Prof. Dr. Peter Littelmann
Christian Steinert

Sommersemester 2018
Blatt 9

Übungen zu Newton-Okounkov Theorie

Definition 1. Eine Abbildung zwischen algebraischen Mengen $\phi : X \to Y$ (egal, ob affin oder projektiv), heißt **birational**, falls offene und dichte Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ existieren, so dass die Einschränkung $\phi|_U : U \to V$ ein Isomorphismus von algebraischen Mengen ist.

Hinweis: In allen unseren Beispielen werden die Teilmengen U und V affin sein, $\phi|_U$ muss dann ein Isomorphismus von affinen algebraischen Mengen sein.

Aufgabe 1. Sein X und Y Varietäten und $\phi : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann birational ist, wenn die induzierte Abbildung $\phi^{\#} : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X), f \mapsto f \circ \phi$ ein Körperisomorphismus ist.

Himweis 1: Da wir die Aussage nicht in dieser Allgemeinheit brauchen werden, können Sie sich auf den Fall beschränken, dass die Mengen U und V aus Definition 1 affin gewählt werden können. Sie können ebenfalls ohne Beweis verwenden, dass für jede offene (und damit dichte) Teilmenge $U \subseteq X$ einer Varietät X gilt, dass $C(U) \simeq C(X)$.

Hinweis 2: Zeigen Sie für die Rückrichtung zunächst, dass ϕ für jede affine Teilmenge $U \subseteq X$ und $\phi(U) \subseteq V \subseteq Y$ einen injektiven Ringhomomorphismus $(\phi|_U)^{\#} : \mathbb{C}[V] \hookrightarrow \mathbb{C}[U]$ definiert. Folgern Sie damit, dass $\mathbb{C}[U] \simeq \mathbb{C}[V][f_1, \dots, f_r]$, wobei $f_i = \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{C}(U)$. Bringen Sie die f_i auf einen gemeinen Nenner $q \in \mathbb{C}[U]$ und betrachten Sie die Einschränkung $\phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \phi(\tilde{U})$ auf die offene (und damit dichte) Teilmenge $\tilde{U} := U \cap D_X(q) \subseteq X$, wobei $D_X(q) := \{x \in X \mid q(x) \neq 0\}$.

Definition 2. Für die folgenden zwei Aufgaben sei $G = SL_2$,

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{C}^\times \right\} \subseteq G$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in G und

$$U^- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C} \right\}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $G = B \sqcup BwB$, wobei w die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : U^- \to G/B, u \mapsto uB$, birational ist.

Definition 3. Für die letzte Aufgabe sei $G = SL_3$,

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} s & \star & \star \\ 0 & t & \star \\ 0 & 0 & s^{-1}t^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{C}^\times \right\} \subseteq G$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in G,

$$
\begin{aligned}
U^- &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \\
U_1^- &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C} \right\}, \\
U_2^- &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{C} \right\} \text{ und} \\
U_3^- &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Abbildung $\phi : U^- \to G/B, u \mapsto uB$, ist birational.

(ii) Die Produktabbildung $\pi : U_1^- \times U_2^- \times U_3^- \to U^-, (u, v, w) \mapsto uvw$, ist ein Isomorphismus von affinen algebraischen Mengen.

(iii) Die Produktabbildung $\tau : U_1^- \times U_2^- \times U_1^-, (u, v, w) \mapsto uvw$, ist birational, aber kein Isomorphismus von affinen algebraischen Mengen.

Abgabe am 25. Juni in der Vorlesung.