilt also $x_{i,j}(u) = a_{i,j}$. Der Koordinatenring des Vektorraums $\Lambda^2\mathbb{C}^n$ ist also der Polynomring in den Variablen $x_{i,j}$:

$$\mathbb{C}[\Lambda^2\mathbb{C}^n] = \mathbb{C}[x_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n]$$

Wenn $[u]$ ein Element in $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ ist, dann gibt es $v, w \in \mathbb{C}^n$ mit $u = v \wedge w$. Dann gilt aber auch $u \wedge u = v \wedge w \wedge v \wedge w = 0$ in $\Lambda^2\mathbb{C}^n$, oder, anders gesagt

$$\begin{aligned} u \wedge u &= \left(\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} e_i \wedge e_j\right) \wedge \left(\textstyle\sum_{1\leq k<l\leq n} a_{k,l} e_k \wedge e_l\right) \\ &= \textstyle\sum_{1\leq p<q<r<s\leq n} (a_{p,q}a_{r,s} - a_{p,r}a_{q,s} + a_{p,s}a_{q,r}) e_p \wedge e_q \wedge e_r \wedge e_s \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da die $\{e_p \wedge e_q \wedge e_r \wedge e_s \mid 1 \leq p < q < r < s \leq n\}$ linear unabhängig sind, bedeutet das:

$$[u] \in Gr_2(\mathbb{C}^n) \Rightarrow \forall\, 1 \leq p < q < r < s \leq n : (x_{p,q}x_{r,s} - x_{p,r}x_{q,s} + x_{p,s}x_{q,r})(u) = 0.$$

Sei nun $I = \langle x_{p,q}x_{r,s} - x_{p,r}x_{q,s} + x_{p,s}x_{q,r} \mid 1 \leq p < q < r < s \leq n\rangle$ das von diesen quadratischen Funktionen erzeugte Ideal, dann haben wir

$$Gr_2(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{V}(I).$$

Um zu zeigen, dass $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ eine projektive Varietät ist, bleibt die Gleichheit zu zeigen. Sei also

$$u = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} e_i \wedge e_j \in \mathcal{V}(I) - \{0\}$$

Wir beschränken uns auf den Fall $a_{1,2} \neq 0$, und, wegen der Homogenität kann man sogar annehmen $a_{1,2} = 1$. Sei dann

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a_{2,3} \\ -a_{2,4} \\ \vdots \\ -a_{2,n} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} v \wedge w &= e_1 \wedge e_2 + \left(\textstyle\sum_{j\geq 3} a_{1,j} e_1 \wedge e_j\right) + \left(\textstyle\sum_{k\geq 3} a_{2,j} e_2 \wedge e_j\right) \\ &\qquad + \textstyle\sum_{1\leq k<\ell\leq n} \det \begin{pmatrix} -a_{2,k} & a_{1,k} \\ -a_{2,\ell} & a_{1,\ell} \end{pmatrix} e_k \wedge e_\ell \\ &= u, \end{aligned}$$

denn aus $u \in \mathcal{V}(I)$ folgt $a_{1,2}a_{k,\ell} - a_{1,k}a_{2,\ell} + a_{1,\ell}a_{2,k} = 0$ und damit

$$\det \begin{pmatrix} -a_{2,k} & a_{1,k} \\ -a_{2,\ell} & a_{1,\ell} \end{pmatrix} = a_{1,k}a_{2,\ell} - a_{1,\ell}a_{2,k} = a_{1,2}a_{k,\ell} = a_{k,\ell},$$

da, nach Annahme, $a_{1,2} = 1$. Wie im Fall der $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ ist die Einschränkung auf $a_{1,2} = 1$, man verallgemeinert die Argumente wie oben auf dem Fall $\exists\,(i,j): \ a_{i,j} = 1$. Damit folgt:

Proposition 4.3.2 $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ *ist eine projektive Varietät. Genauer,*

$$Gr_2(\mathbb{C}^n) = \mathcal{V}\left(\langle x_{p,q}x_{r,s} - x_{p,r}x_{q,s} + x_{p,s}x_{q,r} \mid 1 \leq p < q < r < s \leq n\rangle\right)$$

4.4 Der Körper der rationalen Funktionen und die Dimension einer Varietät

Der Körper der rationalen Funktion auf $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}(x)$, er besteht aus Quotienten $\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$, von Polynomen. Man identifiziert dabei $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\frac{r(x)}{s(x)}$ falls

$$p(x)s(x) = q(x)r(x).$$

Etwas abstrakter formuliert: $p(x)$ und $q(x)$ sind reguläre Funktionen auf $\mathbb{C}$. Es gibt eine offene und nicht leere Teilmenge auf der $q(x)$ nicht verschwindet, so dass $\frac{p(x)}{q(x)}$ auf U eine wohldefinierte Funktion ist. Das ist der Hintergrund zu der folgenden Definitionen.

Definition 4.4.1 Sei X eine affine Varietät. Der Körper der rationalem Funktionen $\mathbb{C}(X)$ auf X ist der Quotientenkörper $Q(\mathbb{C}[X])$.

Bemerkung 4.4.1 Ein Element $f \in \mathbb{C}(X)$ läßt sich schreiben als Quotient $f = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{C}[X]$ und definiert damit auf der offenen Teilmenge $U_q := \{x \in X \mid q(x) \neq 0\}$ eine wohldefinierte Abbildung

$$U_q \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Wenn nun auch gilt $f = \frac{r}{s}$, so definiert f auch auf der offenen Teilmenge $U_s := \{x \in X \mid s(x) \neq 0\}$ eine wohldefinierte Abbildung

$$U_s \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{s(x)}{r(x)}.$$

Die formale Bedingung

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{r} \text{ in } Q(\mathbb{C}[X]) \text{ falls } pr = qs \text{ in } \mathbb{C}[X]$$

läßt sich geometrisch wie folgt interpretieren: da X irreduzibel ist, haben zwei offene Teilmengen, in diesem Fall U_q und U_s, einen nicht leeren Durchschnitt. Auf diesem Schnitt gilt also:

$$\forall\, x \in U_q \cap U_s : f(x) = \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von f in der "Menge der Brüche $\frac{u}{v}$" mit $u, v \in \mathbb{C}[X]$. In der algebraischen Geometrie wird der Ansatz umgekehrt genommen: Man nimmt als Körper der rationalen Funktionen die Äquivalenzklassen von "vernünftigen Abbildungen" nach $\mathbb{C}$. Um zu erklären was vernünftig heißt, zunächst die Erklärung was regulär in einem Punkt bedeutet: eine Abbildung $\phi : X \to \mathbb{C}$ heißt *regulär* in $x \in X$, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $g(u) \neq 0 \,\forall\, u \in U$, so daß $\phi(u) = \frac{f(u)}{g(u})\,\forall u \in U$. Man kann zeigen (mit etwas kommutativer Algebra): $\phi : X \to \mathbb{C}$ ist regulär in jedem Punkt von X dann und nur dann wenn $\phi \in \mathbb{C}[X]$. Nun zu "vernünftigen Abbildungen": das sind Abbildungen $\phi : U \to \mathbb{C}$, die nur auf einer offenen (nicht leeren) Teilmenge von X definiert sind, und die regulär sind in jedem Punkt von U. Man definiert dann Äquivalenzklassen $(\phi, U) \sim (\phi', U')$ wenn $\phi|_{U \cap U'} = \phi'|_{U \cap U'}$. Mit noch mehr kommutativer Algebra kann man dann zeigen: dieser Körper ist isomorph zum Quotientenkörper.

Wir kommen nun zu projektiven Varietäten. Sei $Y \subset \mathbb{P}(V)$ eine projektive Varietät und sei $\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[V]/\mathcal{I}(Y)$ der homogene Koordinatenring. Hat man zwei Elemente $p, q \in \mathbb{C}[Y]$, $q \neq 0$, so kann man mit ihnen Abbildungen (zumindest auf einer offenen Teilmenge U von Y) $f = \frac{p}{q} : U \to \mathbb{C}$ konstruieren falls p und q homogen sind, und beide den gleichen Grad haben: sei

$$U_q = \{y \in Y \mid q(y) \neq 0\} \subset Y,$$

dann ist die Abbildung

$$f : U_q \to \mathbb{C}, \quad [v] \mapsto \frac{p(v)}{q(v)}$$

wohldefiniert. Natürlich hängt sowohl $p(v)$ als auch $q(v)$ ab von der Wahl des Repräsentanten v von $[v]$. Aber da p und q homogen sind und vom gleichen Grad (sagen wir ℓ) sind, folgt $p(\lambda v) = \lambda^\ell p(v)$, $q(\lambda v) = \lambda^\ell q(v)$, also

$$\frac{p(\lambda v)}{q(\lambda v)} = \frac{\lambda^\ell p(v)}{\lambda^\ell q(v)} = \frac{p(v)}{q(v)},$$

das Ergebnis ist also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Definition 4.4.2 Sei Y eine projektive Varietät. Der Körper der rationalem Funktionen $\mathbb{C}(Y)$ auf Y ist der Körper

$$\mathbb{C}(Y) = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \text{ homogen, gleicher Grad, } q \neq 0\right\} / (\frac{p}{q} \sim \frac{r}{s} \text{ falls } ps = qr).$$

Übung 4.4.1 Zeigen Sie, dass dies ein Körper ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}(Y)$ aufgefaßt werden kann als der Unterkörper von $Q(\mathbb{C}[Y])$, der erzeugt wird von den Elementen $\frac{p}{q}$ mit p, q homogen, gleicher Grad, $q \neq 0$.

Bemerkung 4.4.2 Wie im affinen Fall, kann man die regulären und rationalen Funktionen auch anders definieren. Eine Abbildung $\phi : X \to \mathbb{C}$ heißt *regulär* in $x \in X$, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $f, g \in \mathbb{C}[X]$, homogen, vom gleichen Grad, $g(u) \neq 0 \,\forall\, u \in U$, so daß $\phi(u) = \frac{f(u)}{g(u})\forall u \in U$. Den Körper der rationalen Funktionen definiert man dann als die Menge aller Äquivalenzklassen (U, ϕ), wobei $U \subset X$ eine offenene Teilmenge ist, $\phi : U \to \mathbb{C}$ ist regulär in jedem Punkt von U, und $(\phi, U) \sim (\phi', U')$ wenn $\phi|_{U\cap U'} = \phi'|_{U\cap U'}$. Mit noch mehr kommutativer Algebra kann man dann zeigen: dieser Körper ist isomorph zu $\mathbb{C}(Y)$.

Beispiel/Übung 4.4.1 Wie in Beispiel 2.1 sei

$$U_0 = \{s = [s_0, \ldots, s_n] \in \mathbb{P}^n \mid s_0 \neq 0\} (= \{s = [1, s_1, \ldots, s_n] \mid s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}\}).$$

Dann ist U_0 eine affine Varietät, isomorph zum $\mathbb{C}^n$, und damit ist $\mathbb{C}(U_0) = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$. Ist $\frac{p}{q} \in \mathbb{C}(U_0)$, so kann man p und q so homogenisieren, dass sie beide den gleichen Grad haben: man fügt an jedes Monom in p respektive q die entsprechende Potenz von x_0 dazu, die Einschränkung auf U_0 (man setzt ohne Einschränkung die Koordinate $s_0 = 1$) ergibt in jedem Fall die Polynome p und q zurückt. Umgekehrt, gegeben homogene Polynome $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, dann ist die Einschränking $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}|_{\{x_0=1\}} \in \mathbb{C}(U_0)$. Zeigen Sie: die Korrespondenz $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ induziert einen Isomorphismus $\mathbb{C}(U_0) \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$.

Bemerkung 4.4.3 Funktionenkörper affiner/projektiver Varietäten Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und sei $U_i \subset \mathbb{P}^n$ wie in 4.4.1, $i = 0, \dots, n$. Da $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0} U_i$, gibt es ein i mit $U_i \cap Y \neq \emptyset$. Ohne Einschränkung sei $Y_0 = U_0 \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist Y_0 eine affine Varietät. Sei (U', ϕ) eine rationale Funktion für Y_0, sagen wir $\phi = \frac{f}{g}$ mit $f, g \in \mathbb{C}[U_0] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Dann kann man f, g homogenisieren, so daß $\tilde{f}, \tilde{g}$ vom gleichen Grad sind, so daß $\frac{f}{g} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ auf U. Da U' offen ist in U_0 ist U' auch offen in Y. Somit ist $(U', \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}})$ eine rationale Funktion auf Y. Umgekehrt, ist $(U', \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}})$ eine rationale Funktion auf Y, dann sei $U'' = U_0 \cap U'$ und f, g seinen die Dehomogenisierungen von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ (d.h.: $x_0 = 1$). Dann ist $(U'', \frac{f}{g})$ eine rationale Funktion auf Y_0. Man rechnet nach, dass "Homogenisierung" und "Dehomogenisierungen" jeweils Äquivalenzklassen auf Äquivalenzklassen schicken, und somit $\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(Y_0)$

Sei $\mathbb{C}(X)$ der Körper der rationalen Funktionen einer affinen oder projektiven Varietät. Dann ist $\mathbb{C}(X)$ als Körper über $\mathbb{C}$ endlich erzeugt, insbesondere ist der Transzendenzgrad von $\mathbb{C}(X)$ als Körper über $\mathbb{C}$ endlich.

Definition 4.4.3 Die *Dimension* $\dim X$ einer affinen oder projektiven Varietät X ist der Transzendenzgrad von $\mathbb{C}(X)$ als Körper über $\mathbb{C}$.

Beispiel 4.4.1 Die Dimension von $X = \mathbb{C}^n$ ist n, die Dimension von $Y = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ ist auch n.

Anhang zur Dimension

Die folgenden Beispiele und Sätze werden ohne Beweis präsentiert, man braucht dazu etwas mehr an kommutativer Algebra. Die Beweise findet man in jedem Buch über Algebraische Geometrie.

Proposition 4.4.1 *Eine Varietät $X \subset \mathbb{C}^n$ hat die Dimension $n-1$ dann und nur dann wenn $X = \mathcal{V}(f)$ die Nullstellenmenge eines nicht-konstanten irreduziblen Polynoms ist.*

Korollar 4.4.1 *Sei $C_P \subset \mathbb{C}^2$ eine Kurve. Dann hat jede irreduzible Komponente die Dimension* 1.

Eine affine oder projektive Varietät ist durch die Zariski Topologie ein topologischer Raum. Für einen topologischen Raum gibt es auch die topologische Definition einer Dimension:

Definition 4.4.4 Sei X ein topologischer Raum. Die *topologische Dimension* von X ist das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$, so dass es eine Kette

$$Z_n \subsetneq Z_{n-1} \subsetneq \ldots \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_0 = X$$

von verschiedenen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X gibt.

Beispiel 4.4.2 Die einzigen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind $\mathbb{C}$ selbst oder ein Punkt. Es folgt, dass die topologische Dimension von $\mathbb{C}$ (bezüglich der Zariski Topologie) 1 ist.

Beispiel 4.4.3 Sei X eine affine Varietät, dann ist die topologische Dimension von X endlich. Denn, angenommen man hätte eine unendliche Kette $X = Z_0 \supsetneq Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \ldots$ von verschiedenen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X, dann erhält man daraus eine unendliche aufsteigende Kette

$$\mathcal{I}(Z_0) \subsetneq \mathcal{I}(Z_1) \subsetneq \mathcal{I}(Z_2) \subsetneq \ldots$$

von Idealen in $\mathbb{C}[X]$. Aber $\mathbb{C}[X]$ ist der Quotient eines Polynomrings, und daher noethersch, jede aufsteigende Kette von Idealen wird daher stationär, im Widerspruch zur Annahme.

Proposition 4.4.2 *Sei X eine affine oder eine projektive Varität. Dann ist die topologische Dimension von X gleich der algebraischen Dimension.*

4.5 Projektive Varietäten, Halbgruppen, Bewertungen und NO-Körper

Im Folgenden nehmen wir als total geordnete abelschen Gruppe die abelsche Gruppe (oder den Vektorraum) $\mathbb{Q}^r$ für eine $r \geq 1$. Die totale Ordnung auf dem $\mathbb{Q}^r$ (als Gruppe) schreiben wir als $\succ$. Es sei daran erinnert, dass die totale Ordnung mit der Gruppenstruktur konform gehen soll, d.h. aus $a \preceq b$ folgt $a + c \preceq b + c$. Zur Erinnerung:

Definition 4.5.1 Sei A eine endlich erzeugte Algebra über dem Körper $\mathbb{C}$. Eine *Bewertung* von A mit Werten in $\mathbb{Q}^r$ ist eine Abbildung $\nu : A\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}^r$, die den folgenden Regeln genügt:

(a) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ für alle $x, y \in A\backslash\{0\}$,

(b) $\nu(cx) = \nu(x)$ für alle $x \in A\backslash\{0\}$ und $c \in \mathbb{C}^*$,

(c) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in A\backslash\{0\}$.

Das Bild $S := S(A, \nu) = \{\nu(x) \mid x \in A - \{0\}\}$ nennt man die *Bewertungshalbgruppe*. Unter einer Halbgruppe versteht man eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und, je nach Gusto der schreibenden Person, mit oder ohne neutralem Element (mit neutralem Element nennt man es auch Monoid). In unserem Fall hat S immer ein neutrales Element:

(i) S ist abgeschlossen unter der Addition auf $\mathbb{Q}^r$: Seien $u, v \in$, $u = \nu(a)$, $v = \nu(b)$, dann folgt $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$, also $u + v \in S$.

(ii) Die Operation "+" ist somit assoziativ auf S.

(iii) 0 ist das neutrale Element in S: Sei $a \in A$ beliebig. Da A eine Algebra über $\mathbb{C}$ ist, folgt $1 \in A$ und es gilt für alle $a \in A$: $\nu(a) = \nu(1 \cdot a) = \nu(1) + \nu(a)$ und somit $\nu(1) = 0$.

Ist die Algebra $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ zusätzlich graduiert, so baut man in die Bewertung oft zusätzlich den Grad mit ein. Dazu versieht man $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Q}^r$ (natürliche Zahlen mit 0) mit einer Totalordnung wie folgt:

$$(p, a) \succ (q, b) \Leftrightarrow p < q \text{ oder } p = q \text{ und } a \succ b.$$

Man definiert dann eine neue Bewertung: Ist $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$ mit $f_i \in A_i$, so sei

$$\tilde{\nu}(f) := \min\{(i, \nu(f_i)) \mid f_i \neq 0\}.$$

Vorsicht bei der Verdrehung: $(p, a) \succ (q, b)$ wenn $p < q$, oder .... Ist also $f_m \neq 0$ in $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$, dann ist $\tilde{\nu}(f) = (m, \nu(f_m))$!

Übung 4.5.1 (i) Zeigen Sie: $\tilde{\nu}$ wieder eine Bewertung ist.

(ii) Man sagt ν hat höchstens eindimensionale Blätter wenn (siehe auch nach Bemerkung 4.2.2) das Folgende gilt: für $\gamma \in \mathbb{Q}^r$ sei

$$A_\gamma = \{f \in A - \{0\} \mid \nu(f) \geq \gamma\} \cup \{0\}$$

und sei

$$A_{>\gamma} = \{f \in A - \{0\} \mid \nu(f) > \gamma\} \cup \{0\},$$

dann ist $\dim(A_\gamma / A_\gamma) \leq 1$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum).

Zeigen Sie: Hat ν hat höchstens eindimensionale Blätter, dann auch $\tilde{\nu}$.

Definition 4.5.2 Sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra und positiv graduiert $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$. Sei $\nu : A - \{0\} \to \mathbb{Q}^r$ eine Bewertung und sei

$$\tilde{\nu} : A - \{0\} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Q}^r$$

die assoziierte Bewertung mit Graduierung. Sei

$$\tilde{S} := S(A, \tilde{\nu}) = \{\tilde{\nu}(x) \mid x \in A - \{0\}\} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Q}^r$$

die zugehörige Bewertunghalbgruppe. Der *Newton-Okounkov Kegel* $K(A, \tilde{\nu})$ ist der Abschluß der konvexen Hülle von $\tilde{S}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^r$. Der *Newton-Okounkov Körper* $NO(A, \tilde{\nu})$ ist der Schnitt der affinen Hyperebene $\{1\} \times \mathbb{R}^r$ mit dem Kegel $K(A, \tilde{\nu})$:

$$NO(A, \tilde{\nu}) := (\{1\} \times \mathbb{R}^r) \cap K(A, \tilde{\nu})$$

Im Folgenden wird oft die erste Koordinate (die $\{1\}$) weggelassen, und $NO(A, \tilde{\nu})$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^r$ aufgefaßt.

Lemma 4.5.1

$$NO(A, \tilde{\nu}) = \overline{\{\frac{\nu(f)}{i} \mid f \in A_i,\ i \geq 0\}} \subset \mathbb{R}^r.$$

Beispiel 4.5.1 Vor dem Beweis ein erstes Beispiel: Der homogene Koordinatenring des projektiven Raum $\mathbb{P}^2$ ist die Polynomalgebra $A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Diese Algebra ist positiv graduiert. Der Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$ kann identifiziert werden (Homogenisierung–Dehomogenisierung, siehe Bemerkung 4.4.3) mit

$$\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}(U_0) = \mathbb{C}(x_1, x_2).$$

Wir nehmen auf $\mathbb{Z}^2$ die rechtslexikographische Ordnung. Die Bewertung sei $\nu : \mathbb{C}[x_1, x_2] \to \mathbb{Z}^2$ die *Minimum-Bewertung* wie in Beispiel 4.2.3:

$$\nu(\sum_{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}_0^2} a_{\underline{\mathbf{m}}} x^{\underline{\mathbf{m}}}) := \min\{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^2 \mid a_{\underline{\mathbf{m}}} \neq 0\},$$

wir erweitern die Bewertung auf $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}(x_1, x_2)$ wie in Bemerkung 4.2.2 durch

$$\nu\left(\frac{f}{g}\right) = \nu(f) - \nu(g).$$

Wir machen daraus eine Bewertung auf A wie folgt: Sei $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$, dann ist f keine Funktion auf dem $\mathbb{P}^2$, aber

$$\tilde{f} := \sum_{i=0}^{m} \frac{f_i}{x_0^i} = \frac{\sum_{i=0}^{m} x_0^{m-i} f_i}{x_0^m} \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^2).$$

und wir setzen

$$\nu : A - \{0\} \to \mathbb{Z}^2, \quad f \mapsto \nu(\tilde{f})$$

sowie

$$\tilde{\nu} : A - \{0\} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^2, \quad f = \sum_{i=0}^{m} f_i \mapsto \min\{(i, \nu\left(\frac{f_i}{x_0^i}\right) \mid f_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_0\}$$

Wie sieht der Newton-Okounkov Körper aus?
Schauen wir uns zunächst die Erzeuger x_0, x_1, x_2 und deren Bewertungen an.

$$\begin{array}{lllllll}
x_0 & \to^{\text{rat.Funktion}} & \frac{x_0}{x_0} & \to^{\text{Dehomog.}} & 1 & \to^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} & (1,0,0) \\
x_1 & \to^{\text{rat.Funktion}} & \frac{x_1}{x_0} & \to^{\text{Dehomog.}} & x_1 & \to^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} & (1,1,0) \\
x_2 & \to^{\text{rat.Funktion}} & \frac{x_2}{x_0} & \to^{\text{Dehomog.}} & x_2 & \to^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} & (1,0,1)
\end{array}$$

Als nächstes ein beliebiges Monom $x_0^a x_1^b x_2^c$ vom Grad $m = a + b + c$:

$$x_0^a x_1^b x_2^c \quad \to^{\text{Funktion}} \quad \frac{x_0^a x_1^b x_2^c}{x_0^m} \quad \to^{\text{Dehomog.}} \quad x_1^b x_2^c \quad \to^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} \quad (m, b, c) \tag{4.4}$$

Die Bewertung von allen Monomen ist verschieden. Man kann das Monom sogar aus der Bewertung eindeutig rekonstruieren. Da die Monome eine Basis bilden und die *Minimum-Bewertung* gewählt wurde folgt damit:

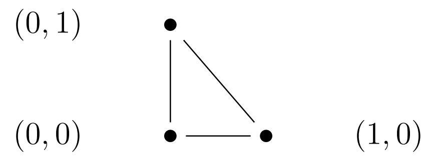
$$\tilde{S} = S(A, \tilde{\nu}) = \{(m, b, c) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^2 \mid b, c \geq 0,\ b + c \leq m\}.$$

Diese Halbgruppe ist endlich erzeugt, jedes Element in $\tilde{S}$ läßt sich schreiben als nicht-negative ganzzahlige Summe der folgenden Elemente:

$$(1,0,0), (1,1,0) \text{ und } (1,0,1).$$

Entsprechend ist der Newton-Okounkov Kegel $K(A, \tilde{\nu})$ der Kegel im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt von $\mathbb{R}_{\geq 0}(1,0,0)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}(1,1,0)$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}(1,0,1)$. Schneidet man diesen Kegel mit der affinen Hyperebene $\{1\} \times \mathbb{R}^2$ (und läßt die erste Koordinate weg, diese ist ja gleich 1), so erhält man das Standardsimplex im $\mathbb{R}^2$:

$NO(A, \tilde{\nu}) \;=$



Benutzt man das (noch nicht bewiesene) Lemma, so folgt aus (4.4) (wieder wird die erste Koordinate weggelassen)

$$NO(A, \tilde{\nu}) = \overline{\left\{ (\frac{b}{m}, \frac{c}{m}) \mid m, b, c \in \mathbb{N}_0, m > 0, b + c \leq m \right\}}. \tag{4.5}$$

und das ist genau der Abschluß der Menge der rationalen Zahlen im Standardsimplex

$$\Delta = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid r, s \geq 0, r + s \leq 1\}.$$

Wir kommen jetzt zum Beweis von Lemma 4.5.1.
Beweis. Sei zunächst

$$M = \left\{ \frac{\nu(f)}{i} \mid f \in A_i, \ i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{Q}^r.$$

Wir zeigen zunächst: M ist eine konvexe Menge in $\mathbb{Q}^r$. Seien dazu $u, w \in M$, es gibt also $f \in A_i$, $g \in A_j$ mit

$$u = \frac{\nu(f)}{i}, \quad w = \frac{\nu(g)}{j}.$$

Sei $0 < \frac{r}{q} < 1$ eine rationale Zahl mit $r, q \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$h = f^{rj} g^{(q-r)i}$$

in A, homogen vom Grad $rij + (q - r)ij = qij$, und

$$\frac{\nu(h)}{qij} = \frac{rj\nu(f) + (q - r)i\nu(g)}{qij} = \frac{r}{q}\frac{\nu(f)}{i} + \frac{(q - r)}{q}\frac{\nu(g)}{j} = \frac{r}{q}u + \frac{(q - r)}{q}w.$$

Es folgt: M ist konvex. Nach Konstruktion ist offensichtlich $\{1\} \times M \subset K(A, \tilde{\nu})$ und damit $\{1\} \times M \subset NO(A, \tilde{\nu})$. Da M konvex ist, ist auch $\overline{M} \subset \mathbb{R}^r$ konvex, und damit ist auch $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \overline{M}$ konvex. Nach Konstruktion folgt

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \overline{M} \subseteq K(A, \tilde{\nu}),$$

andererseits ist die Menge konvex und enthält $\tilde{S}$, also $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \overline{M} = K(A, \tilde{\nu})$ und damit $\overline{M} = NO(A, \tilde{\nu})$. $\bullet$

Beispiel 4.5.2 Als weiteres Beispiel betrachten wir die Graßmann Varietät $Y = Gr_2\mathbb{C}^4$. Als erstes brauchen wir den Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{C}(Gr_2\mathbb{C}^4)$. Wir benutzen dazu die Bemerkung 4.4.3.

Sei also Y_0 die affine Varietät $Y_0 = Gr_2\mathbb{C}^4 \cap U_0$, wobei

$$U_0 = \{[v] \in \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \mid v = a_{1,2}e_1 \wedge e_2 + \ldots, a_{1,2} \neq 0\}$$

Sei nun $[v] \in Y_0$. Da $[v] \in Gr_2\mathbb{C}^4$, gibt es $u, w \in \mathbb{C}^4$ mit $v = u \wedge w$. Da $[v] \in U_0$, ist die Koordinate $a_{1,2} \neq 0$, man kann sogar ohne Einschränkung $a_{1,2} = 1$ annehmen. Das bedeutet: $\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} = 1$. Indem man, falls notwendig, u, w durch Linearkombinationen von u und w ersetzt, bedeutet es, dass man ohne Einschränkung u und w so wählen kann, dass

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -u_3 \\ -u_4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}.$$

Damit bekommt man für Y_0:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \{u \wedge w \mid u_3, u_4, w_3, w_4 \in \mathbb{C}\} \\ &= e_1 \wedge e_2 + w_3e_1 \wedge e_3 + w_4e_1 \wedge e_4 + u_3e_2 \wedge e_3 + u_4e_2 \wedge e_4 \\ &\qquad + \det \begin{pmatrix} u_3 & w_3 \\ u_4 & w_4 \end{pmatrix} e_3 \wedge e_4 \\ &\simeq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

Man hat also

$$\mathbb{C}(Gr_2\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}(Y_0) = \mathbb{C}(y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,3}, y_{2,4})$$

mit

$$y_{i,j}(e_1 \wedge e_2 + w_3e_1 \wedge e_3 + w_4e_1 \wedge e_4 + u_3e_2 \wedge e_3 + u_4e_2 \wedge e_4 - \det \begin{pmatrix} u_3 & w_3 \\ u_4 & w_4 \end{pmatrix} e_3 \wedge e_4)$$
$$= \begin{cases} w_3 & \text{falls } (i,j) = (1,3) \\ w_4 & \text{falls } (i,j) = (1,4) \\ u_3 & \text{falls } (i,j) = (2,3) \\ u_4 & \text{falls } (i,j) = (2,4) \end{cases}$$

Wir nehmen auf $\mathbb{Z}^4$ die rechtslexikographische Ordnung. Setze $\nu(y_{1,3}) = (1,0,0,0)$, $\nu(y_{2,3}) = (0,0,1,0)$, $\nu(y_{1,4}) = (0,1,0,0)$, und $\nu(y_{2,4}) = (0,0,0,1)$. Nach Lemma 4.2.1 gibt es eine Bewertung, die für die Erzeuger genau diese Werte annimmt:

$$\nu : \mathbb{C}[y_{1,3}, y_{2,3}, y_{1,4}, y_{2,4}] \to \mathbb{Z}^4,$$

und es ist die *Minimum-Bewertung* wie in Beispiel 4.2.3:

$$\nu(\sum_{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}_0^4} a_{\underline{\mathbf{m}}} y^{\underline{\mathbf{m}}}) := \min\{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^4 \mid a_{\underline{\mathbf{m}}} \neq 0\}.$$

Wir erweitern die Bewertung auf $\mathbb{C}(Gr_2\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}(y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,3}, y_{2,4})$ wie in Bemerkung 4.2.2 durch

$$\nu\left(\frac{f}{g}\right) = \nu(f) - \nu(g).$$

Wir machen daraus eine Bewertung auf $A = \mathbb{C}[Gr_2\mathbb{C}^4]$ wie folgt. Zur Erinnerung: $Gr_2\mathbb{C}^4 \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$, und $\mathbb{C}[\Lambda^2\mathbb{C}^4] = \mathbb{C}[x_{1,2}, \ldots, x_{3,4}]$ mit $x_{i,j}$ ist das duale Basiselement zu $e_i \wedge e_j$. Sei $f = \sum_{i=0}^m f_i \in A$, dann ist f keine rationale Funktion auf $Gr_2\mathbb{C}^4$, aber, schreiben wir $x_{1,2}$ auch für die Klasse $x_{1,2} \bmod I(Gr_2\mathbb{C}^4)$ in A, so ist

$$\tilde{f} := \sum_{i=0}^m \frac{f_i}{x_{1,2}^i} = \frac{\sum_{i=0}^m x_{1,2}^{m-i} f_i}{x_{1,2}^m} \in \mathbb{C}(Gr_2\mathbb{C}^4).$$

und wir setzen

$$\nu : A - \{0\} \to \mathbb{Z}^4, \quad f \mapsto \nu(\tilde{f})$$

sowie

$$\tilde{\nu} : A - \{0\} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^4, \quad f \mapsto \min\{(i, \nu\left(\frac{f_i}{x_{1,2}^i}\right)) \mid f_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_0\}$$

Wie sieht der Newton-Okounkov Körper aus? Schauen wir uns zunächst die

Erzeuger von A: $x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}$ und deren Bewertungen an.

$$
\begin{array}{lllll}
x_{1,2} & \rightarrow^{\text{rat.Funktion}} \frac{x_{1,2}}{x_{1,2}} & \rightarrow^{\text{Dehomog.}} & 1 & \rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} (1,0,0,0,0) \\
x_{1,3} & \rightarrow^{\text{rat.Funktion}} \frac{x_{1,3}}{x_{1,2}} & \rightarrow^{\text{Dehomog.}} & y_{1,3} & \rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} (1,1,0,0,0) \\
x_{1,4} & \rightarrow^{\text{rat.Funktion}} \frac{x_{1,4}}{x_{1,2}} & \rightarrow^{\text{Dehomog.}} & y_{1,4} & \rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} (1,0,1,0,0) \\
x_{2,3} & \rightarrow^{\text{rat.Funktion}} \frac{x_{2,3}}{x_{1,2}} & \rightarrow^{\text{Dehomog.}} & y_{2,3} & \rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} (1,0,0,1,0) \\
x_{2,4} & \rightarrow^{\text{rat.Funktion}} \frac{x_{2,4}}{x_{1,2}} & \rightarrow^{\text{Dehomog.}} & y_{2,4} & \rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} (1,0,0,0,1) \\
x_{3,4} & \rightarrow^{\text{rat.Funktion}} \frac{x_{3,4}}{x_{1,2}} & \rightarrow^{\text{Dehomog.}} & y_{1,3}y_{2,4} - y_{1,4}y_{2,3} & \rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} (1,0,1,1,0).
\end{array}
$$

Wegen der Relation

$$x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3} = 0$$

kann man in jedem Monom $x_{1,4}x_{2,3}$ ersetzen durch $x_{1,2}x_{3,4} + x_{1,3}x_{2,4}$. Man kann also jedes Element in A schreiben als Linearkombination von Monomen, die nur von 5 Variablen abhängen: entweder das Monom ist von der Form

$$x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{1,4}^c x_{2,4}^d x_{3,4}^e \text{ oder von der Form } x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{2,3}^f x_{2,4}^d x_{3,4}^f, \tag{4.6}$$

es kommen niemals $x_{1,4}$ und $x_{2,3}$ gleichzeitig in einem Monom vor. Es gibt also zwei Typen von Monomen: Sei zunächst $a+b+c+d+e = m$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{1,4}^c x_{2,4}^d x_{3,4}^e \quad &\rightarrow^{\text{Funktion}} \quad \frac{x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{1,4}^c x_{2,4}^d x_{3,4}^e}{x_{1,2}^m} \\
&\rightarrow^{\text{Dehomog.}} \quad y_{1,3}^b y_{1,4}^c y_{2,4}^d (y_{1,3}y_{2,4} - y_{1,4}y_{2,3})^e \\
&\rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} \quad (m, b, c+e, e, d).
\end{aligned}
$$

Sei nun $a+b+f+d+e = m$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{2,3}^f x_{2,4}^d x_{3,4}^e \quad &\rightarrow^{\text{Funktion}} \quad \frac{x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{2,3}^f x_{2,4}^d x_{3,4}^e}{x_{1,2}^m} \\
&\rightarrow^{\text{Dehomog.}} \quad y_{1,3}^b y_{2,3}^f y_{2,4}^d (y_{1,3}y_{2,4} - y_{1,4}y_{2,3})^e \\
&\rightarrow^{\text{Bewertung } \tilde{\nu}} \quad (m, b, e, f+e, d)
\end{aligned}
$$

Man kann aus der Bewertung jedes Monom eindeutig rekonstruieren! Entweder die dritte Koordinate ist größer gleich der vierten, dann kann man sie schreiben als $(m, b, c+e, e, d)$ und ist das Bild von $x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{1,4}^c x_{2,4}^d x_{3,4}^e$, oder die dritte Koordinate ist kleiner gleich der vierten, dann kann man sie schreiben als $(m, b, e, e+f, d)$ und ist das Bild von $x_{1,2}^a x_{1,3}^b x_{2,3}^f x_{2,4}^d x_{3,4}^e$. Es folgt: die Monome in (4.6) sind nicht nur ein Erzeugendensystem (als Vektorraum), sie sind sogar eine Basis. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, nehmen wir an ein Monom $m = \sum_j a_j m_j$ ist eine Linearkombination von anderen Monomen in (4.6). Aber dann ist

$$\tilde{\nu}(m) = \min\{\tilde{\nu}(m_j) \mid a_j \neq 0\}.$$

Die Gleichheit ist hier anzuwenden, da alle Summanden verschiedene Bewertungen haben (siehe Bemerkung 4.2.1). Aber die Gleicheit ist wiederum nicht möglich, da $\tilde{\nu}(m_j) \neq \tilde{\nu}(m)$ für alle j. Es folgt:

$$\tilde{S} = \{\tilde{\nu}(m) \mid m \text{ Monom in } (4.6)\}.$$

Und damit: $\tilde{S}$ ist endlich erzeugt, die Elemente

$$(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,0,1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,1), (1,0,1,1,0)$$

bilden ein Erzeugendensystem, und der Newton-Okounkov Körper ist die konvexe Hülle der Punkte

$$(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0,1,1,0).$$

Beispiel 4.5.3 Als weiteres Beispiel betrachten wir die Fahnenvarietät (siehe Abschnitt 4.3.2)

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})).$$

In den Übungen haben sie gesehen, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad &\to \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \\ &\to \quad [u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u^{-1}] \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})) \end{aligned} \tag{4.7}$$

ein Isomorphismus ist auf $U_0 \cap \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$, wobei

$$U_0 = \{[A] \in \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C})) \mid A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 3}, a_{1,3} \neq 0\}.$$

Sei $\mathbb{C}[\mathbb{C}^3] = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]$, dann wissen wir:

$$\mathbb{C}(\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)) = \mathbb{C}(y_1, y_2, y_3).$$

Das genügt uns um auf $\mathbb{C}(\mathcal{F}(\mathbb{C}^3))$ eine Bewertung zu definieren. Zuerst auf nehmen wir auf $\mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]$ die Minimum-Bewertung, wobei wir auf dem $\mathbb{Z}^3$ die rechtslexikographische Ordnung wählen. Also

$$f = \sum a_{i_1,i_2,i_3} y_1^{i_1} y_2^{i_2} y_3^{i_3} \mapsto \nu(f) = \min\{(i_1, i_2, i_3) \mid a_{i_1,i_2,i_3} \neq 0\}.$$

Die Bewertung wird auf $\mathbb{C}(\mathcal{F}(\mathbb{C}^3))$ ausgedehnt indem man setzt:

$$\nu(\frac{f}{g}) = \nu(f) - \nu(g).$$

Wir betrachten nun die induzierte Bewertung auf dem graduierten homogenen Koordinatenring für $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{P}(M_3(\mathbb{C}))$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\nu} : \mathbb{C}[\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)] = \mathbb{C}[x_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 3]/I(\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)) & \to & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^3 \\ f = \sum f_\ell & \mapsto & \min\{(\ell, \nu(\frac{f_\ell}{x_{1,3}^\ell})) \mid f_\ell \neq 0\}. \end{array}$$

wobei f_ℓ in $\mathbb{C}[\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)]$ homogen vom Grad ℓ ist. Also wieder die Prozedur: $f \in \mathbb{C}[\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)]$ ist keine rationale Funktion, aber

$$\tilde{f} = \sum \frac{f_\ell}{x_{1,3}^\ell}$$

ist eine rationale Funktion. Schauen wir uns an, was die Bewertung $\tilde{\nu}$ auf den Erzeugern, den $x_{i,j}$ ergibt. Da $x_{1,1} + x_{2,2} + x_{3,3} = 0$, können wir $x_{3,3}$ weglassen. Wir notieren die Werte nicht in einem Vektor sondern in einem Diagramm wie folgt:

$$\nu(y_1) = \begin{array}{|c|c} \hline 0 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}, \ \nu(y_2) = \begin{array}{|c|c} \hline 1 & \\ \hline 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array}, \ \nu(y_3) = \begin{array}{|c|c} \hline 0 & \\ \hline 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}.$$

Um die $x_{i,j}$ in die y_k umzurechnen, brauchen wir noch für ein u wie in (4.7):

$$u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u^{-1} = \begin{pmatrix} bc - a & -c & 1 \\ b^2c - ab & -bc & b \\ abc - a^2 & -ac & a \end{pmatrix}$$

Dann sehen wir

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Funktion} & & \text{Dehomog.} & & \text{Bewertung} & \\
x_{1,3} & \mapsto & \frac{x_{1,3}}{x_{1,3}} & \mapsto & 1 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}) \\
x_{1,2} & \mapsto & \frac{x_{1,2}}{x_{1,3}} & \mapsto & -y_3 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}) \\
x_{1,1} & \mapsto & \frac{x_{1,1}}{x_{1,3}} & \mapsto & y_2y_3 - y_1 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}) \\
x_{2,3} & \mapsto & \frac{x_{2,3}}{x_{1,3}} & \mapsto & y_2 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}) \\
x_{2,2} & \mapsto & \frac{x_{2,2}}{x_{1,3}} & \mapsto & -y_2y_3 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}) \\
x_{2,1} & \mapsto & \frac{x_{2,1}}{x_{1,3}} & \mapsto & y_2^2y_3 - y_1y_2 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}) \\
x_{3,2} & \mapsto & \frac{x_{3,2}}{x_{1,3}} & \mapsto & -y_1y_3 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}) \\
x_{3,1} & \mapsto & \frac{x_{3,1}}{x_{1,3}} & \mapsto & y_1y_2y_3 - y_1^2 & \mapsto & (1, \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 0 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array})
\end{array}
$$

Man kann zeigen

(i) Die Bewertungshalbgruppe $\tilde{S} = S(\mathbb{C}[\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)], \tilde{\nu})$ ist endlich erzeugt und wird von den Elementen oben erzeugt.

(ii) Als Konsequenz erhält als Newton-Okounkov Körper

$$NO(\mathbb{C}[\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)], \tilde{\nu}) = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} z_2 \\ \hline z_1 & z_3 \\ \hline \end{array} \mid 0 \leq z_1, z_2, z_3; z_2, z_3 \leq 1; z_1 + z_2 + z_3 \leq 2 \right\}$$

4.6 Newton-Okounkov Körper und der Grad einer projektiven Varietät

In diesem Abschnitt werden alle Beweise weggelassen, es ist eher ein Schnellkurs in Algebraischer Geometrie um zu motivieren, warum die Newton-Okounkov Körper interessant sind.

Zunächst kommen wir zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Bézout:

Theorem A *Seien $Y, Z \subseteq \mathbb{P}^n$ projektive Varietäten der Dimension r respektive s. Dann hat jede irreduzible Komponente von $Y \cap Z$ die Dimension $\geq r + s - n$. Insbesondere, wenn $r + s - n \geq 0$, dann ist $Y \cap Z \neq \emptyset$.*

Ein Unterraum der Dimension d im $\mathbb{P}^n$ ist eine Teilmenge, die durch $n - d$ lineare, linear unabhängige Gleichungen definiert wird:

$$W := \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid \ell_1(v) = \ldots = \ell_{n-d}(v) = 0\},$$

wobei $\ell_1, \ldots, \ell_{n-d} \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ linear unabhängige lineare Abbildungen sind.

Beispiel 4.6.1 Sei $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ und sei $\ell = 2x_0 + x_1 - 2x_2$ und sei

$$W = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid \ell(v) = 0\}.$$

Sei wieder $U_0 = \{[v] \in \mathbb{P}^2 \mid v_0 \neq 0\}$. Für Elemente aus U_0 kann man eindeutige Representanten wählen, indem man $v_0 = 1$ verlangt. Da v_1, v_2 frei in $\mathbb{C}$ gewählt werden können, identifizieren wir wieder U_0 mit $\mathbb{C}^2$ und bekommen (Dehomogenisierung)

$$W \cap U_0 = \{(b, c) \mid 2 + b - 2c = 0\}$$

eine affine Gerade, die durch die Punkte $(0, 1)$ und $(-2, 0)$ geht. Um das ganze Bild zu sehen, muß man natürlich auch U_1, U_2 betrachten:

$$W \cap U_1 = \{(a, c) \mid 2a + 1 - 2c = 0\},$$

eine affine Gerade, die durch die Punkte $(0, \frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{2}, 0)$ geht, sowie

$$W \cap U_2 = \{(a, c) \mid 2a + b - 2 = 0\},$$

eine affine Gerade, die durch die Punkte $(0, 2)$ und $(1, 0)$ geht. Diese *Karten* muß man jetzt noch zusammenkleben. Beim Kleben muß man auf die Koordinaten achten, Zum Beispiel gilt offensichtlich

$$y = [1, 2, 2] \in W, \quad \text{denn } \ell((1, 2, 2)) = 2 + 2 - 4 = 0,$$

in der *Karte* $W \cap U_0$ muss man die erste Koordinate auf 1 normieren, was hier bereits der Fall ist und damit ist $y = (2, 2)$ in dieser Karte. In der *Karte* $W \cap U_1$ muss man die erste Koordinate auf 1 normieren, also alles durch 2 teilen, und damit $y = (\frac{1}{2}, 1)$ in dieser Karte. Ebenso, in der *Karte* $W \cap U_2$ muss man alles durch 2 teilen, und damit $y = (\frac{1}{2}, 1)$ in dieser Karte.

Theorem B1 *Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietäten der Dimension d. Dann gibt es in $Gr_{n-d}(\mathbb{C}^{n+1})$ eine offene und dichte Teilmenge M, so dass für alle Unterräume W in M gilt: Der Schnitt $[W] \cap X$ besteht aus endlich vielen Punkten, und, gezählt mit Multiplizität, ist die Anzahl der Punkte immer gleich. Diese Anzahl nennt man den Grad von X in $\mathbb{P}^n$.*

Beispiel 4.6.2 Sei $Y = \mathcal{V}(x_0x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{P}^2$, wir wollen den Schnitt einer *generischen* projektiven Gerade mit der Kurve berechnen. Sei $\ell = ax_0 + bx_1 + cx_2$ und sei $L = \mathcal{V}(\ell)$. Wir schauen uns nur die projektiven Geraden L an mit $c \neq 0$. Wenn $[v] \in Y$ mit $v_0 = 0$, dann folgt $x_1 = 0$ und x_2 ist beliebig, es gibt also nur einen Punkt in Y, der diese Bedingung erfüllt. Dieser liegt aber nie auf einer Geraden L mit $c \neq 0$, denn $\ell(v) = av_0 + bv_1 + cv_2 = cv_2 = 0$ impliziert $v_2 = 0$, was nicht sein kann da bereits $v_0 = v_1 = 0$. Also liegen alle möglichen Schnittpunkte in der affinen Karte $U_0 = \{[v] \in \mathbb{P}^2 \mid v_0 \neq 0\}$. Dort können wir die Gleichungen dehomogenisieren und $v_0 = 1$ setzen und bekommen

$$Y \cap U_0 = \mathcal{V}(x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{A}^2, \quad L \cap U_0 = \mathcal{V}(a + bx_1 + cx_2),$$

und damit hat der Schnitt zwei verschiedene Punkte solange $c \neq 0$ und $b^2 - 4ac \neq 0$. Das sind Komplemente von Nullstellen von polynomialen Funktionen auf $Gr_2(\mathbb{C}^3) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$, also ist es eine offene und dichte Teilmenge.

Man kann diesen Grad induktiv berechnen, sobald so etwas wie eine Schnittmultiplizität definiert hat, siehe Theorem 2.4.4, entsprechend ist das folgende Theorem eine Verallgemeinerung von Bézouts Theorem (Theorem 2.4.1)

Theorem B2 *Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietäten der Dimension $d \geq 1$ und sei H eine Hyperfläche (Nullstellenmenge eines irreduziblen homomgenen Polynoms), die X nicht enthält. Seien $Z_1, \ldots, Z_s$ die irreduziblen Komponenten von $X \cap H$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{i} (Y, H; Z_j) \deg Z_j = (\deg H)(\deg X)$$

Aber einfach zu berechnen ist das nicht. Hier eine andere Methode. Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät, sei

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X) = \bigoplus_{j \geq 0} \mathbb{C}[X]_j$$

der graduierte homogene Koordinatenring. Wir definieren eine Funktion $\Phi_X = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\Phi_X(j) = \dim \mathbb{C}[X]_j.$$

Theorem C *Es gibt eine Polynom $P_X(z) \in \mathbb{Q}[z]$, genannt das Hilbert-Polynom von $X \subseteq \mathbb{P}^n$, so dass gilt:*

$$p_X(j) = \Phi_X(j) \; \forall \, j \gg 0.$$

Beispiel 4.6.3 Sei $\mathbb{C}[\mathbb{P}^1] = \mathbb{C}[x_0, x_1]$, dann ist $p_{\mathbb{P}^1} = z + 1$.

Übung 4.6.1 Sei $\mathbb{C}[\mathbb{P}^k] = \mathbb{C}[x_0, x_1]$. Zeigen Sie:

$$p_{\mathbb{P}^k} = \left(\begin{array}{c} z+k \\ k \end{array} \right) = \frac{z^k}{k!} + \cdots .$$

Übung 4.6.2 Sei $Y = \mathcal{V}(x_0 x_2 - x_1^2) \subset \mathbb{P}^2$. Zeigen Sie:

$$p_Y(z) = 2z + 1.$$

(Hinweis: Beachten Sie, dass der Grad des homogenen Polynoms $x_0 x_2 - x_1^2$ zwei ist. Zeigen Sie: $p_Y(z) = p_{\mathbb{P}^2}(z) - p_{\mathbb{P}^k}(z-2)$)

Theorem D

(i) Der Grad von $p_X(z)$ ist die Dimension von X

(ii) Sei $d = \dim X$ und der Leitkoeffizient von $p_X(z)$ sei a_d. Dann gilt

$$\deg X = d! a_d.$$

Sei nun $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine d-dimensionale projektive Varietät, sei

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]/I(X)$$

der homogenene Koordinatenring und sei $\mathbb{C}(X)$ der Körper der rationalen Funktionen auf X. Sei

$$\nu : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z}^d$$

eine Bewertung. Sei

$$\tilde{\nu} : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$$

die assoziierte Bewertung mit Gradkomponente, d.h. für $f \in A_i$ sei

$$\tilde{\nu}(f) := \frac{1}{i}\nu(\frac{f}{x_0^i}).$$

Sei $NO(X, \tilde{\nu}) \subseteq \mathbb{R}^d$ der assoziierte Newton-Okounkov Körper.

Theorem E *Wenn die Bewertung $\tilde{\nu}$ höchstens eindimensionale Blätter hat, dann ist die Dimension des Newton-Okounkov Körpers $NO(X, \tilde{\nu})$ gleich der Dimension von X, das Volumen $Vol(NO(X, \tilde{\nu}))$ des Newton-Okounkov Körpers ist genau der Koeffizient des Leitterms von $p_X(z)$. Oder, anderes gesagt,*

$$\deg X = d! Vol(NO(X, \tilde{\nu})).$$

4.7 N-O Körper, endlich erzeugte Halbgruppen und torische Degeneration

Der folgende Abschnitt wird sehr vague sein und ziemlich unpräzise. Es geht mehr darum die Idee zu erläutern als die ganze Mathematik, die dahinter steckt, im Detail und korrekt einzuführen. Betrachten wir ein einfaches Beispiel: Die Graßmann $Gr_2(\mathbb{C}^4) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ wird beschrieben als die Nullstellemenge eines Polynoms:

$$Gr_2(\mathbb{C}^4) = \mathcal{V}(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4).$$

Machen wir ein Experiment und schauen uns stattdessen an

$$Y = \mathcal{V}(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + tx_{1,4}x_{2,3}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \times \mathbb{C}.$$

Sei $\pi : \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Projektion, und schauen wir uns die Urbilder an für ein $t \in \mathbb{C}$ an.

(i) Für $t = 1$ erhält man die Graßmann Varietät $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ zurück.

(ii) Man kann zeigen: für alle $t \neq 0$ ist die Varietät $Y_t = \pi^{-1}(t)$, d.h.

$$Y_t = \mathcal{V}(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + tx_{1,4}x_{2,3}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$$

isomorph zur Graßmann Varietät $Gr_2(\mathbb{C}^4)$.

(iii) Für $t = 0$ erhält man

$$Y_0 = \mathcal{V}(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4}) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4).$$

Sei $T = (\mathbb{C}^*)^4$, wir definieren eine lineare Operation auf dem Vektorraum $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ durch

$$T \ni \underline{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{llll} \underline{t}e_1 \wedge e_2 & := t_1 e_1 \wedge e_2, & \underline{t}e_1 \wedge e_3 & := t_2^{-1} e_1 \wedge e_3, \\ \underline{t}e_2 \wedge e_4 & := t_2 e_2 \wedge e_4, & \underline{t}e_3 \wedge e_4 & := t_1^{-1} e_3 \wedge e_4, \\ \underline{t}e_1 \wedge e_4 & := t_3 e_1 \wedge e_4, & \underline{t}e_2 \wedge e_3 & := t_4 e_2 \wedge e_3. \end{array}$$

Man bekommt wegen der Linearität eine induzierte Operation auf dem projektiven Raum:

$$T \times \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4),$$

Für $[v] \in \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$ und $\underline{t} \in T$ sei $v = \sum_{i,j} a_{i,j} e_i \wedge e_j$ ein Repräsentant. Es gilt:

$$(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4})(\underline{t} \cdot v) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} = (x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4})(v),$$

und damit $[v] \in \mathcal{V}(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4})$ impliziert $T \cdot [v] \subset \mathcal{V}(x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4})$. Als Übung zeigen Sie:

$$\begin{array}{rcl} Y_0 & = & \overline{T \cdot [\sum_{1 \leq i < j \leq 4} e_i \wedge e_j]} \\ & = & \overline{[t_1 e_1 \wedge e_2 + t_2^{-1} e_1 \wedge e_3 + t_2 e_2 \wedge e_4 + t_1^{-1} e_3 \wedge e_4 + t_3 e_1 \wedge e_4 + t_4 e_2 \wedge e_3]} \\ & & \text{mit } t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{C}^* \end{array}$$

Mit anderen Worten: Y_0 ist eine torische Varietät. Allgemein, wenn T ein Torus ist, d.h. $T \simeq (\mathbb{C}^*)^m$ für ein m, und T operiert linear auf einem Vektorraum V, dann hat man eine induzierte Operation auf $\mathbb{P}(V)$. Ist $v \in V$ und der Stabilisator $T_{[v]}$ ist endlich, dann nennt man den Abschluß des Orbits

$$X = \overline{T \cdot [v]}$$

eine projektive torische Varietät.

Der Vorteil von torischen Varietäten: Man hat ein sehr spezielles Wechselspiel zwischen algebraischer Geometrie und polyhedraler Kombinatorik: Kegel, Fächer, Polytope,... Insbesondere hat man eine Bijektion zwischen einer gewissen Klasse von Polytopen und sogenannten *normalen projektiven torischen Varietäten*. Die schöne Eigenschaft an dieser Beschreibung: viele Eigenschaften wie Glattheit, Singulariäten, Kohomologie– und Homologiegruppen, usw. sind direkt auf kombinatorische Weise aus dem Polytop bestimmen.

Um diesen Vorteil weiteren Klassen von Varietäten zugänglich zu machen, hat man seit langem versucht Degenerierungen von gegebenen Varietäten in torische Varietäten zu finden, wie in dem Beispiel der $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ oben. Wenn die Degeneration schön im algebraisch-geometrischen Sinn ist (man nennt so etwas *flache Degenerierung*), dann kann man oft zeigen: Y hat die Eigenschaft XXX dann und nur dann wenn die degenerierte torische Varietät Y_0 die Eigenschaft XXX hat. Oder man hat Isomorphismen zwischen den Homologie– / Kohomologiegruppen auf X und den Homologie– / Kohomologiegruppen auf der degenerierten Varietät. Oder...usw.

Die Frage bleibt: Wie findet man bei einer gegebenen Varietät überhaupt mögliche Degenerierungen. Eine mögliche Antwort sei hier gegeben: Sei $X \subset \mathbb{P}(V)$ eine projektive Varietät, sei $\nu : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z}^m$ eine Bewertung, so dass die induzierte Bewertung $\tilde{\nu} : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^m$ auf dem homogenen Koordinatenring höchstens eindimensionale Blätter hat.

Theorem F *Wenn die Bewertungshalbgruppe $\tilde{S} = S(\mathbb{C}[X], \tilde{\nu})$ endlich erzeugt ist, dann ist der Newton-Okounkov Körper $NO(X, \tilde{\nu})$ ein Polytop. Weiter gibt es eine flache Degenerierung von X in eine torische Varietät. Genauer, es gibt eine Varietät $\tilde{X}$, zusammen mit einem Morphismus $\pi : \tilde{X} \to \mathbb{C}$, so dass $\pi^{-1}(t)$ isomorph ist zu X für alle $t \neq 0$, $\pi^{-1}(0)$ ist eine torische Varietät, dessen Normalisierung die projektive torische Varietät zum Polytop $NO(X, \tilde{\nu})$ ist*

In diesem Sinne kann man dann von der torischen Varietät assoziert zu $NO(X, \tilde{\nu})$ dann als ein vereinfachtes Modell von X sprechen.