
Name ______________ Vorname ______________ Matrikelnummer

☐ Mathematik BA ☐ WiMathematik BA ☐ Sonstiges: ______________

☐ Mathematik MA ☐ WiMathematik MA

☐ Lehramt BA ☐ Lehramt MA ☐ Lehramt (Alt)

Klausur zur Vorlesung Newton-Okounkov Theorie (SS 18)

Als *Konzeptpapier* sind die am Ende angefügten und vor Beginn der Aufgabenbearbeitung herauszulösenden Seiten zu verwenden.
In die Bewertung werden nur die Ausführungen auf den dafür vorgesehenen numerierten Heftseiten und auf dem von der Klausuraufsicht ausgegebenen Zusatzpapier einbezogen.

Klausurergebnis	
☐ bestanden	☐ nicht bestanden
______________ Prüfer	______________ Prüfer

Hinweise

(a) Seitenzahl: 11 Seiten.

(b) Dauer:
- 90 Minuten (Bearbeitungszeit).

(c) Hilfsmittel: Keine.

(d) Vor Beginn der Klausur sind auf diesem Blatt oben Name, Matrikelnummer und Studiengang einzutragen. Die Klausur muss auf der letzten Seite unterschrieben werden!

(e) Die Klausur besteht aus einem Teil. Dieser besteht aus mehreren Aufgaben. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.

(f) Es gibt 100 Punkte bei der korrekten Bearbeitung aller Aufgaben. Ab 90 Punkten wird die Klausur mit der Note 1,0 bewertet.

(g) Die Lösungen sind mit Füllhalter oder Kugelschreiber, NICHT mit Bleistift, auf dem zugeteilten Papier einzutragen.

(h) Auf Verlangen wird von der Klausuraufsicht weiteres Papier zugeteilt. Dieses ist mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu beschriften.

Interne Prüfvermerke						
Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Erreichte Punkte						

Aufgabe 1. (20 Punkte) Polynome:

i) Bestimmen Sie die Diskriminante von $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

ii) Welches der folgenden Polynome $P(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ ist symmetrisch? Begründen Sie Ihre Aussage!

$$\text{(a) } x^2 + y^2; \quad \text{(b) } xy^2 + xz^2 + yz^2; \quad \text{(c) } xy + xz + yz.$$

iii) Welche der folgenden Aussagen über die Diskriminante $\Delta(P(x))$ eines Polynoms $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist falsch? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a) Die Nullstellen von $P(x)$ sind paarweise verschieden $\Leftrightarrow \Delta(P(x)) \neq 0$.

(b) Ist $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ und sind alle Nullstellen von $P(x)$ reell, so gilt $\Delta(P(x)) > 0$.

(c) Ist $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ und $\Delta(P(x)) > 0$, so sind alle Nullstellen von $P(x)$ reell.

Lösung: Zu *i)*: Die Diskriminante des Polynoms $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ ist gleich 0, da es eine mehrfache Nullstelle besitzt.

Zu *ii)*: Nur (c) ist symmetrisch. Vertauscht man x mit y oder x mit z oder y mit z, so erhält man immer wieder das gleiche Polynom zurück. Da die symmetrische Gruppe S_3 von diesen Permutationen erzeugt wird, folgt sofort: das Polynom in (c) ist symmetrisch. Man beachte, dass $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 0 \cdot z^2$ nicht symmetrisch in $\mathbb{C}[x, y, z]$ ist.

Zu *iii)*: Die Aussage (a) ist offensichtlich wahr, sie folgt direkt aus der Definition der Diskriminante (siehe Vorlesung): ist

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

dann ist die Diskriminante

$$\Delta(P(x)) = a_n^{2n-2}(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \cdots (x_1 - x_n)^2(x_2 - x_3)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2$$

Aussage (b) ist falsch, es gilt nur $\Delta(P(x)) \geq 0$. Aussage (c) ist falsch, wie man am Beispiel des aus der Vorlesung bekannten Polynoms $x^4 + 4$ mit Diskriminante 16384 und Nullstellen $\pm 1 \pm i$ leicht einsieht.

Aufgabe 2. (**20 Punkte**) **Kurven:**

i) Wieviele Schnittpunkte (gezählt mit Multiplizität) haben zwei verschiedene Kreise in $\mathbb{P}^2$? Begründen Sie Ihre Aussage!

ii) Welche der folgenden Aussagen ist falsch? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a) Jede projektive Kurve definiert durch ein Polynom ohne mehrfache Faktoren besitzt höchstens endlich viele Singularitäten.

(b) Jede projektive Kurve definiert durch ein irreduzibles Polynom ohne mehrfache Faktoren besitzt höchstens endlich viele Singularitäten.

(c) Jede projektive Kurve ist glatt.

(d) Jede glatte projektive Kurve ist irreduzibel.

Lösung: Zu *i)*: Ein Kreis in $\mathbb{P}^2$ ist eine projektive Kurve gegeben durch eine Gleichung der Form $(x-a)^2 + (y-b)^2 - rz^2 = 0$, also irreduzibel und vom Grad 2. Da zwei verschiedene irreduzible Polynome keinen gemeinsamen (nichttrivialen) Faktor haben, können wir nun Bézouts Theorem anwenden und erhalten mit Multiplizitäten gezählt $2 \cdot 2 = 4$ Schnittpunkte.

Zu *ii)*: Aussage (a) ist wahr, wie wir in den Übungen gezeigt haben. Diese Aussage ist letztlich eine Konsequenz aus Bézouts Theorem. Aussage (b) ist als Spezialfall von Aussage (a) natürlich auch wahr. Aussage (d) ist ebenfalls wahr, da wir gezeigt haben, dass für eine reduzible Kurve $\widetilde{C} = \widetilde{C}_1 \cup \widetilde{C}_2$, die Inklusion $\widetilde{C}_1 \cap \widetilde{C}_2 \subseteq \operatorname{Sing} \widetilde{C}$ gilt, und nach Bézout ist die Menge dieser Schnittpunkte in jeden Fall nicht leer. Aussage (c) ist falsch, wie man zum Beispiel anhand der durch $x^3 - y^2 z = 0$ definierten Kurve einsehen kann. Zur Erinnerung: Man nennt p einen *singulären Punkt* falls

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a,b,c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a,b,c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a,b,c) = 0.$$

Also, in diesem Fall, falls $3a^2 = 0$ und $2bc = 0$ und $b^2 = 0$, also der Punkt $[0,0,1]$ ist ein singulärer Punkt.

Aufgabe 3. (20 Punkte) Varietäten:

i) Welche der folgenden Mengen ist keine affine Varietät? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a) $\emptyset$, (b) $\{-1,0,1\} \subset \mathbb{C}$, (c) $\{[x,y] \in \mathbb{P}^1 \mid x \neq 0\}$, (d) $\mathbb{C}$, (e) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y^2\}$

ii) Nur eine der folgenden Mengen ist eine projektive Varietät. Welche ist dies? Zeigen sie, dass die von Ihnen ausgewählte Menge tatsächlich eine projektive Varietät ist.

(a) $\emptyset$, (b) $\{[x,y] \in \mathbb{P}^1 \mid x \neq 0\}$, (c) $\mathbb{C}$, (d) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y^2\}$

iii) Aus wievielen Elementen besteht die Menge $\{[0,a,0] \in \mathbb{P}^2 \mid a \in \mathbb{C}^*\}$? Begründen Sie Ihre Aussage!

iv) Aus wievielen Elementen besteht die Menge $\{[a,0,b] \in \mathbb{P}^2 \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2 - \{0,0\}\}$? Begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung: Zu *i)*: Alle genannten Mengen sind zumindest affine algebraische Mengen – für die Menge in (c) gilt dies, da sie sich schreiben lässt als $\{[1,a] \in \mathbb{P}^1 \mid a \in \mathbb{C}\}$, was nichts anderes ist als $\mathbb{C}$, also Menge (d). Wir müssen somit auf Irreduzibilität überprüfen. Für $\emptyset$ sind die Bedingungen in der Definition eines irreduziblen topologischen Raums trivialerweise erfüllt. Für $\mathbb{C}$ – also (c) und (d) – haben wir gesehen, dass alle echten, abgeschlossenen Teilmengen nur endlich viele Elemente enthalten. Wir können $\mathbb{C}$ somit nicht als endliche Vereinigung echter abgeschlossener Mengen schreiben, also ist $\mathbb{C}$ irreduzibel. Die Menge (e) ist die Verschwindungsmenge des irreduziblen Polynoms $x - y^2 \in \mathbb{C}[x,y]$, also ebenfalls irreduzibel. Lediglich die Menge in (b) ist reduzibel und somit als einzige keine affine algebraische Varietät.

Zu *ii)*: $\emptyset$ ist eine projektive Varietät, da wir sie beispielsweise als Verschwindungsmenge des konstanten 1-Polynoms (homogen!) in $\mathbb{P}^1$ finden können. Die Irreduzibilität ist offensichtlich.

Zu *iii)*: Die Menge enthält lediglich den Punkt $[0,1,0]$, da $[0,1,0] = [0,a,0]$ für alle $a \in \mathbb{C}^*$.

Zu *iv)*: Die Menge enthält unendlich viele Punkte, denn sie lässt sich schreiben als Vereinigung von $\{[1,0,s] \in \mathbb{P}^2 \mid s \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$ und dem Punkt $[0,0,1]$.

Aufgabe 4. (**20 Punkte**) **Das Newtonverfahren:**
Gegeben sei das Polynom $P(x,y) = x^2 + xy + y \in \mathbb{C}[x,y]$.

i) Bestimmen Sie das Newton-Polygon von $P(x,y)$.

ii) Bestimmen Sie die erste Näherungslösung $y(x) = tx^{\mu_0}$ der Gleichung $P(x,y) = 0$.

iii) Zeigen Sie, dass Ihre Näherungslösung noch keine Lösung der Gleichung $P(x,y) = 0$ ist.

iv) Verbessern Sie Ihre Lösung, indem Sie den Ansatz $y(x) = x^{\mu_0}(t + y_1(x))$ verwenden und die erste Näherungslösung der Gleichung $P_1(x,y_1)$ bestimmen, wobei $x^{\mu_0}P_1(x,y_1) = P(x, x^{\mu_0}(t+y_1))$.

Lösung: Zu *i)*: Das Polygon ist die Strecke, die den Punkt $(0,1)$ auf der y-Achse mit dem Punkt $(2,0)$ auf der x-Achse verbindet. Die Steigung der zugehörigen affinen Geraden ist $-\frac{1}{2}$, also $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0} = 2$. Die Gleichung der Geraden ist somit $\alpha + 2\beta = 2$.

Zu *ii)* Damit ist $P(x,y) = x^2 + y + \sum_{\alpha+2\beta>2} a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta$. Setzt man in den quasihomogenen Teil den Ansatz $y = tx^{\mu_0} = tx^2$ ein, so erhält man:

$$x^2 + tx^2 = x^2 g(t) = x^2(1+t)$$

Die Nullstelle von $g(t) = (1+t)$ ist $t_0 = -1$. Somit ist die erste Näherungslösung:

$$y_0 = (-1)x_1^2, \quad \text{mit } x_1 = x.$$

Zu *iii)* Man hat

$$P(x,y_0) = x^2 - x^3 - x^2 = -x^3 \neq 0,$$

somit ist $y = -x^2$ noch keine Lösung.

Zu *iv)* In der Rekursion startet man mit dem Ansatz

$$y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1) = x_1^2(-1 + y_1)$$

und substituiert entsprechend im Polynom. Es folgt:

$$\begin{aligned}
P(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0+y_1)) &= x_1^2 + x_1(x_1^2(-1+y_1)) + x_1^2(-1+y_1) \\
&= x_1^2(1 + x_1(-1+y_1) + (-1+y_1)) \\
&= x_1^2(y_1 + x_1y_1 - x_1) \\
&= x_1^{\mu_0}P_1(x_1,y_1)
\end{aligned}$$

Das Newton-Polygon von P_1 verbindet die Punkte $(0,1)$ und $(1,0)$, die Steigung ist -1, also $\mu_1 = 1$. Die Gleichung der affinen Geraden ist $\alpha + \beta = 1$. Der ensprechende quasi-homogene Teil von $P_1(x,y)$ ist $y_1 - x_1$. Setzt man in den quasihomogenen Teil den Ansatz $y = tx_1^{\mu_1} = tx_1$ ein, so erhält man:

$$tx_1 - x_1 = x_1 g(t) = x_1(t-1)$$

Das Polynom $g(t) = (t-1)$ hat nur eine Nullstelle $t_1 = 1$. Es folgt für die zweite Näherungslösung:

$$\begin{aligned}
y &= x^{\mu_0}(t_0 + x_1^{\mu_1}t_1) \\
&= (-1)x^2 + x^2x_1 \\
&= x^3 - x^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 5. (20 Punkte) Newton-Okounkov Körper:
Sei $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ der Ring der Polynome in zwei Variablen. Sei $\mathbb{Z}^2$ versehen mit der lexikographischen Ordnung, d.h. $(a, b) > (c, d)$ genau dann wenn $a > c$ oder $a = c$ und $b > d$. Für eine natürliche Zahl $p > 0$ sei

$$\nu_p : \mathbb{C}[x_1, x_2] - \{0\} \to \mathbb{Z}^2, \quad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x_1^\alpha x_2^\beta \mapsto \min\{(\alpha, \beta + p\alpha) \mid a_{\alpha,\beta} \neq 0\},$$

und sei $\nu_p : \mathbb{C}(x_1, x_2) - \{0\} \to \mathbb{Z}^2$ definiert durch $\nu_p(\frac{f}{g}) = \nu_p(f) - \nu_p(g)$.
Die Menge $U_0 = \{[1, a, b] \in \mathbb{P}^2 \mid a, b \in \mathbb{C}^2\} \subset \mathbb{P}^2$ ist eine offene, dichte und affine Teilmenge im $\mathbb{P}^2$. Somit ist $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}(U_0) = \mathbb{C}(x_1, x_2)$.

i) Zeigen Sie: Für alle $p > 0$ ist ν_p eine Bewertung.

ii) Man erhält eine induzierte Bewertung auf dem homogenen Koordinatenring $\mathbb{C}[\mathbb{P}^2] = \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{C}[\mathbb{P}^2]_d$ von $\mathbb{P}^2$.

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{\nu}_p : \mathbb{C}[\mathbb{P}^2] & = & \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \\ \mathbb{C}[\mathbb{P}^2]_d & \ni & f & \mapsto & (d, \nu_p(f/x_0^d)) \end{array}$$

Berechnen Sie $\tilde{\nu}_p(x_0)$, $\tilde{\nu}_p(x_1)$ und $\tilde{\nu}_p(x_2)$.

iii) Berechnen Sie den Newton-Okounkov Körper des $\mathbb{P}^2$ bezüglich der Bewertung $\tilde{\nu}_p$.

Lösung: Zu *i)*: Sei $f = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x_1^\alpha x_2^\beta$ und $g = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} x_1^\alpha x_2^\beta$, dann folgt

$$\begin{aligned} \nu_p(f + g) = \min\{(\alpha, \beta + p\alpha) \mid a_{\alpha,\beta} + b_{\alpha,\beta} \neq 0\} &\geq \min\{(\alpha, \beta + p\alpha) \mid a_{\alpha,\beta} \neq 0 \text{ or } b_{\alpha,\beta} \neq 0\} \\ &\geq \min\{\nu_p(f), \nu_p(g)\} \end{aligned}$$

Aus der Definition folgt direkt $\nu_p(\lambda f) = \nu_p(f)$ für alle $\lambda \neq 0$. Man beachte, dass man ein Monom durch seine Bewertung eindeutig festgelegt ist: $\nu_p(x_1^\alpha x_2^\beta) = (\alpha, \beta + p\alpha)$. Ist nun (α_0, β_0) so, dass $\nu_p(f) = (\alpha_0, \beta_0 + p\alpha_0)$ und ebenso (γ_0, δ_0) so, dass $\nu_p(g) = (\gamma_0, \delta_0 + p\gamma_0)$, dann gilt $\nu_p(x_1^\alpha x_2^\beta) > (\alpha_0, \beta_0 + p\alpha_0)$ für jedes andere Monom in f mit Koeffizienten ungleich 0, und ebenso für g: $\nu_p(x_1^\gamma x_2^\delta) > (\gamma_0, \delta_0 + p\gamma_0)$. Man erhält dann für die Bewertungen von $(x_1^{\alpha_0} x_2^{\beta_0})(x_1^{\gamma_0} x_2^{\delta_0})$ und $(x_1^\alpha x_2^\beta)(x_1^\gamma x_2^\delta)$:

$$(\alpha_0 + \gamma_0, \beta_0 + \delta_0 + p(\alpha_0 + \gamma_0)) < (\alpha + \gamma, \beta + \delta + p(\alpha + \gamma))$$

für alle Paare $((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) \neq ((\alpha_0, \beta_0), (\gamma_0, \delta_0))$, die als Potenz in f respektive g vorkommen. Und somit gilt: $\nu_p(fg) = \nu(f) + \nu_p(g)$.

Zu *ii)*: Wie in der Vorlesung betrachten wir

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & \to^{rat. Funktion} & \frac{x_0}{x_0} & \to^{Dehom.} & 1 & \to^{\nu_p} & 0 \\ x_1 & & \frac{x_1}{x_0} & & x_1 & & (1, p) \\ x_2 & & \frac{x_2}{x_0} & & x_2 & & (0, 1) \end{array}$$

Es folgt: $\tilde{\nu}_p(x_0) = (1, 0, 0)$, $\quad \tilde{\nu}_p(x_1) = (1, 1, p)$, $\quad \tilde{\nu}_p(x_2) = (1, 0, 1)$.

Zu *iii)*: Für ein beliebiges Monom $x_0^a x_1^b x_2^c$ erhält man

$$\tilde{\nu}_p(x_0^a x_1^b x_2^c) = (a + b + c, b, c + pb),$$

das Monom läßt sich also eindeutig aus der Bewertung rekonstruieren. Somit gibt es in jedem Polynom einen eindeutigen Summanden, der ein Monom ist, so dass die Bewertung des Polynoms genau gleich der Bewertung dieses Summanden ist. Der Newton-Okounkov Körper ist somit die konvexe Hülle der Punkte, die man aus der Bewertung von Monomen erhält, sie haben die Form

$$\frac{1}{a + b + c}(b, c + pb) = \frac{1}{a + b + c}\left(a(0, 0) + b(1, p) + c(0, 1)\right), \ a, b, c \in \mathbb{N}_0.$$

Es ist also die konvexe Hülle der Punkte $(0, 0)$, $(1, p)$ und $(0, 1)$.