Prof. Dr. Peter Littelmann
Christian Steinert

Sommersemester 2018
Blatt 8

Übungen zu Newton-Okounkov Theorie

Aufgabe 1. Sei A eine $\mathbb{C}$-Algebra, Γ eine total geordnete abelsche Gruppe und $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ quasi-Bewertungen auf $A \setminus \{0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{v} : A \setminus \{0\} \to \Gamma, \mathfrak{v}(a) := \min\{\mathfrak{v}_1(a), \mathfrak{v}_2(a)\}$, eine quasi-Bewertung definiert.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Sind $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ Bewertungen, dann ist $\mathfrak{v}$ wieder eine Bewertung.

Aufgabe 2. Sei $U_0 := \{s = [s_0, \ldots, s_n] \in \mathbb{P}^n \mid s_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}(U_0) \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$.

Definition. Sein X und Y projektive Varietäten. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Morphismus von projektiven Varietäten**, falls zu jedem Punkt x in X offene Umgebungen $x \in U \subseteq X$ und $f(x) \in V \subseteq Y$ mit $f(U) \subseteq V$ existieren, so dass U und V affine Varietäten sind und die Einschränkung $f : U \to V$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Abbildung $i : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, [x_0, x_1] \mapsto [x_0^2, x_0 x_1, x_1^2]$.

(i) Zeigen Sie, dass i injektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $i(\mathbb{P}^1)$ eine projektive Varietät ist.

(iii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $i^{-1} : i(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{P}^1$.

(iv) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbb{C}[i(\mathbb{P}^1)] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{P}^1]$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle irreduziblen Komponenten von $\mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subseteq \mathbb{C}^3$.
Hinweis: Irreduzible Komponenten sind bezüglich Inklusion maximale, irreduzible Teilmengen.

Abgabe am 18. Juni in der Vorlesung.