Prof. Dr. Peter Littelmann
Christian Steinert

Sommersemester 2018
Blatt 4

Übungen zu Newton-Okounkov Theorie

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Konsequenzen aus Bézouts Theorem.

(i) Jede glatte Kurve im $\mathbb{P}^2$ ist irreduzibel.

(ii) Jede irreduzible Kurve im $\mathbb{P}^2$ hat höchstens endlich viele Singularitäten.

(iii) Für $p \in (\operatorname{Sing} \tilde{C}_P) \cap \tilde{C}_Q$ gilt $I_p(\tilde{C}_P, \tilde{C}_Q) > 1$.
Hinweise: Begründen Sie, dass nach geeigneter Koordinatentransformation $p = [0, 0, 1]$ angenommen werden kann. Zeigen Sie anschließend, dass y^2 ein Teiler der Resultante sein muss, indem Sie die Einträge der Sylvestermatrix genauer untersuchen, und begründen Sie, warum diese Beobachtung bereits die Aussage beweist.

(iv) Angenommen eine Kurve im $\mathbb{P}^2$ vom Grad d hat mehr als $d/2$ Singularitäten, die alle auf einer Geraden liegen. Dann ist diese Gerade bereits eine Komponente der Kurve.

Aufgabe 2. Sein P und Q zwei homogene Polynome in $\mathbb{C}[x, y, z]$ ohne gemeinsamen Faktor.

(i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Sing}(\tilde{C}_P \cup \tilde{C}_Q) = \operatorname{Sing} \tilde{C}_P \cup \operatorname{Sing} \tilde{C}_Q \cup (\tilde{C}_P \cap \tilde{C}_Q)$.

(ii) Beweisen Sie damit (und Aufgabe 1), dass jede Kurve im $\mathbb{P}^2$ definiert durch ein Polynom ohne mehrfachen Faktor höchstens endlich viele Singularitäten besitzt.

Definition. Ein **Kegelschnitt** (*conic*) ist eine Kurve vom Grad zwei im $\mathbb{C}^2$ oder $\mathbb{P}^2$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für jede Menge von fünf Punkten im $\mathbb{P}^2$ existiert ein Kegelschnitt, der diese enthält.

(ii) Jede Kurve im $\mathbb{P}^2$ vom Grad vier mit vier Singularitäten ist reduzibel. *Hinweis:* Finden Sie einen Kegelschnitt durch die vier Singularitäten und einen zusätzlichen Punkt der Kurve.

(iii) Jeder irreduzible Kegelschnitt im $\mathbb{P}^2$ kann mittels einer projektiven Transformation in den Kegelschnitt definiert durch $x^2 = yz$ überführt werden und ist insbesondere glatt.

(iv) Jeder irreduzible Kegelschnitt im $\mathbb{P}^2$ ist homöomorph zum $\mathbb{P}^1$.

Definition. Ein **Kreis** ist ein Kegelschnitt gegeben durch die Gleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ bzw. deren Homogenisierung.

Aufgabe 4. Zeigen Sie zunächst, dass sich zwei verschiedene Kreise im $\mathbb{C}^2$ in keinem, einem oder zwei Punkten schneiden können und müssen. Bézouts Theorem verlangt nun aber, dass sich zwei verschiedene Kreise im $\mathbb{P}^2$ in vier Punkten schneiden. Erklären Sie diesen Sachverhalt. Wie entstehen insbesondere die „fehlenden“ Schnittpunkte?

Abgabe am 14. Mai in der Vorlesung.