

## Übungen zu Newton-Okounkov Theorie

---

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie den homogenen Koordinatenring von  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$ .

**Aufgabe 2.** Wiederholen Sie das Beispiel aus der Vorlesung zum Newton-Okounkov-Körper von  $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ . Verwenden Sie diesmal jedoch die umgekehrte rechte lexikographische Ordnung auf  $\mathbb{Z}^4$ , das heißt  $\mathbf{i} \leq_{\text{urlex}} \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{i} \geq_{\text{rlex}} \mathbf{j}$ .

**Aufgabe 3.** Wiederholen Sie das Beispiel aus der Vorlesung zum Newton-Okounkov-Körper von  $\mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$ . Verwenden Sie diesmal jedoch die umgekehrte rechte lexikographische Ordnung auf  $\mathbb{Z}^3$ , das heißt  $\mathbf{i} \leq_{\text{urlex}} \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{i} \geq_{\text{rlex}} \mathbf{j}$ .

**Aufgabe 4.** Setze

$$u_1(a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u_2(b) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}, u_3(c) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Betrachten Sie die affine Varietät  $U_0 = \{[A = (a_{i,j})] \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3) \mid a_{1,3} \neq 0\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow U_0, (a, b, c) \mapsto [(u_1(a)u_2(b)u_3(c))Au_1(a)u_2(b)u_3(c)]^{-1}]$$

ein Isomorphismus von affinen Varietäten ist. Benutzen Sie diesen Isomorphismus  $\phi$  und die rechte lexikographische Ordnung auf  $\mathbb{Z}^3$ , um den Newton-Okounkov-Körper der Fannenvarietät erneut zu berechnen. Wie unterscheidet er sich vom Beispiel aus der Vorlesung?

**Abgabe am 02. Juli in der Vorlesung.**