Prof. Dr. Peter Littelmann
Christian Steinert

Sommersemester 2018
Blatt 3

Übungen zu Newton-Okounkov Theorie

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das Bild der Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2, t \mapsto (t^2, t^3 + 1)$ eine komplexe algebraische Kurve im $\mathbb{C}^2$ ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die singulären Punkte und die Tangentialgeraden in allen glatten Punkten der Kurven im $\mathbb{C}^2$ gegeben durch die folgenden Gleichungen.

(i) $y^3 - y^2 + x^3 - x^2 + 3x^2y + 3y^2x + 2xy = 0$.

(ii) $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$.

(iii) $y^2 = x^3 - x$.

Aufgabe 3. Sei $P(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x - y \in \mathbb{C}[x, y]$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Kurve $C_P \subseteq \mathbb{C}^2$ ist glatt.

(ii) Die Kurve $\tilde{C}_{\tilde{P}} \subseteq \mathbb{P}^2$ ist glatt, wobei $\tilde{P}$ die Homogenisierung von P bezeichnet.

Sollten Sie eine der beiden Aussagen widerlegt haben, geben Sie bitte die Singularitäten an.

Aufgabe 4. Gegeben sein neun komplex projektive Punkte $p_1, \ldots, p_9 \in \mathbb{P}^2$, die nicht alle auf einer projektiven Geraden liegen. Die Punkte sein so gewählt, dass jede projektive Gerade, die zwei der neun Punkte enthält, auch einen dritten enthält.

(i) Zeigen Sie, dass es eine lineare ABbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass die induzierte Abbildung $\overline{\phi} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ die Punkte $p_1, \ldots, p_9$ auf die Punkte

$$\begin{matrix} [0,1,-1] & [-1,0,1] & [1,-1,0] \\ [0,1,\alpha] & [\alpha,0,1] & [1,\alpha,0] \\ [0,\alpha,1] & [1,0,\alpha] & [\alpha,1,0] \end{matrix}$$

abbildet für ein $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ gelten muss.

(iii) Zeigen Sie, dass eine projektive Kurve vom Grad 3, die alle diese Punkte enthält, von der Form

$$\tilde{C}_\lambda = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, x^3 + y^3 + z^3 + 3\lambda xyz = 0 \right\}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sein muss. Wir interpretieren $\tilde{C}_\infty$ dabei als $\{xyz = 0\}$.

(iv) Zeigen Sie, dass $\tilde{C}_\lambda$ genau dann singulär ist, wenn $\lambda \in \{\infty, -1, \alpha, \overline{\alpha}\}$.

(v) Zeigen Sie, dass $\tilde{C}_\lambda$ in diesem Fall die Vereinigung von drei projektiven Geraden ist.

Abgabe am 7. Mai in der Vorlesung.