ANALYSIS I - WINTERSEMESTER 2010-2011

STEFAN FRIEDL

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skriptum, folgende Bücher können aber zur Ergänzung und Vertiefung hilfreich sein:

(1) Forster: Analysis I
(2) Königsberger: Analysis I
(3) Walter: Analysis I

Konventionen und Definitionen aus der Mengenlehre

Begriffe, welche nicht definiert werden:

(1) der Mengenbegriff,
(2) die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3 \dots\}$,
(3) die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Wir verwenden die folgenden üblichen Schreibweisen:

(1) $\emptyset$ bedeutet die leere Menge, d.h. die Menge ohne Elemente.
(2) $a \in A$ bedeutet, dass a ein Element der Menge A ist.
(3) Seien A und B Mengen, dann schreiben wir

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\},$$

die Menge der geordneten Paare (d.h. $(a, b) \neq (b, a)$).

1. Der Körper der reellen Zahlen

1.1. Die Körperaxiome.

Definition. Ein *Kørper* ist eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen:

$$\begin{array}{rcl} K \times K & \mapsto & K, \\ (a,b) & \mapsto & a+b, \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} K \times K & \mapsto & K, \\ (a,b) & \mapsto & a \cdot b, \end{array}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(A1) Fř alle $x, y, z \in K$ gilt

$$(x+y)+z = x+(y+z) \text{ (Assoziativgesetz).}$$

(A2) Fř alle $x, y \in K$ gilt

$$x+y = y+x \text{ (Kommutativgesetz).}$$

(A3) Es existiert ein Element $N \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$x + N = x.$$

(A4) Zu jedem $x \in K$ existiert ein Element y, so dass

$$x + y = N.$$

(M1) Fř alle $x, y, z \in K$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ (Assoziativgesetz).}$$

(M2) Fř alle $x, y \in K$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x \text{ (Kommutativgesetz).}$$

(M3) Es existiert ein Element $E \in K$, so dass $N \neq E$, und so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$x \cdot E = x.$$

(M4) Zu jedem $x \in K \setminus \{N\}$ existiert ein Element z, so dass

$$x \cdot z = E.$$

(D) Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ Distributivgesetz.}$$

Die Abbildung '+' wird *Addition* genannt und die Abbildung '·' wird *Multiplikation* genannt. Die Eigenschaften A1-D, welche einen Körper definieren, werden *Körperaxiome* genannt. Insbesondere nennen wir die Eigenschaften A1-A4 die *Axiome der Addition* und die Eigenschaften M1-M4 die *Axiome der Multiplikation*.

Beispiel. Es sei F die Menge mit zwei Elementen $\{N, E\}$. Wir definieren die Addition folgendermaßen:

$$\begin{array}{rcl} F \times F & \to & F \\ (a,b) & \mapsto & a+b := \begin{cases} N, & \text{wenn } a = N \text{ und } b = N \\ N, & \text{wenn } a = E \text{ und } b = E \\ E, & \text{andernfalls,} \end{cases} \end{array}$$

und die Multiplikation wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} F \times F & \to & F \\ (a,b) & \mapsto & a \cdot b := \begin{cases} N, & \text{wenn } a = N \text{ und } b = N \\ E, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{array}$$

Dann ist F ein Körper. (Die Verifikation dieser Aussage ist etwas umständlich, aber nicht schwierig.)

1.2. **Folgerungen aus den Axiomen der Addition.**

Satz 1.1. *Sei K ein Körper. Dann existiert genau ein Element $k \in K$, so dass*

$$x + k = x$$

für alle $x \in K$.

Beweis. Wegen Axiom (A3) wissen wir, dass es mindestens ein Element $k \in K$ gibt, so dass

$$x + k = x$$

für alle $x \in K$.

Nun seien k und k' zwei Elemente mit der Eigenschaft, dass $x+k = x$ und $x + k' = x$ für alle $x \in K$. Es folgt, dass

$$k = k + k' = k' + k = k'.$$

(die erste Gleichheit folgt aus der Definition von k', die zweite von Axiom (A2), und die dritte aus der Definition von k). □

Wir nennen das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element die *Null* des Körpers, welche wir mit ‘0’ bezeichnen. Man beachte, dass $0 + x = x + 0$ für alle $x \in K$ wegen (A2).

Satz 1.2. *Sei K ein Körper und $a, b, c \in K$. Wenn $a+b = a+c$, dann gilt $b = c$.*

Beweis. Es sei $k \in K$ so gewählt, dass $a + k = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} b &\overset{A3}{=} 0 + b \\ &\overset{A4}{=} (k + a) + b \\ &\overset{A1}{=} k + (a + b) \\ &= k + (a + c) \\ &\overset{A1}{=} (k + a) + c \\ &\overset{A4}{=} 0 + c \\ &\overset{A3}{=} c. \end{aligned}$$

□

Satz 1.3. *Sei K ein Körper und sei $x \in K$. Dann existiert genau ein Element $y \in K$, so dass*

$$x + y = 0.$$

Beweis. Sei $x \in K$. Wegen Axiom (A4) wissen wir, dass es ein Element y gibt mit $x + y = 0$. Nun sei $y' \in K$ gegeben mit $x + y' = 0$. Dann folgt aus Satz 1.2, dass $y = y'$. □

Wir schreiben $-x$ (*minus* x) für das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element. Ab sofort schreiben wir

$$x - y := x + (-y).$$

Satz 1.4. *Sei K ein Körper.*

(1) $-0 = 0$,
(2) *für alle $x \in K$ gilt $-(-x) = x$,*
(3) *für alle $x, y \in K$ gilt $-(x + y) = -x - y$.*

Beweis. Es ist $0 + 0 = 0$ nach (A3), aus Satz 1.3 folgt, dass $0 = -0$. Sei $x \in K$. Nach Satz 1.3 genügt es zu zeigen, dass $(-x) + x = 0$. Aber

$$(-x) + x \overset{A2}{=} x + (-x) = 0.$$

Der dritte Teil ist eine Übungsaufgabe. □

1.3. **Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation.** Im Folgenden ist K durchgehend ein Körper. Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 1.1.

Satz 1.5. *Es existiert genau ein Element $k \in K$, so dass*

$$x \cdot k = x$$

für alle $x \in K$.

Wir nennen das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element die *Eins* des Körpers, welche wir mit '1' bezeichnen. Man beachte, dass $1 \cdot x = x \cdot 1$ für alle $x \in K$ wegen (M2). Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 1.3.

Satz 1.6. *Sei $x \in K \setminus \{0\}$. Dann existiert genau ein Element $y \in K$, so dass*

$$x \cdot y = 1.$$

Wir schreiben x^{-1} (*x hoch minus eins*) für das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element. Es seien $x, y \in K$. Dann gilt:

(1) $1^{-1} = 1$,
(2) für $x \neq 0$ gilt $x^{-1} \cdot x = 1$,
(3) $(-x) \cdot y = -x \cdot y$,
(4) $(-1) \cdot x = -x$,
(5) $(-x) \cdot (-y) = xy$,
(6) es sei $z \neq 0$, wenn $zx = zy$, dann gilt $x = y$,
(7) falls $x, y \neq 0$, dann gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

(Beweis: Übungsaufgabe.)

Ab sofort schreiben wir

$$xy := x \cdot y$$

und

$$\frac{x}{y} := x/y := xy^{-1}.$$

Satz 1.7. *Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0 = 0$.*

Beweis. Es sei $x \in K$. Dann gilt

$$x \cdot 0 \overset{A2}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Andererseits gilt $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$. Es folgt nun aus Satz 1.2, dass $0 = x \cdot 0$. □

1.4. **Weitere Definitionen.** Es seien $a_1, \ldots, a_s \in K$, wir definieren

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s := (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots) + a_s).$$

Es folgt aus (A1), dass $a_1 + \cdots + a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammern abhängt. Wir schreiben auch

$$\sum_{i=1}^{s} a_i := a_1 + \cdots + a_s.$$

Wir definieren zudem

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_s := (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_s).$$

Es folgt aus (M1), dass $a_1 \cdot \dots \cdot a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammern abhängt. Wir schreiben auch

$$\prod_{i=1}^{s} a_i := a_1 \cdot \dots \cdot a_s.$$

Der folgende Satz folgt aus mehrfacher Anwendung des Distributivgesetzes:

Satz 1.8. *Es seien $a_1, \dots, a_r \in K$ und $b_1, \dots, b_s \in K$, dann gilt*

$$\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{s} b_j\Big) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_i b_j.$$

Es sei $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$x^n := \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n-Mal}.$$

Zudem definieren wir $x^0 := 1$ (auch für $x = 0$) und für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$ definieren wir

$$x^{-n} := 1/(x^n).$$

Der folgende Satz ist leicht zu beweisen:

Satz 1.9. *Es seien $x, y \in K \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ (x^n)^m &= x^{mn} \\ x^n y^n &= (xy)^n. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir die verwendeten Körperaxiome nicht mehr explizit aufführen und die obigen Sätze nicht mehr explizit zitieren.

1.5. **Angeordnete Körper.**

Definition. Eine *Relation* in einer Menge M ist eine Teilmenge V von $M \times M$. Wir definieren:

$$a > b \text{ genau dann wenn } (a, b) \in V.$$

Definition. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Relation, welche folgende Ordnungsaxiome erfüllt:

(O1) Für alle $x, y \in K$ gilt *genau eine* der folgenden drei Aussagen:

$$x > y \text{ oder } y > x \text{ oder } x = y.$$

(O2) Für $x, y, z \in K$ gilt:

$$x > y \text{ und } y > z \Rightarrow x > z.$$

(O3) Für $x, y, a \in K$ gilt:

$$x > y \Rightarrow x + a > y + a.$$

(O4) Für $x, y, z \in K$ gilt:

$$x > y \text{ und } a > 0 \Rightarrow xa > ya.$$

Im Folgenden sei K ein angeordneter Körper. Es seien $x, y \in K$. Wir definieren

$$\begin{aligned} x < y \quad &:\Leftrightarrow \quad y > x, \\ x \geq y \quad &:\Leftrightarrow \quad x > y \text{ oder } x = y, \\ x \leq y \quad &:\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y, \\ x \text{ positiv} \quad &:\Leftrightarrow \quad x > 0, \\ x \text{ negativ} \quad &:\Leftrightarrow \quad x < 0. \end{aligned}$$

Satz 1.10. *Es sei $x \in K \setminus \{0\}$, dann gilt*

$$x^2 > 0.$$

Beweis. Aus (O1) folgt, dass entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Wir betrachten zuerst den Fall $x > 0$. Dann folgt aus (O4) sofort, dass $x^2 = x \cdot x > x \cdot 0 = 0$.

Nun betrachten wir den Fall $0 > x$. Aus (O3) folgt, dass

$$-x = 0 - x > x - x = 0.$$

Nachdem $-x > 0$ folgt nun aus (O4), dass

$$x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) > 0.$$

□

Korollar 1.11. *Es sei $x \in K \setminus \{0\}$, dann gilt*

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0.$$

Beweis. Nach Satz 1.10 gilt $\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$ und nach Voraussetzung gilt $x > 0$. Es folgt aus (O4), dass

$$\frac{1}{x} = x\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0.$$

□

Das folgende Korollar folgt aus Satz 1.10 und der Tatsache, dass $1 = 1 \cdot 1$.

Korollar 1.12. *Es sei K ein angeordneter Körper, dann gilt:*

$$1 > 0.$$

Satz 1.13. *Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b, c, d \in K$. Dann gilt*

$$a > b \text{ und } c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

Zudem gilt für $a, b \in K$, dass

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Aus Satz 1.13 und Korollar 1.12 folgt:

Korollar 1.14. *Es sei K ein angeordneter Körper, und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-Mal} > 0,$$

insbesondere

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-Mal} \neq 0.$$

Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$, wir definieren:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 1.15. *Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$, dann gilt:*

$$\begin{array}{rcl} |x| & \geq & 0, \\ |x| = 0 & \Leftrightarrow & x = 0, \\ |x \cdot y| & = & |x| \cdot |y|, \\ |x + y| & \leq & |x| + |y| \text{ (Dreiecksungleichung).} \end{array}$$

Die ersten drei Aussagen sind leicht zu beweisen, die vierte ist eine Übungsaufgabe.

1.6. **Der Satz über die reellen Zahlen.** Sei K ein Körper, $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$, wir definieren

$$n \cdot x := \underbrace{x + \cdots + x}_{n-Mal}.$$

Definition. Wir sagen ein angeordneter Körper erfüllt *das archimedische Axiom*, wenn gilt

(O5) für alle $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \cdot x > y.$$

In den Übungen werden wir sehen, dass es in der Tat angeordnete Körper gibt, welche das archimedische Axiom *nicht* erfüllen,.

Definition. Ein angeordneter Körper heißt *vollständig*, wenn das Vollständigkeitsaxiom gilt:

(V) Jede Cauchyfolge in K konvergiert.

Die Definition von 'Cauchyfolge' und 'Konvergenz einer Cauchyfolge' wird im übernächsten Kapitel nachgereicht. Mit diesen Definitionen können wir aber nun folgenden Satz formulieren:

Satz 1.16. *Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen angeordneten Körper, welcher das archimedische Axiom erfüllt und welcher vollständig ist.*

Dieser Satz wird erst in einer höheren Vorlesung bewiesen. Wir nennen den durch den Satz eindeutig bestimmten Körper den Körper der reellen Zahlen und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.

Wir definieren
$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}.$$

1.7. **Reelle Zahlen und natürliche Zahlen.**

Definition. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen heißt *injektiv*, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt
$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Vorübergehend bezeichnen wir das Eins-Element des Körpers $\mathbb{R}$ mit $1_\mathbb{R}$. Wir haben nun eine Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \underbrace{1_\mathbb{R} + \cdots + 1_\mathbb{R}}_{n-Mal} = n \cdot 1_\mathbb{R} \end{array}$$

Satz 1.17. *Die Abbildung φ is injektiv.*

Beweis. Es sei $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \neq a_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) können wir annehmen, dass $a_1 > a_2$. (Andernfalls gilt $a_2 > a_1$ und der folgende Beweis funktioniert genauso, nur mit den Rollen von a_1 und a_2 vertauscht.) Es folgt, dass ein $x \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_1 = a_2 + x$. Es folgt:
$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2 + x) = \varphi(a_2) + \varphi(x).$$
In Korollar 1.14 haben wir bewiesen, dass $\varphi(x) > 0$. Ordnungsaxiom (O3) besagt, dass
$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi(a_2) + \varphi(x) > \varphi(a_2).$$
Zusammenfassend erhalten wir
$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2),$$
welches nach (O1) impliziert, dass $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. $\square$

Nachdem $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ injektiv ist, werden wir von nun an $\mathbb{N}$ als Teilmenge der reellen Zahlen auffassen. Wir heben hiermit auch die Unterscheidung zwischen $1 \in \mathbb{N}$ und $1_\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ wieder auf.

Wir definieren nun

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & = & \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \in \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \text{ (die Menge der ganzen Zahlen)}, \\ \mathbb{Q} & = & \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} \subset \mathbb{R} \text{ (der Körper der rationalen Zahlen)}. \end{array}$$

Satz 1.18. *Für jedes $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Beweis. Aus Korollar 1.11 folgt, dass $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Nach dem archimedischen Axiom (O5) existiert daher ein n, so dass $n = n \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Es folgt nun aus Satz 1.13, dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

□

2. Die vollständige Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ eine Aussage. Nehmen wir, dass folgendes gilt:

(1) $A(n_0)$ is wahr,
(2) für jedes beliebige $n \geq n_0$ gilt: Falls $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann folgt aus wiederholter Anwendung von (2), dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$.

Ein typischer Induktionsbeweis besteht aus drei Schritten:

(1) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(n)$ gilt fuer $n = n_0$.
(2) Induktionsvoraussetzung: Man nimmt an, dass $A(n)$ gilt für ein beliebiges $n \geq n_0$.
(3) Induktionsschritt: Man zeigt, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch $A(n+1)$ wahr ist.

Satz 2.1. *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Wir müssen zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq 0$.

Induktionsanfang: Es ist

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x},$$

d.h. $A(0)$ is wahr.
Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Induktionsschritt: Wir müssen nun zeigen, dass $A(n+1)$ wahr ist. Das sieht man wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n+1} x^k & = & \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\ & \overset{A(n)}{=} & \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ & = & \frac{(1-x^{n+1})+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ & = & \frac{1-x^{n+2}}{1-x}. \end{array}$$

Nach Induktion folgt nun, dass $A(n)$ gültig ist für alle n. □

Bemerkung. In Beweisen wird die Induktionsannahme oft ausgelassen, allerdings empfehle ich diese am Anfang immer noch aufzuführen, weil es im Induktionsschritt hilfreich ist, diese vor Augen zu haben.

Lemma 2.2. *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Wir müssen zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq 1$.
Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist trivialerweise wahr.
Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Induktionsschritt: Wir müssen nun zeigen, dass $A(n+1)$ wahr ist. Wir berechnen

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 & = & \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ & = & \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2. \end{array}$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1).$$

$\square$

Satz 2.3. *(Bernoullische Ungleichung) Es sei $x \geq -1$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Beweis. Es sei $A(n)$ die Aussage, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ gilt trivialerweise.
Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)^n(1+x) \\ & \overset{A(n)}{\geq} & (1+nx)(1+x) \\ & = & 1+(n+1)x+nx^2 \\ & \geq & 1+(n+1)x. \end{array}$$

Beachten Sie, dass wir im 2. Schritt verwendet haben, dass $1+x \geq 0$. $\square$

Korollar 2.4. *Es sei $b > 1$ und $c \in \mathbb{R}$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt*

$$b^n > c.$$

Beweis. Wir setzen $x = b-1$. Nach dem Archimedischem Axiom existiert ein n_0, so dass

$$n_0 x \geq c.$$

Nun sei $n \geq n_0$. Es folgt aus Satz 2.3, dass

$$b^n \geq 1+nx \geq 1+n_0x > c.$$

$\square$

Es sei $n \in \mathbb{N}$, wir definieren

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \quad (n \text{ Fakultät}),$$

zudem definieren wir $0! := 1$. Für $0 \leq k \leq n$ in $\mathbb{N}_0$ definieren wir zudem

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Es gilt folgende leicht zu beweisende Identität:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Satz 2.5. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ sei $A(n)$ die Aussage:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ gilt trivialerweise.
Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsschritt: Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Wir wenden jetzt folgenden Trick an:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n+1} c_{k-1}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

3. Folgen und Reihen

3.1. **Folgen.**

Definition. Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Unter einer *Folge* verstehen wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq n_0\} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Eine Folge wird oft auch mit $(a_n)_{n\geq n_0}$ bezeichnet. Wenn $n = 1$ schreiben wir auch $(a_n) = (a_n)_{n\geq n_0}$.

Beispiel.
(1) Sei $a \in \mathbb{R}$, dann ist $n \mapsto a$ eine konstante Folge,
(2) $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist eine Folge,
(3) sei $a \in \mathbb{R}$, dann ist $n \mapsto a^n$ eine Folge,
(4) $n \mapsto (-1)^n$ ist eine Folge,
(5)
$$n \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}, \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ gerade}, \end{cases}$$
ist eine Folge.

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir sagen die Folge *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Behauptung. Die Folge $(\frac{n^2-1}{n^2})_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 1.

Beweis. Sei ε eine beliebige reelle Zahl größer Null. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2} - 1\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Nachdem

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

müssen wir ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Nach Satz 1.18 (ein Korollar zum archimedischem Axiom) existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Wir setzen nun $N = k$. Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir zeigen, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{n^2 - 1}{n^2} - 1 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Das ist aber in der Tat der Fall: Sei nämlich $n > N$, dann gilt

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Nachdem zudem $n \geq 1$ folgt sofort

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

□

Wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und wir nennen a den *Grenzwert* der Folge (a_n). Konvergiert (a_n) gegen 0, dann sagen wir, dass (a_n) eine *Nullfolge* ist.

Satz 3.1. *Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.*

Beweis. Angenommen, es existieren $a \neq b$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$. Nachdem $\varepsilon > 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert ein N_1, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_1$. Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ existiert auch ein N_2, so dass

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_2$. Für alle $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt nun

$$|a-b| = |(a-a_n) - (b-a_n)| \overset{\textit{Dreieck}}{\leq} |a-a_n| + |b-a_n| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|.$$

Wir erhalten also einen Widerspruch zur Annahme, dass a_n zwei verschiedene Grenzwerte hat. □

Wenn die Folge (a_n) einen Grenzwert besitzt, dann sagen wir, dass (a_n) *konvergiert*, andernfalls sagen wir, dass (a_n) *divergiert*.

Beispiel. Die Folge $n \mapsto (-1)^n$ divergiert. Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Satz 3.1.

Im Folgenden sagen wir, dass eine Folge (a_n) *beschränkt* ist, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|a_n| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.2. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Wir setzen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Es existiert insbesondere ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < 1.$$

Wir setzen nun

$$C := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}.$$

Behauptung: $|a_n| \leq C$ für alle n.
Beweis: Die Aussage ist trivialerweise wahr für $n \in \{1, \dots, N-1\}$. Sei nun $n \geq N$. Dann gilt

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq C.$$

□

Satz 3.3. *Ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *dann gilt:*

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
(3) *es sei* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$,
(4) *falls* $b \neq 0$ *and* $b_n \neq 0$ *für alle* n, *dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. (1) Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Nach Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gilt: Zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon_1$$

für alle $n \geq N_1$. Ausserdem existiert zu jedem $\varepsilon_2 > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - b| < \varepsilon_2$$

für alle $n \geq N_2$.

Wir setzen jetzt $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Wir wählen N_1 und N_2, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq N_1$ und

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq N_2$.

Wir setzen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Es sei nun $n \geq N$. Wir müssen zeigen, dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Es folgt aus der Dreiecksungleichung und den obigen Abschätzungen, dass in der Tat

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) - (b - b_n)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) Sei also $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \\ &\leq |ab - a_n b| + |a_n b - a_n b_n| \\ &= |b| \cdot |a - a_n| + |a_n| \cdot |b - b_n|. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.2 existiert ein C, so dass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können zudem C so wählen, dass außerdem $|b| \leq C$ und $C > 0$. Dann gilt

$$|ab - a_n b_n| \leq C(|a - a_n| + |b - b_n|)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen nun $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2C}$ und $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2C}$. Wir wählen N_1 und N_2, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

für alle $n \geq N_1$ und

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

für alle $n \geq N_2$. Wir setzen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Es sei nun $n \geq N$. Dann gilt

$$|ab - a_n b_n| \leq C(|a - a_n| + |b - b_n|) < C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon.$$

(3) Diese Aussage folgt sofort aus (2), wenn man $b_n = \lambda$ setzt für alle n.

(4) Dieser Beweis ist ähnlich wie der Beweis von (2), siehe Forster §4 Satz 4.

□

Satz 3.4. *Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, so dass $a_n \geq b_n$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Beweis. Wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Nehmen wir an, dass $b > a$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Es ist $\varepsilon > 0$, es existiert daher ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ und } |b - b_n| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber für $n \geq N$, dass

$$\begin{array}{ccccccccl} a_n - a & \leq & |a - a_n| & < & \varepsilon & = & \frac{b-a}{2} & , & \text{also } a_n < \frac{a+b}{2} \\ b - b_n & \leq & |b - b_n| & < & \varepsilon & = & \frac{b-a}{2} & , & \text{also } b_n > \frac{a+b}{2}. \end{array}$$

Es folgt $b_n > a_n$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiel. Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, so dass $a_n > b_n$, dann gilt nicht notwendigerweise, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. In der Tat, $\frac{1}{n} > 0$ für alle n, aber $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} 0$.

3.2. **Bestimmte Divergenz.**

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n > K$$

für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n < K$$

für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Beispiel.
(1) Die Folge $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$,
(2) Die Folge $a_n = -n^2$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$,
(3) Die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert, aber sie divergiert weder bestimmt gegen $+\infty$ noch bestimmt gegen $-\infty$.

Satz 3.5. *Es sei (a_n) eine Folge, welche bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Wir setzen $K = 0$. Nach Definition existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > K = 0$, für alle $n \geq N$. Wir setzen $n_0 = N$.

Wir zeigen jetzt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $K = \frac{1}{\varepsilon}$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n > K$$

für alle $n \geq N$. Es folgt, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

□

Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen (siehe Forster §4 Satz 9).

Satz 3.6. *Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle n (bzw. $a_n < 0$ für alle n), dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty.$$

Der Beweis des folgenden Satzes ist eine Übungsaufgabe:

Satz 3.7. *Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| < 1, \\ 1, & \text{falls } x = 1, \\ \text{existiert nicht}, & \text{falls } x \leq -1, \\ +\infty, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

3.3. **Quantoren.** Es sei M eine Menge und $A(x), x \in M$ eine Aussage für jedes Element der Menge. Wir führen folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} \underset{x\in M}{\forall} A(x) &:= \text{ für alle } x \in M \text{ ist die Aussage } A(x) \text{ gültig} \\ \underset{x\in M}{\exists} A(x) &:= \text{ es existiert ein } x \in M\text{, so dass die Aussage } A(x) \text{ gültig ist.} \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} x^2 > 0$$

$$\underset{x\in\mathbb{Z}}{\exists} x^2 = 9$$

sind beides wahre Aussagen.

Man kann Quantoren auch nacheinander schreiben. Das sieht man am besten in einem Beispiel: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

In Quantoren schreibt sich das wie folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wenn A eine Aussage ist, dann schreiben wir auch

$$\neg A :\Leftrightarrow A \text{ gilt nicht.}$$

Man beachte, dass

$$\begin{array}{rcl} \neg \underset{x\in M}{\exists} A(x) & \Leftrightarrow & \underset{x\in M}{\forall} \neg A(x) \\ \neg \underset{x\in M}{\forall} A(x) & \Leftrightarrow & \underset{x\in M}{\exists} \neg A(x) \end{array}$$

Diese Umschreibung kann auch mehrmals angewendet werden wie man an folgendem Beispiel sieht:

$$\begin{array}{rl} & \text{die Folge } (a_n) \text{ konvergiert nicht gegen } a \\ \Leftrightarrow & \neg(\lim_{n\to\infty} a_n = a) \\ \Leftrightarrow & \neg\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\exists} \neg\left(\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\exists}\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \neg\left(\underset{n\geq N}{\forall} |a_n - a| < \varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\exists}\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n\geq N}{\exists} \neg\left(|a_n - a| < \varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n\geq N}{\exists} |a_n - a| \geq \varepsilon. \end{array}$$

Man sieht, dass die Verwendung von Quantoren die Negation 'automatisiert'.

3.4. **Reihen.** Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir dann die Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt die *Reihe mit den Gliedern* a_n und wird mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Konvergiert diese Folge, dann schreiben wir auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Satz 3.8. *Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \textit{falls } |x| < 1, \\ \text{divergiert}, & \textit{falls } x \leq -1, \\ +\infty, & \textit{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $|x| < 1$. Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^n.$$

Aus Satz 2.1 folgt, dass

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{\infty} x^n & = & \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ & = & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot x^n \right). \end{array}$$

Wir wollen nun Satz 3.3 anwenden auf $a_n = \frac{1}{1-x}$ und $b_n = \frac{x}{1-x} \cdot x^n$. Dazu müssen wir aber erst zeigen, dass beide Grenzwerte existieren. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

nachdem $\frac{1}{1-x}$ eine Konstante ist, d.h. unabhängig von n. Aus Satz 3.7 folgt, dass $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1-x} \cdot x^n = \frac{x}{1-x} \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Wir wenden jetzt Satz 3.3 und die obigen Berechnungen an und erhalten

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{\infty} x^n & = & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot x^n \right) \\ & = & \frac{1}{1-x} + 0 = \frac{1}{1-x}. \end{array}$$

Die Fälle $x \geq 1$ und $x \leq -1$ überlasse ich als Übungsaufgabe. □

Der folgende Satz ist ein einfaches Korollar zu Satz 3.3.

Satz 3.9. *Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n \; + \; \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. Cauchyfolgen und das Vollständigkeitsaxiom

4.1. **Das Vollständigkeitsaxiom.**

Definition. Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Mit Quantoren können wir die Definition auch wie folgt schreiben:

$$(a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge } \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \underset{n,m\geq N}{\forall} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz 4.1. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, d.h. für alle $\rho > 0$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq M$ gilt

$$|a_m - a| < \rho.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Man beachte, dass

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a|.$$

Wir setzen jetzt $\rho = \frac{\varepsilon}{2}$. Es existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq M$ gilt

$$|a_m - a| < \rho = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen jetzt $N = M$. Für alle $n, m \geq N$ gilt dann

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Satz 1.16 besagt, dass die Umkehrung von Satz 4.1 gilt. Zur Erinnerung, Satz 1.16 lautet wie folgt:

Satz 1.16. *Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen angeordneten Körper (nämlich $\mathbb{R}$), welcher das archimedische Axiom erfüllt und welcher das Vollständigkeitsaxiom erfüllt:*

(V) *Jede Cauchyfolge konvergiert.*

Eine Folge (a_n) heißt *monoton fallend*, falls

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ für alle } n,$$

und sie heißt *monoton steigend*, falls

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ für alle } n.$$

Wir sagen (a_n) is *monoton*, wenn die Folge entweder monoton fallend oder monoton steigend ist. Wir nennen (a_n) *beschränkt*, wenn es ein C gibt, so dass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.2. *Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.*

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Folge (a_n) monoton steigend ist. Nehmen wir an, dass (a_n) keine Cauchy-Folge ist.

Zur Erinnerung:

$$(a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge } \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \underset{n,m\geq N}{\forall} |a_n - a_m| < \varepsilon$$

und

$$(a_n) \text{ ist keine Cauchy-Folge } \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\exists} \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \underset{n,m\geq N}{\exists} |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Sei also solch ein ε gewählt. Wir setzen $N = 1$. Dann existieren $n_1 < m_1 \geq 1$, so dass

$$|a_{n_1} - a_{m_1}| > \varepsilon.$$

Nun setzten wir $N := \max\{n_1, m_2\}$, Dann existieren $n_2 < m_2 \geq N$, so dass

$$|a_{n_2} - a_{m_2}| > \varepsilon.$$

Iterieren wir dieses Verfahren, erhalten wir eine Indexfolge

$$1 \leq n_1 \leq m_1 \leq n_2 \leq m_2 \leq \dots$$

so dass jeweils

$$|a_{n_k} - a_{m_k}| \geq \varepsilon.$$

Nachdem (a_n) monoton steigend ist, folgt

$$a_{m_k} \geq a_{m_{k-1}} + \varepsilon \geq \cdots \geq a_1 + k\varepsilon.$$

Wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme, dass (a_n) beschränkt ist. $\square$

4.2. **Infimum und Supremum.** Im folgenden seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen gegeben, wir definieren:

$$\begin{array}{rcll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}, & \text{(geschlossenes Intervall)} \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, & \text{(offenes Intervall)} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}, & \text{(halboffenes Intervall)} \\
[a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}, & \text{(halboffenes Intervall)} \\
[a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\} & \\
(a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} & \\
(-\infty,a] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\} & \\
(-\infty,a) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}. &
\end{array}$$

Man beachte, dass an der Universität normalerweise die Schreibweise (a, b), anstatt $]a, b[$ verwendet wird.

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir sagen, M ist *nach oben beschränkt*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in M$ gilt, $x \leq C$. Ein solches C heißt *obere Schranke* für M. Ganz analog definieren wir *nach unten beschränkt* und *untere Schranke.*

Wenn es ein $x \in M$ gibt, so dass $y \leq x$ für alle $y \in M$, dann schreiben wir

$$\max\{M\} = x.$$

Genauso, wenn es ein $x \in M$ gibt, so dass $y \geq x$ für alle $y \in M$, dann schreiben wir

$$\min\{M\} = x.$$

Man beachte aber, dass $\max\{M\}$ und $\min\{M\}$ i.A. nicht definiert sind, z.B. ist das Maximum vom halb-offenen Intervall $[2, 3)$ nicht definiert.

Satz 4.3. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge. Dann existiert eine obere Schranke C für M, so dass es keine obere Schranke für M gibt, welche kleiner als C ist.*

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge. Wir nennen das durch Satz 4.3 eindeutig bestimmte Element das *Supremum* von M und bezeichnen es mit $\sup\{M\}$.

Beispielsweise gilt

$$\sup\{\,(-2, 3)\,\} = 3 \text{ und } \sup\{\,(-2, 3]\,\} = 3.$$

Im ersten Fall ist das Maximum nicht definiert, im zweiten Fall jedoch schon. Wenn $\max\{M\}$ existiert, dann gilt $\sup\{M\} = \max\{M\}$. Als weiteres Beispiel haben wir:

$$\sup\left\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1.$$

Beweis. [1] Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Teilmenge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_n \in \mathbb{Z}$ die kleinste ganze Zahl, mit der Eigenschaft, dass $\frac{p_n}{2^n}$ eine obere Schranke für M ist. Man beachte, dass $p_{n+1} \leq 2p_n$.

Die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)$ ist monoton fallend und beschränkt (jedes Element von M ist eine untere Schranke). Es folgt also aus Satz 4.2, dass die Folge konvergiert, wir setzen

$$C := \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n}.$$

[1] Es kann hilfreich sein, den Beweis mit einer expliziten Menge M (z.B. $M := (1, 3.25)$) durchzuarbeiten.

Wir behaupten, dass C die gewünschte Eigenschaft hat. Es sei $x \in M$. Nachdem $x \leq \frac{p_n}{2^n}$, folgt aus Satz 3.4, dass für alle n gilt:

$$x \leq \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n} = C.$$

Insbesondere ist C eine obere Schranke für M.

Nun sei $D < C$. Wir müssen zeigen, dass D keine obere Schranke für M sein kann. Nachdem $C - D > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^n} \leq C - D$, d.h.

$$D \leq C - \frac{1}{2^n} \leq \frac{p_n}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{p_n - 1}{2^n}.$$

Aber dann folgt, dass $\frac{p_n-1}{2^n}$ auch eine obere Schranke für M ist, im Widerspruch zur Konstruktion von p_n. □

Es $M \subset \mathbb{R}$ nun eine nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge. Genauso wie in Satz 4.3 existiert nun eine untere Schranke C für M, so dass es keine untere Schranke für M gibt, welche größer als C ist. Wir nennen dieses eindeutig bestimmte Element das *Infimum* von M und bezeichnen es mit $\inf\{M\}$. Beispielsweise gilt

$$\inf\{4 + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 4.$$

Wenn $M \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, dann schreiben wir $\sup\{M\} = \infty$, und wenn $M \subset \mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt ist, dann schreiben wir $\inf\{M\} = -\infty$,

Der folgende Satz, welcher in den Übungen bewiesen wird, erlaubt es uns oft Aussagen über Suprema und Infima auf Aussagen über Grenzwerte zurück zu führen.

Satz 4.4. *Es sei M eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) *Es existiert eine Folge (a_n) von Elementen in M, welche gegen* $\sup(M)$ *konvergiert.*
(2) *Wenn es eine Folge (a_n) von Elementen in M gibt, welche konvergiert, und so dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ eine obere Schranke für M ist, dann gilt* $\sup(M) = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Definition. Es sei (a_n) eine Folge. Wir definieren

$$\begin{array}{rcll} \limsup a_n & := & \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \,|\, k \geq n\} & \text{'Limes superior'} \\ \liminf a_n & := & \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \,|\, k \geq n\} & \text{'Limes inferior'}. \end{array}$$

Beispiel. Betrachten wir

$$a_n := \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ gerade}, \\ n, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Wir schreiben $b_n := \inf\{a_k \,|\, k \geq n\}$. Dann gilt

$$\liminf a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \,|\, k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \inf\{a_k \,|\, k \geq n\} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & n \text{ gerade}, \\ -\frac{1}{n+1}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Es folgt nun, dass $\liminf a_n = \lim b_n = 0$.

Der Beweis des folgenden Satzes ist eine (freiwillige) Übungsaufgabe.

Satz 4.5. *Es sei (a_n) eine Folge. Die Folge konvergiert genau dann, wenn $\liminf a_n = \limsup a_n$. Insbesondere gilt dann, dass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n.$$

Wir beenden dieses Kapitel mit folgendem Satz:

Satz 4.6. *Es sei $x \geq 0$. Dann existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $a^2 = x$.*

Beweis. Wir setzen

$$M := \{y \in \mathbb{R} \,|\, y^2 \leq x\}.$$

Man beachte, dass M nichtleer ist, weil $0 \in M$ (hier verwenden wir die Voraussetzung, dass $x \geq 0$). Man sieht leicht, dass $\max\{1, x\}$ eine obere Schranke für M ist. Wir setzen nun

$$a := \sup(M)$$

und wir behaupten, dass $a^2 = x$. Es folgt sofort aus Satz 3.4 und 4.4, dass $a^2 \leq x$.

Nehmen wir nun an, dass $a^2 < x$. Wir setzen[2] $d = x - a^2$. Wir wollen zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $(a+\varepsilon)^2 \leq x$. Haben wir solch ein ε gefunden, dann haben wir einen Widerspruch, weil $a+\varepsilon \in M$ per Definition von M, aber $a+\varepsilon > a$, d.h. a ist dann keine obere Schranke für M!

Um solch ein ε zu finden beachte man, dass

$$(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 = a^2 + \varepsilon(2a+\varepsilon).$$

Wir setzen nun $\varepsilon = \min\{a, \frac{d}{3a}\}$, dann gilt in der Tat

$$(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 = a^2 + (2a+\varepsilon)\varepsilon \leq a^2 + 3a\varepsilon \leq a^2 + d = x^2.$$

$\square$

[2] Es ist oft eine gute Idee wichtigen Objekten einen Namen zu geben.

Sei $x \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass $a^2 = b^2 = x$. Dann gilt

$$0 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Insbesondere gilt $a = b$ oder $a = -b$. Wir nennen nun das einzige Element $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, welches $a^2 = x$ erfüllt die *Wurzel von x* und bezeichnen es mit $\sqrt{x}$.

Wir wissen aus der Zahlentheorie, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, insbesondere gilt $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Anders ausgedrückt erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar 4.7. *Der Körper der rationalen Zahlen ist nicht vollständig, insbesondere gilt $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.*

(Hier schreiben wir $A \subsetneq B$, wenn $A \subset B$ aber $A \neq B$, d.h. A ist eine Teilmenge von B aber nicht ganz B.)

4.3. **Abzählbare und überabzählbare Mengen.** In diesem Kapitel geben wir einen weiteren Beweis dafür, dass $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Definition. Eine nichtleere Menge A heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt. Wir sagen zudem, dass die leere Menge auch abzählbar ist. Eine Menge, welche nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar.*

Beispiel. (1) Die Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(2) Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, in der Tat, die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{array}$$

ist eine surjektive Abbildung.

(3) Endliche Mengen sind abzählbar.

Der folgende Satz ist intuitiv klar, aber es ist nicht ganz einfach einen formalen Beweis dafür aufzuschreiben, dies zu tun ist eine 'Sternchen-Aufgabe'.

Satz 4.8. *Es sei A eine abzählbare Menge und B eine Untermenge. Dann ist B auch abzählbar.*

Satz 4.9. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine abzählbare Menge M_n gegeben. Dann ist die Menge $\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ auch abzählbar.*

Beweis. Nachdem M_n abzählbar ist, gibt es surjektive Abbildungen $f_n : \mathbb{N} \to M_n$. Wir schreiben $a_{nj} = f_n(j)$. Dann gilt

$$M_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}.$$

Wir schreiben Menge $\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ in einem quadratisch, unendlichem Schema wie folgt an:

$$\begin{array}{cccccccccc}
M_1: & a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & \dots & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \dots \\
M_2: & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \dots & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
M_3: & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \dots & & & \\
 & \downarrow & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
M_4: & a_{41} & & & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Wir definieren nun eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, indem wir $k \in \mathbb{N}$ das k-te Element in der obigen Aufführung von Elementen zuordnen. Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. (Dieser Beweis kann natürlich auch deutlich formaler durchgeführt werden, ohne auf Bilder zurückzugreifen.) $\square$

Korollar 4.10. *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis. Wir setzen $M_n := \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Nachdem $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, und nachdem es eine offensichtliche Bijektion $\mathbb{Z} \to M_n$ gibt, ist die Menge M_n auch abzählbar. Es ist

$$\mathbb{Q} = \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n,$$

und es folgt nun aus Satz 4.9, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. $\square$

Es sei (a_n) eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass für alle n gilt, dass $a_n \in \{0,1,\dots,9\}$. In den Übungen werden wir sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

konvergiert und der Grenzwert in $[0,1]$ liegt. Wir schreiben

$$0.a_1a_2a_3\dots$$

für den Grenzwert. In den Übungen werden Sie zudem beweisen, dass jede Zahl $x \in [0,1]$ geschrieben werden kann als

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

Satz 4.11. *Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass selbst das Interval $[0,1]$ nicht abzählbar ist. Nehmen wir an, dass $[0,1]$ abzählbar ist, d.h. wir nehmen an, es gibt eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$. Wir schreiben

$$\begin{array}{rcl} f(1) & =: & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ f(2) & =: & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ f(3) & =: & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ \vdots & & \end{array}$$

Wir setzen nun

$$c_n := \begin{cases} a_{nn}+2, & \text{falls } a_{nn} \in \{0,\dots,4\} \\ a_{nn}-2, & \text{falls } a_{nn} \in \{5,\dots,9\}. \end{cases}$$

und wir setzen

$$x := 0.c_1c_2c_3\dots$$

Dann gilt

$$|x - f(n)| \geq \frac{1}{10^n}.$$

[3] insbesondere gilt $x \neq f(n)$ für alle n. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass f surjektiv ist. Es folgt, dass $[0,1]$ nicht abzählbar ist. □

Ein *rationales Polynom von Grad n* ist ein Ausdruck

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n,$$

wobei $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{Q}$. Wir bezeichnen mit P_n die Menge aller rationalen Polynome von Grad n. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} P_n & \cong & \mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q} \\ a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n & \mapsto & (a_0,\dots,a_n). \end{array}$$

Wir haben oben gesehen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, und ein Argument wie im Beweis von Satz 4.9 zeigt auch, dass das Produkt von abzählbaren Mengen wiederum abzählbar ist. Insbesondere ist $\mathbb{Q}^{n+1}$ (und damit P_n) abzählbar. Die Menge aller rationalen Polynome (d.h. jedweden Grades) ist die Vereinigung der Mengen $P_n, n \in \mathbb{N}$, und damit nach Satz 4.9 auch abzählbar.

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn es ein rationales Polynom $p(t)$ gibt, so dass $p(x) = 0$. Z.B. ist $\sqrt{5}$ abzählbar, weil es eine Nullstelle des rationalen Polynoms $p(t) = 5 - t^2$ ist.

Satz 4.12. *Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.*

---

[3] Warum gilt nicht $|x - f(n)| \geq \frac{2}{10^n}$? Wir wissen nur, dass sich x und $f(n)$ an der n-ten Stelle um mindestens zwei unterscheiden, wir wissen nichts über die anderen Stellen. Es könnte z.B. $x = 0.35999\dots$ und $f(2) = 0.3700000\dots$ sein.

Beweis. Kurzversion: Wie oben gesehen ist die Menge aller rationalen Polynome abzählbar, weil jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat, folgt auch, dass die Menge der Nullstellen aller rationalen Polynome abzählbar ist. □

Eine Zahl, welche nicht algebraisch ist, heißt *transzendental.* Wir haben bewiesen, dass es nur abzählbar viele nicht-transzendentale Zahlen gibt, d.h. 'die meißten reellen Zahlen sind transzendental'. Es ist aber in den meißten Fällen sehr schwierig zu zeigen, dass eine gegebene Zahl transzendental sind. Zum Beispiel sind die Beweise, dass e und π (welche wir später noch präzise definieren werden) transzendental sind, sehr schwierig und langwierig.

4.4. **Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß.** Es sei (a_n) eine Folge und es seien $n_1, n_2, \dots$ natürliche Zahlen, so dass

$$n_1 < n_2 < n_3 \dots$$

dann ist

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$$

auch eine Folge, welche wir als *Teilfolge* von (a_n) bezeichnen. Man beachte, dass wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.

Satz 4.13. *(Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge besitzt eine Teilfolge, welche konvergiert.*

Ist z.B. $a_n = 2 + (-1)^n$, dann konvergiert die Teilfolge der geraden Folgenglieder und es konvergiert die Teilfolge der ungeraden Folgenglieder.

Beweis. [4] Es sei (a_n) eine beschränkte Folge. Es existieren also $x \le y \in \mathbb{R}$, so dass $a_n \in [x, y]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung. Es gibt eine Folge von Intervallen $[x_k, y_k]$, $k \ge 0$, so dass für alle k gilt:

(1) $[x_k, y_k] \subset [x_{k-1}, y_{k-1}]$ (falls $k \ge 0$),
(2) $[x_k, y_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder,
(3) $y_k - x_k = \frac{1}{2^k}(y - x)$.

[4] Es ist hilfreich, den Beweis mit einem explizitem Beispiel durchzuarbeiten. Sie können z.B.

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

nehmen.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach k. Wir setzen $x_0 = x, y_0 = y$. Dann hat $[x_0, y_0]$ offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. Nehmen wir nun an, dass wir schon das Intervall $[x_k, y_k]$ konstruiert haben. Wir setzen $z := \frac{x_k+y_k}{2}$. Nachdem $[x_k, y_k] = [x_k, z] \cup [z, y_k]$ und nachdem $[x_k, y_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, enthält $[x_k, z]$ unendlich viele Folgenglieder, oder $[z, y_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder. (Es können auch beide Intervalle unendlich viele Folgenglieder enthalten.) Wir setzen nun

$$[x_{k+1}, y_{k+1}] := \begin{cases} [x_k, z], & \text{falls } [x_k, z] \text{ unendlich viele Folgenglieder enthält,} \\ [z, y_k], & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es folgt, dass $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ die gewünschten Eigenschaften (1) und (2) besitzt, zudem gilt

$$y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k - x_k) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}(y - x) = \frac{1}{2^{k+1}}(y - x).$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Wir definieren nun eine Teilfolge von (a_n) wie folgt: Wir setzen $n_1 = 1$. Iterativ definieren wir jetzt

$$\begin{aligned} n_2 &:= \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_1 \text{ und } a_n \in [x_2, y_2]\} \\ n_3 &:= \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_2 \text{ und } a_n \in [x_3, y_3]\} \\ &\vdots \\ n_k &:= \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_{k-1} \text{ und } a_n \in [x_k, y_k]\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Man beachte, dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_{k-1} \text{ und } a_n \in [x_k, y_k]\}$ nichtleer ist, weil $[x_k, y_k]$ unendlich viele Folgenglieder besitzt.)

Behauptung. Die Teilfolge (a_{n_k}) konvergiert.

Es genügt zu zeigen, dass die Teilfolge (a_{n_k}) eine Cauchyfolge ist. Es sei also $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{2^K}(y - x) < \varepsilon.$$

Es seien $k, l \geq K$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass $|a_{n_k} - a_{n_l}| < \varepsilon$. Für alle $k, l \geq K$ gilt $a_{n_k} \in [x_k, y_k] \subset [x_K, y_K]$ und $a_{n_l} \in [x_l, y_l] \subset [x_K, y_K]$. Insbesondere folgt $a_{n_k}, a_{n_l} \in [x_K, y_K]$, d.h.

$$|a_{n_k} - a_{n_l}| \leq y_K - x_K = \frac{1}{2^K}(y - x) < \varepsilon.$$

(Die erste (Un)-Gleichung gilt offensichtlich, die zweite gilt wegen der Definition von $[x_K, y_K]$, und die dritte wegen der Wahl von K.) $\square$

4.5. **Berührpunkte und Häufungspunkte.** Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wir nennen das *offene* Intervall

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung* von x.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x \in \mathbb{R}$.
(1) Der Punkt x heißt *Berührpunkt von M*, falls in jeder ε-Umgebung von x mindestens ein Punkt von M liegt.
(2) Der Punkt x heißt *Häufungspunkt von M*, falls in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Punkte von M liegen.

Beispiel. (1) Wenn $x \in M$, dann ist x ein Berührpunkt von M.
(2) Die Menge der Berührpunkte von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist $\mathbb{Z}$, aber $\mathbb{Z}$ hat keine Häufungspunkte.
(3) Es sei

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann ist 0 ein Berührpunkt und

$$\left\{ \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

ist die Menge aller Berührpunkte. Hingegen ist 0 der einzige Häufungspunkt.
(4) Es sei $M = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R}$ die Menge der Berührpunkte und die Menge der Häufungspunkte.

Satz 4.14. *Es sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit unendlich vielen Elementen. Dann besitzt M mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Nachdem M unendlich viele Elemente besitzt, können wir eine Folge (a_n) finden, so dass
(1) $a_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(2) $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$.

Diese Folge ist beschränkt weil M beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert nun eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, welche konvergiert. Es sei a der Grenzwert dieser Teilfolge.

Behauptung. a ist ein Häufungspunkt von M.

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $U_\varepsilon(a) \cap M$ unendlich viele Elemente enthält. Nachdem (a_{n_k}) gegen a konvergiert, existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

für alle $k \geq K$. Insbesondere gilt für alle $k \geq K$, dass

$$a_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \cap M.$$

Nachdem die a_{n_k} alle verschieden sind und es unendliche viele natürliche Zahlen $\geq K$ gibt, folgt sofort, dass $U_\varepsilon(a) \cap M$ unendlich viele Elemente enthält. □

5. Konvergenz von Reihen

5.1. **Konvergenzkriterien für Reihen.** Wir wenden uns jetzt wieder den Reihen zu.

Satz 5.1. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, dann ist (a_n) eine Nullfolge.*

Beweis. Zur Erinnerung, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist eine konvergente Reihe genau dann, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

konvergiert. Man beachte, dass $s_n - s_{n-1} = a_n$.

Wir wollen zeigen, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Wir setzen $\varepsilon > 0$. Nachdem (s_n) konvergiert, folgt aus Satz 4.1, dass (s_n) eine Cauchyfolge ist. Es gibt also ein M, so dass

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq M$. Insbesondere folgt für alle $n \geq N := M + 1$, dass

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

□

Satz 5.2. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe gegeben, so dass $a_n \geq 0$ für alle n. Wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Andernfalls divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bestimmt gegen $+\infty$.*

Beweis. Nachdem $a_n \geq 0$ folgt, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

monoton wachsend ist. Wenn die Folge (s_n) beschränkt ist, dann konvergiert sie nach Satz 4.2. Wenn die Folge (s_n) unbeschränkt ist, dann divergiert sie bestimmt gegen $+\infty$. (Das hatten wir nie explizit bewiesen, folgt aber sehr leicht aus den Definitionen.) □

Wir nennen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ die *harmonische Reihe*. Der folgende Satz zeigt u.a., dass die Umkehrung von Satz 5.1 nicht gilt.

Korollar 5.3. *Die harmonische Reihe divergiert bestimmt gegen* $+\infty$, *d.h.*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

Beweis. Wir betrachten
$$s_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
Man beachte, dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt
$$\begin{array}{rcccccccccccc} s_n & = & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{3}+ & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{5}+ & \frac{1}{6}+ & \frac{1}{7}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{9}+ & \dots+ & \frac{1}{n} \\ & \geq & 1+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{8}+ & \frac{1}{16}+ & \dots. & \end{array}$$
Man sieht nun, dass
$$s_{2^l}\geq 1+\frac{l}{2}.$$
Insbesondere ist die Folge (s_n) nicht beschränkt, und die Behauptung folgt aus Satz 5.2. □

Satz 5.4. *Es sei* $k>1$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$.

Beweis. Wir setzen $s_n:=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^k}$. Diese Folge ist monoton steigend. Nach Satz 5.2 genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für alle n gilt, dass
$$s_n\leq\frac{1}{1-2^{-k+1}},$$
d.h. die Folge (s_n) ist beschränkt.

Es sei also $n\in\mathbb{N}$. Wir wählen ein m, so dass $2^{m+1}-1\geq n$. Dann gilt
$$\begin{array}{rlclcccccccc} s_n & \leq & s_{2^{m+1}-1} & & & & & & & & & \\ & = & \sum_{j=1}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{j^k} & = & 1+ & \frac{1}{2^k}+ & \frac{1}{3^k}+ & \frac{1}{4^k}+ & \frac{1}{5^k}+ & \frac{1}{6^k}+ & \frac{1}{7^k}+ & \dots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^k} \\ & & & \leq & 1+ & \frac{1}{2^k}+ & \frac{1}{2^k}+ & \frac{1}{4^k}+ & \frac{1}{4^k}+ & \frac{1}{4^k}+ & \frac{1}{4^k}+ & \dots+\frac{1}{(2^m)^k} \\ & = & \sum_{i=0}^{m}\frac{2^i}{(2^i)^k}. & & & & & & & & & \end{array}$$
Es folgt aus Satz 2.1, dass
$$\sum_{i=0}^{m}\frac{2^i}{(2^i)^k}=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{(2^{k-1})^i}=\sum_{i=0}^{m}\left(2^{-k+1}\right)^i=\frac{1-(2^{-k+1})^{m+1}}{1-2^{-k+1}}\leq\frac{1}{1-2^{-k+1}}.$$
(Man beachte, dass wir in der letzten Ungleichung $k>1$ verwendet haben!) □

Wir werden später sehen, dass z.B.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

aber um das zu beweisen, werden wir erst mal π mathematisch präzise einführen müssen.

Satz 5.5. *(Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium) Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge, so dass $a_n \geq 0$ für alle n, und so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Beweis. Wir werden zeigen, dass die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen nun zeigen, dass es ein N gibt, so dass

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.

Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert ein K, so dass $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Wir setzen $N := K$ und behaupten, dass dieses N die gewünschte Eigenschaft hat.

Es seien also $n, m \geq K$ gegeben. O.B.d.A. $n \geq m$.
Wir betrachten zuerst den Fall, dass n ungerade und m ungerade. Dann gilt

$$s_n - s_m = \sum_{i=m+‘}^{n} (-1)^i a_i = a_{m+1} \underbrace{- a_{m+2} + a_{m+3}}_{\leq 0} \underbrace{- a_{m+4} + a_{m+5}}_{\leq 0} \ldots - a_n \leq a_m < \varepsilon.$$

(Für die Ungleichungen haben wir benützt, dass (a_n) monoton fallend ist.) [5] Andererseits gilt

$$s_n - s_m = \sum_{i=m+1}^{n} (-1)^i a_i = \underbrace{a_{m+1} - a_{m+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{m+3} - a_{m+4}}_{\geq 0} \cdots + \underbrace{a_{n-1} - a_n}_{\geq 0} \geq 0.$$

Es folgt also, dass $s_n - s_m \in [0, \varepsilon)$, also $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

Die anderen Fälle können nun genauso bewiesen werden. $\square$

[5]Wenn Sie die Beweise in einem Skript zu Hause durcharbeiten ist es vielleicht eine gute Idee in jedem Beweis zu markieren, wann welche Voraussetzung verwendet wird.

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beispielsweise konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ wegen dem Leibniz-Kriterium, aber die Reihe konvergiert nicht absolut, weil wir oben gesehen haben, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Satz 5.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ und } t_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Wir müssen zeigen, dass (s_n) eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Nachdem $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, bilden die (t_n) eine Cauchyfolge, es existiert also ein N, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|t_n - t_m| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch für alle $n \geq m \geq N$, dass

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = |t_m - t_n| < \varepsilon.$$

□

Satz 5.7. *(Majoranten-Kriterium) Es sei (c_n) eine Folge von nicht-negativen Zahlen und es sei (a_n) eine Folge, so dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n| < c_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $n_0 = 0$. (Die Summe der ersten n_0 Reihenglieder ändert nichts an der Konvergenz der Reihe.) Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k| \text{ und } t_n := \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Wir müssen zeigen, dass (s_n) eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Nachdem $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, bilden die (t_n) eine Cauchyfolge, es existiert also ein N, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|t_n - t_m| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch für alle $n \geq m \geq N$, dass

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k = |t_m - t_n| < \varepsilon.$$

□

Beispielsweise konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2},$$

nachdem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, und nachdem $\frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle n.

Satz 5.8. *(Quotienten-Kriterium) Es sei (a_n) eine Folge mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\theta \in (0,1)$, so für alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$a_n \neq 0 \text{ und } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $n_0 = 0$. (Die Summe der ersten n_0 Reihenglieder ändert nichts an der Konvergenz der Reihe.) Mit einem Induktionsargument können wir zeigen, dass

$$|a_n| \leq |a_0|\theta^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 3.8 gilt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|\theta^n = |a_0| \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{|a_0|}{1-\theta},$$

insbesondere konvergiert die Reihe (hier haben wir benützt, dass $\theta \in (0,1)$). Aus dem Majoranten-Kriterium folgt nun, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

□

5.2. **Umordnung von Reihen.**

Definition. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Folge und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann nennt man die neue Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beispiel. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $n_k := 2(2^{k-1} - 1)$. Wir betrachten die Folge (a_n), welche wie folgt definiert ist:

$$\text{wenn } n \in \{n_k + 1, \dots n_{k+1}\}, \text{ dann ist } a_n := (-1)^n \frac{1}{2^k}.$$

Dann ist

$$(a_n) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots).$$

Man beachte, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert.

Wir werden jetzt zeigen, dass es jedoch eine Umordnung dieser Reihe gibt, welche nicht konvergiert. Wir setzen $m_k := (2^{k-1}-1)+k-1$ und wir definieren

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 2(n-k), & \text{falls } n \in \{m_k+1, \dots m_k - 1\} \\ 2(k-1)-1, & \text{falls } n = m_k. \end{cases} \end{array}$$

Dies ist in der Tat eine Bijektion, wie man leicht nachweisen kann. (In der Tat kommt jede gerade Zahl genau ein Mal als $\tau(n)$ auf und auch jede ungerade Zahl erscheint genau ein Mal als $\tau(n)$.) Dann gilt

$$(a_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \underbrace{\frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{16}}_{8-Mal}, -\frac{1}{8}, \dots).$$

Wir setzen nun

$$t_n := \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)}.$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{array}{rcl} t_{m_k} & = & \sum_{j=1}^{m_k} a_{\tau(j)} \\ & = & \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} a_{2i} + \sum_{i=1}^{k} a_{2k-1} \\ & > & k \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{k} \frac{-1}{2^i} \geq \frac{k-1}{2} - \frac{k-2}{4} \geq \frac{k-1}{4}. \end{array}$$

Es folgt, dass die Partialsummen der umgeordneten Reihen nicht beschränkt sind, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ divergiert.

(Ein etwas anderes Beispiel ist auf Seite 72 in Forster: Analysis I gegeben)

Satz 5.9. *(Umordnungssatz) Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, welche absolut konvergiert, dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut gegen denselben Grenzwert.*

Beweis. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, welche absolut konvergiert und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Wir setzen $a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a$. Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein N finden, so dass

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Nachdem $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \delta.$$

(Diese Aussage werden Sie in den Übungen verifizieren.) Insbesondere existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nachdem τ eine Bijektion ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\{1, 2, \ldots, K-1\} \subset \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(N)\}. \tag{5.1}$$

(Man könnte z.B. $N := \max\{\tau^{-1}(1), \ldots, \tau^{-1}(K-1)\}$ setzen.) Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned} |\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a| &= \left|\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k + \sum_{k=1}^{K-1} a_k - a\right| \\ &\leq \left|\textstyle\sum_{k=1}^{K-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}\right| + \left|\textstyle\sum_{k=1}^{K-1} a_k - a\right|. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun beide Summanden ab. Es ist

$$\left|\sum_{k=1}^{K-1} a_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{K-1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k=K}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus $n \geq N$ und 5.1 folgt, dass

$$\{1, 2, \ldots, K-1\} \subset \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)\}.$$

Wir setzen nun

$$L := \{\tau(1), \ldots, \tau(n)\} \setminus \{1, \ldots, K-1\}.$$

Dann gilt auch, dass

$$\left|\sum_{k=1}^{K-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}\right| = \left|\sum_{l \in L} a_l\right| \leq \sum_{l \in L} |a_l| \leq \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[6] Die letzten beiden Ungleichungen, zusammen mit der vorhergehenden zeigen nun, dass für alle $n \geq N$ gilt, dass

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegen a konvergiert.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch absolut konvergiert. Aber dies folgt aus dem obigen Beweis, wenn wir $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ anstatt von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betrachten. □

5.3. Die Exponentialreihe.

Satz 5.10. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Definition. Wir nennen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ die *Exponentialreihe* und wir schreiben

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wir definieren zudem

$$e := \exp(1), \text{ genannt die } \textit{Eulersche Zahl}.$$

Beweis. Wir schreiben $a_n := \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Insbesondere gilt für alle $n \geq 2|x|$, dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

---

[6] In diesem Beweis ist es nicht ganz so leicht zu sehen, wo wir genau verwendet haben, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Wenn wir nur wissen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann können wir immer noch ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\left| \sum_{k=K}^{\infty} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir erhalten dann immer noch, dass $\left| \sum_{k=1}^{K-1} a_k - a \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Aber wir erhalten keine Abschätzung mehr für $\left| \sum_{l \in L} a_l \right|$. Für diese Abschätzung brauchen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Es folgt nun aus dem Quotienten-Kriterium (Satz 5.8), dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergiert. □

Theorem 5.11. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Für den Beweis von Theorem 5.11 brauchen wir folgenden Satz:

Satz 5.12. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen, welche absolut konvergieren. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir*

$$c_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Beweis. Ich gebe hier nur eine Beweis-Skizze, der vollständige Beweis ist z.B. auf Seite 77 von Forster: Analysis I.

Wir bezeichnen die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ und } B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$$

und wir schreiben $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Dann folgt aus Satz 3.3, dass

(5.2)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{n} b_q \right) = \lim_{n\to\infty} A_n B_n = (\lim_{n\to\infty} A_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} B_n) = A \cdot B.$$

Was wir zeigen wollen, ist dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) = A \cdot B. \tag{5.3}$$

Es folgt, dass für jedes $p, q \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $a_p \cdot b_q$ genau einmal in (5.2) und genau einmal in (5.3) erscheint. Man kann nun den Satz beweisen, indem man den Umordnungssatz (Satz 5.9) geschickt anwendet. Die genauen Details finden Sie, wie gesagt, in Forster: Analysis I. □

Wir können jetzt Theorem 5.11 unter Zuhilfenahme von Satz 5.12 beweisen.

Beweis von Theorem 5.11. Es seien also $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir schreiben

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{x^n}{n!} \\ b_n & = & \frac{y^n}{n!} \\ c_n & = & \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \end{array}$$

Dann gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

(Die letzte Gleichung ist der verallgemeinerte binomische Lehrsatz.) Es folgt also aus Satz 5.12, dass

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right)\left(\sum_{n=0}^\infty b_n\right) = \sum_{n=0}^\infty c_n = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).$$

□

Korollar 5.13. (1) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(2) *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) > 0$,

(3) *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$.

Beweis. (1) Es ist

$$\exp(-x)\exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = 1.$$

(Die letzte Gleichheit folgt sofort aus der Definition von $\exp(0)$ als Reihe.)

(2) Für $x \geq 0$ und jedes n gilt offensichtlich, dass die Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \geq 1.$$

Es folgt aus Satz 3.4, dass $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} s_n \geq 1$. Für $x < 0$ folgt die Aussage nun aus (1).

(3) Es ist

$$\exp(n) = \exp(1 + (n-1)) = \exp(1) \cdot \exp(n-1) = e \cdot \exp(n-1).$$

Ein einfaches Induktionsargument zeigt nun, dass $\exp(n) = e^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

□

6. Stetige Funktionen

6.1. **Definition und erste Eigenschaften.**

Definition. Eine *Funktion* ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$ wobei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Wir nennen D den *Definitionsbereich von f.*

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen, f *ist stetig im Punkt* x_0 wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ hatten wir die ε-Umgebung um x definiert als

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

In Quantorenschreibweise können wir die Stetigkeit nun wie folgt definieren:

$$f \text{ stetig im Punkt } x_0 \ :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in U_\delta(x_0)\cap D}{\forall} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir sagen $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ist stetig* wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist.

Lemma 6.1. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.*

(1) *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

ist stetig.

(2) *Es sei $c \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} g\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. (1) Es sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta = \varepsilon$, dann gilt

$$x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D \Rightarrow |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta = \varepsilon.$$

(2) Es sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann hat jedes $\delta > 0$ die gewünschte Eigenschaft.

$\square$

Satz 6.2. *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche stetig im Punkt $x_0 \in D$ sind. Dann gilt*

(1)
$$\begin{array}{rcl} f+g\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$
ist stetig im Punkt x_0.

(2)
$$\begin{array}{rcl} f\cdot g\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array}$$
ist stetig im Punkt x_0.

(3) *Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch die Funktion*
$$\begin{array}{rcl} \frac{f}{g}: D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$
stetig im Punkt x_0.

Beweis. Zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ existiert also ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ gilt:
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1,$$
zudem existiert zu jedem $\varepsilon_2 > 0$ ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_2$ gilt:
$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2.$$

(1) Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:
$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon.$$
Man beachte, dass
$$\begin{array}{rcl} |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| & = & |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \\ & \leq & |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|. \end{array}$$
Wir setzen jetzt $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ und nach Voraussetzung existieren $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ gilt
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2},$$
und für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_2$ gilt:
$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$
Wir setzen nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass
$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) das ist eine Übungsaufgabe im 7. Übungsblatt.

(3) das ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

□

Es seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, dann nennen wir

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \end{aligned}$$

eine *Polynomfunktion.* Sind $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen, dann heißt

$$\begin{aligned} f\colon \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

eine *rationale Funktion.*

Der folgende Satz folgt sofort aus Lemma 6.1 und Satz 6.2:

Satz 6.3. *Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind stetig.*

In den Übungen werden Sie auch zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist.

Satz 6.4. *Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon M \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so dass $f(D) \subset M$. Wenn f im Punkt x_0 stetig und g im Punkt $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} g \circ f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

stetig im Punkt x_0.

Beweis. O.B.d.A. $D = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{R}$. Es sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Nachdem g im Punkt $f(x_0)$ stetig ist, existiert ein $\eta > 0$, so dass gilt

$$|y - f(x_0)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Nachdem f im Punkt x_0 stetig ist, existiert auch ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta.$$

Kombinieren wir beide Aussagen, so folgt, dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

□

6.2. **Stetigkeit und Grenzwerte von Folgen.**

Satz 6.5. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche im Punkt x_0 stetig ist. Es sei (a_n) eine Folge in D, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Beweis. Es sei (a_n) eine Folge in D, welche gegen x_0 konvergiert, d.h.

$$\underset{\eta>0}{\forall}\ \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k\geq K}{\forall} |a_k - x_0| < \eta.$$

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$, d.h. wir wollen zeigen, dass

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall} |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Es sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem f im Punkt x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \text{ und } x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir setzen jetzt $\eta = \delta$ und wählen ein K, so dass gilt

$$k \geq K \Rightarrow |a_k - x_0| < \delta.$$

Wir setzen $N := K$, dann gilt

$$n \geq N = K \Rightarrow |a_k - x_0| < \delta \Rightarrow |f(a_k) - f(x_0)| < \varepsilon$$

wie gewünscht. □

Es gilt sogar eine stärkere Aussage:

Satz 6.6. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:*

$$\begin{array}{c} f \textit{ ist stetig} \\ \textit{im Punkt } x_0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \textit{für jede Folge } (a_n) \textit{ in } D, \textit{ welche} \\ \textit{gegen } x_0 \textit{ konvergiert gilt,} \\ \textit{dass auch } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0). \end{array} .$$

Der obige Satz besagt u.a., dass man die Definition der Stetigkeit von Funktionen auf die Definition von Konvergenz von Folgen zurückführen kann. Welche man von den beiden Aussagen im Satz 6.6 bevorzugt ist letztendlich Geschmackssache. Forster verwendet die rechte Aussage als Definition von Stetigkeit, und beweist auf Seite 109, dass beide Aussagen äquivalent sind.

Beweis. Die Richtung '⇒' hatten wir schon in Satz 6.5 bewiesen.

Wir beweisen jetzt '⇐'. Wir setzen also voraus, dass für jede Folge (a_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Nehmen wir an, dass f im Punkt x_0 *nicht* stetig ist. In Quantorenschreibweise gilt:

$$f \text{ nicht stetig im Punkt } x_0 \;\Leftrightarrow\; \underset{\varepsilon>0}{\exists}\; \underset{\delta>0}{\forall}\; \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D}{\exists} |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Sei also solch ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann existiert zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ ein Punkt $a_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap D$, so dass $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dann folgt leicht aus der Definition von Konvergenz von Folgen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, und dass $f(a_n)$ *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergiert. Dies ist also ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Mithilfe von Satz 6.6 kann man viele Aussagen über Stetigkeit auf Aussagen über Konvergenz von Folgen zurückführen. Z.B. kann man Satz 6.2 leicht aus Satz 3.3 beweisen.

6.3. **Grenzwerte von Funktionen.** Zur Erinnerung: Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dann nennen wir das offene Intervall

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

die ε-*Umgebung* von x. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x \in \mathbb{R}$. Der Punkt x heißt *Berührpunkt von D*, falls in jeder ε-Umgebung von x mindestens ein Punkt von D liegt.

Nun sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Berührpunkt von D. Dann schreiben wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{\delta>0}{\exists}\; \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D\setminus\{x_0\}}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Wenn x_0 Berührpunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ ist, dann schreiben wir

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{\delta>0}{\exists}\; \underset{x\in(x_0-\delta,x_0)\cap D}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Wenn x_0 Berührpunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ ist, dann schreiben wir

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{\delta>0}{\exists}\; \underset{x\in(x_0,x_0+\delta)\cap D}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Wenn D nach oben unbeschränkt ist, dann schreiben wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{X\in\mathbb{R}}{\exists}\; \underset{x\in(X,\infty)\cap D}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon,$$

und wenn D nach unten unbeschränkt ist, dann schreiben wir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{X\in\mathbb{R}}{\exists}\; \underset{x\in(-\infty,X)\cap D}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ weiterhin eine Funktion und x_0 ein Berührpunkt von D. Dann schreiben wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty :\Leftrightarrow \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall}\; \underset{\delta>0}{\exists}\; \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D}{\forall} f(x) > C$$

und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty :\Leftrightarrow \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D}{\forall} f(x) < C.$$

Ganz analog definieren wir $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\searrow x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}+3. \end{array}$$

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\searrow 0} f(x) & = & +\infty, \\ \lim_{x\nearrow 0} f(x) & = & -\infty, \\ \lim_{x\to 0} f(x) & = & \text{divergiert}, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) & = & 3. \end{array}$$

7. Stetige Grenzfunktionen

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Die Folge (f_n) heißt *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

die *Grenzfunktion der Folge* (f_n).

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{array}$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{array}$$

Die Funktionen f_n im vorherigen Beispiel sind alle stetig. Folgt daraus sofort, dass die Exponentionalfunktion ebenfalls stetig ist?

Beispiel. Für $n \geq 1$ betrachten wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-n|x|, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{array}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Funktionen f_n stetig sind. Die Grenzfunktion ist nun wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{array}$$

Insbesondere ist die Grenzfunktion *nicht stetig.*

Definition. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

In Quantorenschreibweise können wir die Definitionen folgendermaßen formulieren:

$$\begin{array}{lcl} (f_n) \text{ konv. punktweise gegen } f & \Leftrightarrow & \underset{x\in D}{\forall} \ \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \\ (f_n) \text{ konv. gleichmäßig gegen } f & \Leftrightarrow & \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ \underset{x\in D}{\forall} \ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \end{array}$$

Man beachte, dass eine Funktionenfolge, welche gleichmäßig konvergiert, auch punktweise konvergiert.

Satz 7.1. *(Satz über die Stetigkeit der Grenzfunktion) Es sei (f_n) eine Funktionenfolge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f ebenfalls stetig.*

Beweis. O.B.d.A. sei $D = \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Voraussetzungen besagen, dass wir Kontrolle über $|f(x) - f_n(x)|$ für alle $x \in D$ zugleich haben (hier benützen wir die gleichmäßige Konvergenz), und dass wir für jedes genügend große n Kontrolle über $|f_n(x) - f_n(x_0)|$ erhalten (wegen der Stetigkeit der Funktionen f_n). Es gilt nun, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(A)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(B)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(C)}.$$

Die Idee ist nun, $\delta > 0$ und n so geschickt zu wählen, dass alle drei Terme jeweils kleiner gleich $\frac{\varepsilon}{3}$ sind.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) existiert ein n, so dass für alle $y \in D$ gilt:

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.1}$$

Wegen der Stetigkeit von f_n existiert zudem ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta x_0 + \delta)$ gilt:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.2}$$

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq A + B + C.$$

Aber aus (7.1), angewandt auf $y = x$ und $y = x_0$, und aus (7.2) folgt, dass jeder dieser drei Ausdrücke kleiner gleich $\frac{\varepsilon}{3}$ ist. □

Satz 7.2. *(Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig.

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert insbesondere für jedes $x \in D$ die Folge der reellen Zahlen $(f_n(x))$, insbesondere existiert

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Wir zeigen nun, dass (f_n) gleichmäßig gegen die durch $x \mapsto f(x)$ definierte Funktion konvergiert.

Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$, dass

$$|f(x) - f_n(x)| < |\lim_{m \to \infty} \underbrace{f_m(x) - f_n(x)}_{\in(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Es sei nun (f_n) eine Folge von Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_n$. Dann ist s_n eine Funktion auf D. Wir sagen, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise (bzw. gleichmäßig) wenn die Folge der Partialsummen (s_n) punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergiert.

Wir erhalten nun folgende Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen.

Satz 7.3. *(Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Reihe von Funktionen. Nehmen wir an, es existiert eine Folge* *von nicht-negativen Zahlen* c_n*, so dass es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $|f_n(x)| < c_n$ *für alle* $n \geq n_0$ *und alle* $x \in D$*. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ konvergiert gleichmäßig.}$$

Wenn die f_n *darüber hinaus stetig sind, dann ist auch* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *stetig.*

Beweis. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_n$.

Behauptung. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon.$$

Der Beweis der Behauptung ist Wort für Wort der gleiche wie der Beweis vom Majoranten-Kriterium für Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (siehe Satz 5.7), man muss nur durchgehend 's_n' durch '$s_n(x)$ für alle $x \in D$' ersetzen. Die erste Aussage des Satzes folgt nun aus der Behauptung und aus Satz 7.2. Die zweite Aussage folgt dann sofort aus 7.1. □

Satz 7.4. *(Quotienten-Kriterium für Funktionenreihen) Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *eine Reihe von Funktionen. Wenn es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *und ein* $\theta \in (0, 1)$ *gibt, so dass für alle* $n \geq n_0$ *und alle* $x \in D$ *gilt:*

$$f_n(x) \neq 0 \text{ und } \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| \leq \theta.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig. Wenn die* f_n *darüber hinaus stetig sind, dann ist auch* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *stetig.*

Der Beweis dieses Satzes ist ebenfalls eine leichte Modifikation des Beweises des Quotientenkriteriums für Reihen (siehe Satz 5.8), welche wir als (freiwillige) Übungsaufgabe überlassen.

Kehren wir nun zurück zum Ausgangspunkt der Diskussion, nämlich der Frage: ist die Exponentialfunktion stetig, und wenn ja, wie zeigt man die Stetigkeit?

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Allerdings konvergiert diese Funktionenfolge *nicht* gleichmäßig. (In der Tat, für jedes $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, gilt die gewünschte Ungleichung für genügend große x nicht mehr.) Wir können also die obigen Sätze nicht direkt anwenden, um zu Zeigen, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

Das folgende Lemma ist eine einfache Verallgemeinerung einer Übungsaufgabe:

Lemma 7.5. *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $a > 0$ die Einschränkung von f auf $(-a, a)$ stetig ist, dann ist auch f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.*

Wegen diesem Lemma folgt die Stetigkeit von der Exponentialfunktion aus folgendem Satz.

Satz 7.6. *Es sei $a > 0$ gegeben. Dann konvergiert die Funktionenfolge*

$$\begin{aligned} f_n : (-a, a) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

gleichmäßig gegen:

$$\begin{aligned} f\colon (-a, a) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei also $a > 0$ gegeben. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N \geq 2|a|$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und $x \in (-a, a)$, dass

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \frac{|x|}{n+1} < \frac{|a|}{N+1} < \frac{1}{2}.$$

Der Satz folgt nun aus dem Quotienten-Kriterium für Funktionenreihen (Satz 7.4). □

8. Eigenschaften von stetigen Funktionen

8.1. **Der Zwischenwertsatz.**

Definition. Ein Intervall vom Typ $[a, b]$, $[a, \infty)$ oder $(-\infty, a]$ heißt *abgeschlossen.* Ein Intervall heißt *offen*, wenn es vom Typ (a, b), (a, ∞) oder $(-\infty, a)$ ist. Ein *kompaktes Intervall* ist beschränktes und geschlossenes Intervall, d.h. ein Intervall vom Typ $[a, b]$.

Im folgenden werden wir desöfteren Satz 6.5 verwenden, welcher folgendes besagt: wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, welche im Punkt x_0 und wenn (a_n) eine Folge in D ist, welche gegen x_0 konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Das folgende Lemma besagt, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind.

Lemma 8.1. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$.* [7]

Beweis. Nehmen wir an, es gibt kein solches C. Dann existiert insbesondere zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$, so dass $|f(x_n)| > n$.

Die Folge (x_n) von reellen Zahlen ist beschränkt, also existiert nach Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Nachdem $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt aus Satz 3.4, dass auch $a \leq x \leq b$, d.h. $x \in [a,b]$.

Aus Satz 6.5, folgt dass $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, insbesondere konvergiert die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, insbesondere ist die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ nach Satz 3.2 beschränkt, im Widerspruch zu $|f(x_{n_k})| > n_k$, für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Der folgende Satz besagt, dass eine stetige Funktion auf kompakten Intervallen die Extrema annimmt.

Satz 8.2. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren $x_0, x_1 \in [a,b]$, so dass*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

für alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Lemma 8.1 besagt, dass $f(M)$ beschränkt ist, insbesondere existiert $y_1 := \sup(f(M))$.

In Übungsblatt 4, Aufgabe 1 (a) haben Sie bewiesen, dass es eine Folge (z_n) in $f(M)$ gibt, welche gegen y_1 konvergiert. Wir wählen jetzt eine Folge (c_n) in $[a,b]$, so dass für jedes n gilt: $z_n = f(c_n)$.

Nachdem die Folge (c_n) beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe Satz 4.13), eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert.

Wir setzen $x_1 := \lim_{k\to\infty} c_{n_k}$. Dann gilt

$$f(x_1) = \lim_{k\to\infty} f(c_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \sup(f(M)).$$

(Hier haben wir wieder Satz 6.5 verwendet.) Es folgt also, dass $f(x_1)$ eine obere Schranke für $f(M)$ ist.

Genauso zeigt man auch die Existenz von x_0. □

[7] Hier und in vielen anderen Sätzen ist es eine gute Übung zu Zeigen, dass alle Voraussetzungen wirklich notwendig sind. Z.B. wenn $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem *offenen* Intervall ist, dann ist die Aussage des Lemmas i.A. nicht mehr gültig, d.h. es existiert i.A. kein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$. Man betrachte z.B. $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.

Der folgende Satz besagt, dass eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Funktionswert annimmt.

Satz 8.3. *(Zwischenwertsatz) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$, so dass $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. Sei also $y \in [f(a), f(b)]$. Wenn $y_0 = f(a)$, dann setzen wir $x_0 = a$ und wenn $y_0 = f(b)$, dann setzen wir $x_0 = b$.

Sei jetzt also $y_0 \in (f(a), f(b))$. Wir setzen

$$M := \{x \in [a,b] \,|\, f(x) < y_0\}.$$

Wir setzen $x_0 := \sup(M)$. Wir müssen jetzt zeigen, dass $f(x_0) = y_0$.

Wir wählen eine Folge (a_n) in M^-, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Nachdem $f(a_n) < y_0$ für alle n, folgt auch aus Satz 6.5 und Satz 3.4, dass

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq y_0.$$

Nehmen wir an, dass $f(x_0) < y_0$. Wir setzen $\varepsilon = y_0 - f(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt x_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$x \in [a,b] \cap U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(Indem wir δ notfalls durch $\min\{\delta, b - x_0, x_0 - a\}$ ersetzen, können wir annehmen, dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$.) Insbesondere gilt,

$$x \in [a,b] \cap U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon = y_0 - f(x_0) \Rightarrow f(x) < y_0.$$

Es folgt also, dass

$$f(x_0 + \frac{\delta}{2} < y_0,$$

d.h. $x_0 + \frac{\delta}{2} \in M$. Aber

$$x_0 + \frac{\delta}{2} > x_0,$$

im Widerspruch zu $x_0 = \sup(M)$. □

8.2. **Gleichmäßige Stetigkeit.** Es nun $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren:

$$f \text{ gleichmäßig stetig } :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in D\, mit\, |x-y|<\delta}{\forall} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zur Erinnerung: wenn $x_0 \in D$, dann hatten wir definiert:

$$f \text{ stetig im Punkt } x_0 \ :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in U_\delta(x_0)\cap D}{\forall} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir werden in den Übungen sehen, dass es stetige Funktionen auf offenen Intervallen gibt, z.B. $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(0,1)$, welche nicht gleichmäßig stetig sind. Andererseits besagt der folgende Satz, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig sind.

Satz 8.4. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Nehmen wir an, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gilt:

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x,y\in[a,b]\,mit\,|x-y|<\delta}{\exists} |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon.$$

Sei also solch ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Für jedes $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir also $x_n, y_n \in [a,b]$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Die Folge (x_n) ist beschränkt (weil sie in $[a,b]$ liegt), insbesondere existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.13), eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $c := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Nachdem $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ folgt, dass auch $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = c$.

Aus Satz 6.5 folgt, wegen der Stetigkeit von f, dass

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) - f(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}) = f(c) - f(c) = 0.$$

Dies ist aber im Widerspruch zu der Aussage, dass $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle k. □

9. Die Umkehrfunktion

9.1. **Stetigkeit von Umkehrfunktionen.**

Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton steigend*, wenn gilt:

$$x_1 > x_2 \text{ und } x_1, x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Die Funktion f heißt *streng monoton fallend*, wenn gilt:

$$x_1 > x_2 \text{ und } x_1, x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Wir sagen, f ist *streng monoton*, wenn f entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.

Wir sagen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist *bijektiv auf ihr Bild* wenn $f\colon D \to f(D)$ bijektiv ist. Man beachte, dass f bijektiv auf ihr Bild ist, genau dann wenn f injektiv ist.

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

bijektiv auf ihr Bild. Allgemeiner, wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton ist, dann ist f auch bijektiv auf ihr Bild. In der Tat, strenge Monotonie impliziert insbesondere,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Nun sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche bijektiv auf ihr Bild ist. Dann existiert zu jedem $a \in f(D)$ genau ein $b \in D$ mit der Eigenschaft $f(b) = a$. Dieses a wird mit $f^{-1}(a)$ bezeichnet, und die Funktion

$$\begin{aligned} f^{-1}: f(D) &\to D \\ x &\mapsto f^{-1}(x) \end{aligned}$$

heißt die *Umkehrfunktion von f*.

Folgendes Lemma werden Sie in den Übungen beweisen:

Lemma 9.1. *Wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend) ist, dann ist $f^{-1}: f(D) \to D$ ebenfalls streng monoton steigend (bzw. fallend).*

Es stellt sich nun folgende Frage: wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ bijektiv auf ihr Bild ist, und wenn f stetig ist, folgt dann, dass f^{-1} ebenfalls stetig ist?

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] \cup (2,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ x-1, & \text{falls } x \in (2,3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f stetig und bijektiv auf ihr Bild. Man beachte, dass $f([0,1] \cup (2,3]) = [0,2]$. Die Umkehrfunktion ist dann wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ x+1, & \text{falls } x \in (1,2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also nicht stetig.

Wir sehen also, dass die Umkehrfunktion i.A. nicht stetig ist, aber wir sehen auch, dass zumindest in dem obigen Beispiel die nicht-Stetigkeit von f^{-1} an der 'Zerissenheit' vom Definitionsbereich liegt.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *zusammenhängend* wenn für alle $a, b \in M$ gilt: $[a,b] \subset M$.

Beispielsweise sind alle Intervalle (egal ob geschlossen, offen, halboffen, unbeschränkt) zusammenhängend. Man kann auch zeigen, dass in der Tat jede zusammenhängende Menge ein Intervall ist. Diese Aussage wird auch in den Übungen diskutiert werden.

In den Übungen werden Sie folgenden Satz mithilfe des Zwischenwertsatzes beweisen:

Satz 9.2. *Es sei D zusammenhängend und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, welche bijektiv auf ihr Bild ist. Dann ist f streng monoton.*

Der folgende Satz ist der Hauptsatz dieses Kapitels.

Satz 9.3. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche bijektiv auf ihr Bild ist. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ ebenfalls stetig.*

Beweis. Ich beweise den Satz für den Fall, dass D ein offenes Intervall ist, die anderen Fälle werden fast genauso bewiesen. Aus Satz 9.2 folgt, dass f streng monoton ist, o.B.d.A. ist f streng monoton steigend.

Es sei also $y_0 \in f(D)$. Wir setzen $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Dann gilt:

$$f^{-1} \text{ stetig im Punkt } y_0 \;:\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{\delta>0}{\exists}\; \underset{y\in U_\delta(y_0)\cap D}{\forall} |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

Nachdem D ein offenes Intervall ist existiert ein η, so dass $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset D$. Indem wir notfalls η durch $\min(\eta, \frac{1}{2}\varepsilon)$ ersetzen, können wir annehmen, dass $\eta < \varepsilon$. Nachdem f streng monoton steigend ist, folgt, dass

$$f(x_0 - \eta) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \eta).$$

Wir wählen nun ein $\delta > 0$, so dass

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \eta), f(x_0 + \eta)).$$

Sei $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) &\Rightarrow y \in (f(x_0 - \eta), f(x_0 + \eta)) \\ &\Rightarrow f^{-1}(y) \in (f^{-1}(f(x_0 - \eta)), f^{-1}(f(x_0 + \eta))) \\ &\Rightarrow f^{-1}(y) \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \\ &\Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \eta. \end{aligned}$$

(Die Zweite Folgerung folgt aus Lemma 9.1.) Die Aussage folgt nun aus $\eta < \varepsilon$. ☐

Bemerkung. Ein aufmerksamer Student hat mich nach der Vorlesung gefragt, wo wir in dem obigen Beweis die Stetigkeit von f verwendet haben. In dem Beweis haben wir Satz 9.2 verwendet, welcher voraussetzt, dass f stetig ist. Allerdings erhalten wir als Konsequenz von Satz 9.2 die schwächere Aussage, dass f streng monoton ist. Wenn man sich den Beweis von Satz 9.3 nun durchliest, sieht man, dass wir in der Tat folgende stärkere Aussage bewiesen haben:
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion, dann ist $f^{-1} : f(D) \to D$ ebenfalls stetig.
Nehmen Sie sich eine beliebige, streng monoton steigende, aber nicht stetige Funktion auf einem Intervall, und betrachten Sie dann f^{-1}. Warum ist f^{-1} in ihrem Beispiel stetig, obwohl f nicht stetig war?

9.2. **Die Wurzelfunktionen.** Es sei k gerade, dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^k \end{aligned}$$

offensichtlich stetig und streng monoton steigend.

Lemma 9.4.

$$f([0,\infty)) = \{f(x) = x^k \,|\, x \in [0,\infty)\} = [0,\infty).$$

Beweis. Wir setzen $M := \{f(x) = x^k \,|\, x \in [0,\infty)\}$. Offensichtlich gilt

$$M \subset [0,\infty).$$

Wir zeigen nun, dass $[0,\infty) \subset M$. Sei also $x \in [0,\infty)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq x$, und daher auch $n^k \geq x$. Es ist $0 \in M$ und es gilt $n^k \in M$. Es folgt aus dem Zwischenwertsatz (Satz 8.3) angewendet auf die Einschränkung von f auf das kompakte Intervall $[0,n]$, dass auch das Intervall $[0,n^k] = [f(0), f(n)]$ in M enthalten ist. Nachdem $x \in [0,n^k]$ folgt insbesondere, dass $x \in M$. Es folgt, dass $[0,\infty) \subset M$. □

Die Umkehrabbildung von $f\colon x \mapsto x^k$ ist nun wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} [0,\infty) &\mapsto [0,\infty) \\ x &\mapsto \sqrt[k]{x} := f^{-1}(x). \end{aligned}$$

Diese Abbildung heißt die k-Wurzelfunktion und ist stetig nach Satz 9.3.

Der *Graph* einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist definiert als die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in D\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, welche bijektiv auf ihr Bild ist, dann gilt

$$(x,y) \in \mathrm{Graph}(f) \Leftrightarrow (y,x) \in \mathrm{Graph}(f^{-1}),$$

d.h. man erhält den Graphen von f^{-1} aus der ‘Spiegelung des Graphen von f an der $(x=y)$–Diagonale’. Insbesondere erhalten wir folgenden Graphen für die k-te Wurzelfunktion.

[Bilder gibt’s nur in der Vorlesung.]

Wenn k ungerade ist, dann ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

streng monoton steigend und es gilt $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion ist also auch auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und wird ebenfalls als Wurzelfunktion bezeichnet.

9.3. **Die Logarithmusfunktionen.** Zur Erinnerung: Die Exponentialfunktion ist wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

und sie hat folgende Eigenschaften:

(1) exp ist stetig,
(2) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
(3) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
(4) $\exp(0) = 1$,
(5) $e := \exp(1)$ ist die Eulersche Zahl, es gilt $e \approx 2.718281828\ldots$,
(6) für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$,
(7) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

In den Übungen werden Sie folgende Aussagen beweisen:

(1) für alle $x > 0$ gilt, $\exp(x) > 1 + x$,
(2) die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend,
(3) $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Der Graph der Exponentialfunktion ist wie folgt.

Die Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird die *Logarithmusfunktion* (kurz ln) genannt. Der Definitionsbereich von ln ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Der folgende Satz folgt aus Satz 9.3 und aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Satz 9.5. *Die Logarithmusfunktion*

$$\begin{array}{rcl} \ln : (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

hat folgende Eigenschaften:

(1) $\ln$ *ist stetig,*
(2) $\ln$ *ist streng monoton steigend,*
(3) $\ln(1) = 0$,
(4) *für alle* $x, y \in (0,\infty)$ *gilt* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Beweis. (1) Folgt aus Satz 9.3,
(2) folgt aus Lemma 9.1
(3) folgt aus $\exp(0) = 1$,
(4) Es seien also $x, y \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \ln(x \cdot y) & = & \ln(\exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y))) \\ & = & \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ & = & \ln(x) + \ln(y). \end{array}$$

□

Der Graph von der Logarithmusfunktion ist wie folgt:

Nun sei $a \in (0,\infty)$, wir definieren

$$a^x := \exp(x \cdot \ln(a)).$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist natürlich n auch eine reelle Zahl, und es gilt:

$$\begin{array}{rcl} \exp(n \cdot \ln(a)) & = & \exp(\underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n-Mal}) \\ & = & \underbrace{\exp(\ln(a)) \cdot \cdots \cdot \exp(\ln(a))}_{n-Mal} \\ & = & \underbrace{a \cdot \ldots a}_{n-Mal}. \end{array}$$

D.h. für $n \in \mathbb{N}$ stimmt die obige Definition von a^n mit der Definition über ein, welche wir ganz am Anfang gegeben hatten.

Unter Verwendung der Definition und der Eigenschaften von der Exponentialfunktion kann man zeigen, dass für alle $a, b \in (0,\infty)$ und

$x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} a^x a^y &=& a^{x+y} \\ (a^x)^y &=& a^{xy} \\ a^x b^x &=& (ab)^x \\ a^{-x} &=& \frac{1}{a^x}. \end{array}$$

Es sei $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} &\to& (0, \infty), \\ x &\mapsto& \exp(\ln(a)x) \end{array}$$

ist stetig und bijektiv (warum eigentlich?), die Umkehrabbildung wird mit $x \mapsto \ln_a(x)$ bezeichnet. Für $x \in (0, \infty)$ heißt $\ln_a(x)$ der *Logarithmus von x bzgl. der Basis a.*

10. Die komplexen Zahlen

10.1. **Der Körper der komplexen Zahlen.** Den folgenden Satz kann man leicht durch explizites (wenn auch etwas langwieriges) nachrechnen beweisen:

Satz 10.1. *Die Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Abbildungen*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\mapsto& \mathbb{R}^2, \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto& (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\mapsto& \mathbb{R}^2, \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto& (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2), \end{array}$$

ist ein Körper.

Dieser Körper heißt der *Körper der komplexen Zahlen* und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$x + iy := (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}.$$

Es gilt, dass $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$. Wir fassen dann $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

Für $z = x + iy$ heißt

(1) $\mathrm{Re}(z) := x$ der *Realteil von z,*
(2) $\mathrm{Im}(z) := y$ der *Imaginärteil von z,*
(3) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der *Betrag von z,*
(4) $\overline{z} := x - iy$ die *konjugiert komplexe Zahl.*

Durch einfaches Nachrechnen zeigt man folgende Aussagen:

(1) $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$,
(2) für alle z ist $z \cdot \overline{z} \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und es gilt

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}},$$

(3) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$,
(4) $|w + z| \le |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$,
(5) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ und $\overline{wz} = \overline{w} \cdot \overline{z}$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$,
(6) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$,
(7) $|z| \ge |\mathrm{Re}(z)|$ und $|z| \ge |\mathrm{Im}(z)|$.

Man beachte, dass $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist. In der Tat, in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt nach Satz 1.10, dass $a^2 > 0$ für alle $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, insbesondere gilt dass $1 = 1 \cdot 1 > 0$ und $-1 < 0$. Aber in $\mathbb{C}$ gilt $i^2 = -1$.

Im Folgenden, wenn wir schreiben $a > b$, dann bedeutet das insbesondere, dass $a, b \in \mathbb{R}$.

10.2. **Konvergenz von Folgen und Reihen von komplexen Zahlen.**

Definition. Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen. Wir sagen (z_n) *konvergiert gegen* $z \in \mathbb{C}$, wenn

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\ge N}{\forall} |z_n - z| < \varepsilon.$$

(Hier ist ε eine positive reelle Zahl und $|z_n - z|$ bedeutet den Betrag der komplexen Zahl $z_n - z$.) Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Satz 10.2. *Es sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z).$$

(Die linke Seite betrifft die Konvergenz von einer Folge von komplexen Zahlen, während die rechte Seite handelt von der Konvergenz von zwei Folgen von reellen Zahlen.)

Beweis. Wir schreiben $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$ und $z = x + iy$, $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$.

Nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Sei also $\varepsilon > 0$.

Idee:

$$|z_n - z| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)| \le |x_n - x| + |(i(y_n - y)| = |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Nachdem $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existiert ein N_1, so dass

$$n \ge N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und nachdem $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ existiert ein N_2, so dass

$$n \ge N_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann, dass

$$|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nehmen wir nun an, dass $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ existiert ein N, so dass

$$n \geq N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon,$$

dann gilt aber auch für alle $n \geq N$, dass

$$|x_n - x| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon.$$

Genauso zeigt man, dass $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. □

Wie für reelle Folgen kann man nun auch folgende Objekte einführen:

(1) Nullfolge,
(2) Teilfolge,
(3) Cauchyfolge,
(4) beschränkte Folge.

Die folgenden Aussagen für komplexe Folgen werden genauso bewiesen wie die gleichen Aussagen für reelle Folgen:

(1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt,
(2) jede konvergente Folge ist beschränkt,
(3) die Rechenregeln für Folgen.

Alternativ kann man die obigen Aussagen mittels Satz 10.2 auf die Aussagen über reelle Folgen zurückführen. Mithilfe von Satz 10.2 zeigt man auch leicht, dass wenn $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}.$$

Satz 10.3. *Jede komplexe Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Ganz ähnlich wie Satz 10.2 kann man beweisen, dass $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind. Diese Folgen (reeller Zahlen!) konvergieren wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Es folgt nun aus Satz 10.2, dass (z_n) ebenfalls konvergiert. □

Der folgende Satz folgt aus Satz 10.2 und 4.13.

Satz 10.4. *(Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine Teilfolge, welche konvergiert.*

Folgende Begriffe sind für komplexe Zahlen genauso definiert wie für reelle Zahlen:

(1) Reihen,

(2) absolute Konvergenz von Reihen.

Dann gelten:

(1) die üblichen Rechenregeln,
(2) das Majorantenkriterium,
(3) das Quotientenkriterium,
(4) der Umordnungssatz für Reihen (Satz 5.9),
(5) Satz 5.12 für komplexe Reihen.

Beispielsweise folgt, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}$$

absolut konvergiert, und für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z').$$

Lemma 10.5. *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Beweis. Es ist

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)}.$$

(Hier haben wir verwendet, dass $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ und $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $\overline{n} = n$ für alle $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{C}$.) □

Die Aussagen über reelle Zahlen, Folgen und Reihe, welche die Anordnung verwenden, können *nicht* auf die komplexen Zahlen übertragen werden, insbesondere gilt:

(1) es gibt *kein* Leibniz-Kriterium für komplexe Folgen,
(2) das Supremum und Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist *nicht* definiert,
(3) es macht keinen Sinn zu sagen, dass (z_n) gegen $-\infty$ divergiert.

10.3. **Stetige Funktionen.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Wir sagen, *f ist stetig im Punkt z_0* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Es gilt folgender Satz, welcher in den Übungen bewiesen wird:

Satz 10.6. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt: f ist genau dann im Punkt z_0 stetig wenn* $\mathrm{Re}(f) : D \to \mathbb{R}$ *und* $\mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R}$ *im Punkt z_0 stetig sind.*

Entweder durch einfaches umschreiben der Beweise für reelle Funktionen oder durch Satz 10.6 erhalten wir folgende Aussagen:

(1) Es sei $c \in \mathbb{C}$, dann sind die Funktionen

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array}$$

und

$$g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & c \end{array}$$

stetig,

(2) die Summe, das Produkt, der Quotient und die Komposition zweier stetiger Funktionen sind stetig.

Zudem gelten die Aussagen in Kapitel 8.2 über die Stetigkeit von Grenzfunktionen genauso. Insbesondere erhalten wir:

Satz 10.7. *Die Funktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* $z \mapsto \exp(z)$ *ist stetig.*

11. Trigonometrische Funktionen

Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$e^z := \exp(z).$$

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$|e^{it}|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{\overline{it}} = e^{it}e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1.$$

Es gilt also, dass $|e^{it}| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir nun

$$\begin{array}{rcl} \sin(t) & := & \operatorname{Im}(e^{it}0, \\ \cos(t) & := & \operatorname{Re}(e^{it}). \end{array}$$

Anders ausgedrückt, es gilt

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).$$

Die Definition kann man sich gut veranschaulichen: Die Zahlen e^{it} liegen auf dem Kreis mit Radius eins um den Ursprung. Die Koordinaten von $e^{it} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sind dann per Definition $(\cos(t), \sin(t))$.

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ und $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. Es folgt also, dass

$$\begin{aligned}\sin(t) &= \operatorname{Im}(e^{it}) = \tfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}),\\ \cos(t) &= \operatorname{Re}(e^{it}) = \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}).\end{aligned}$$

Lemma 11.1. *Für $t \in \mathbb{R}$ gilt*

(1)
$$\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1,$$

(2) $\cos(t) = \cos(-t)$,
(3) $\sin(t) = -\sin(t)$,
(4) *die Funktionen*

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \sin(t)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \cos(t)\end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis. Es gilt

$$\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = \operatorname{Im}(e^{it})^2 + \operatorname{Re}(e^{it})^2 = |e^{it}|^2 = 1.$$

Behauptungen (2) und (3) folgen sofort aus

$$\begin{aligned}\sin(t) &= \tfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}),\\ \cos(t) &= \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}).\end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt aus Satz 10.7 und Satz 10.6. □

Satz 11.2. *(Additionstheoreme) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}&\cos(x+y) + i\sin(x+y)\\ =\ & e^{i(x+y)}\\ =\ & e^{ix} \cdot e^{iy}\\ =\ & (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y))\\ =\ & (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).\end{aligned}$$

Der Satz folgt nun aus dem Vergleich von den Realteilen und den Imaginärteilen. □

Satz 11.3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots. \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren zudem absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Man beachte, dass für $l \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots. \end{aligned}$$

Beweis. Die absolute Konvergenz der beiden Reihen folgt auch durch Anwendung des Quotienkriteriums, in den man den Beweis von der absoluten konvergenz von $\exp(x)$ leicht modifiziert (siehe Satz 5.10).

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4m, \\ i, & \text{falls } n = 4m+1, \\ -1, & \text{falls } n = 4m+2, \\ -i, & \text{falls } n = 4m+3. \end{cases}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\, gerade} i^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\, ungerade} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \end{aligned}$$

□

In den Übungen werden Sie zeigen, dass

$$\cos(2) < 0.$$

Nachdem $\cos(0) = 1$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (0,2)$, so dass $\cos(x) = 0$. Die Menge $\{x \in [0,2] \mid \cos(x) = 0\}$ is also nichtleer und beschränkt. Insbesondere existiert ihr Infimum und wir definieren:

$$\pi := 2 \cdot \inf\{x \in [0,2] \mid \cos(x) = 0\}.$$

In den Übungen werden wir sehen, dass $\cos(\pi/2) = 0$.

Man kann durch eine Abschätzung (ähnlich zur Aufgabe 4 von Übungsblatt 9) zeigen, dass $\sin(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,2]$. Es folgt dann aus

$$\sin(\pi/2)^2 = \sin(\pi/2)^2 + \cos(\pi/2)^2 = 1,$$

dass $\sin(\pi/2) = 1$.

Wir erhalten also

$$\begin{array}{rcl} e^{i\pi/2} & = & \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i, \\ e^{i\pi} & = & e^{i\pi/2} \cdot e^{i\pi/2} = i^2 = -1, \\ e^{2\pi i} & = & e^{\pi i} \cdot e^{\pi i} = (-1)^2 = 1. \end{array}$$

Es gilt dann auch für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$e^{i(t+\pi)} = e^{it} \cdot e^{\pi i} = -e^{it},$$

insbesondere

$$\begin{array}{rcl} \cos(t+\pi) & = & -\cos(t), \\ \sin(t+\pi) & = & -\sin(t). \end{array}$$

Es gilt zudem auch für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$e^{i(t+2\pi)} = e^{it} \cdot e^{2\pi i} = e^{it},$$

insbesondere

$$\begin{array}{rcl} \cos(t+2\pi) & = & \cos(t), \\ \sin(t+2\pi) & = & \sin(t). \end{array}$$

In den Übungen zeigen Sie, dass

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

und genauso zeigt man, dass

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Wir definieren nun die Tangensfunktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \end{array}$$

und die Cotangensfunktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{array}$$

Beide Funktionen sind natürlich stetig.

Satz 11.4. *(Satz über die Polarkoordinatendarstellung) Zu jeder Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass*

$$z = re^{i\varphi}.$$

Zudem ist r eindeutig bestimmt ist, und φ ist bis auf Addition eines Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt ist.

Der Beweis zeigt auch, dass es auch ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit der obigen Eigenschaft gibt; das Zahlenpaar (r, φ) nennt man die *Polarkoordinaten* von z.

Beweis. Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir setzen $r := |z|$ und wir betrachten $z_0 := \frac{1}{r} z$. Offensichtlich gilt $|z_0| = 1$. Wir schreiben $z_0 = x_0 + iy_0$. Man beachte, dass $x_0, y_0 \in [-1, 1]$. Nachdem $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -\cos(0) = -1$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\psi \in [0, \pi]$, so dass

$$\cos(\psi) = x_0.$$

Dann gilt auch, dass

$$y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 - x_0^2 = 1 - x_0^2 = 1 - \cos(\psi)^2 = \sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2 - \cos(\psi)^2 = \sin(\psi)^2,$$

d.h. entweder $y_0 = \sin(\psi)$, oder $y_0 = -\sin(\psi)$. Im ersten Fall gilt, dann

$$re^{i\psi} = r(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) = r(x_0 + iy_0) = rz_0 = z,$$

im zweiten Fall gilt, dass

$$re^{-i\psi} = r(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)) = r(\cos(\psi) - i\sin(\psi) = r(x_0 + iy_0) = rz_0 = z.$$

Die Aussage, dass r eindeutig bestimmt ist, und dass φ eindeutig bis auf Addition eines Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt ist, wird in den Übungen gezeigt. □

12. Differentiation

Zur Erinnerung: Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dann nennen wir das offene Intervall

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung* von x. Ein Punkt x_0 ist ein *Häufungspunkt von D* wenn jede ε-Umgebung unendlich viele Punkte von D enthält.

Zur Erinnerung: Wenn $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D, dann definieren wir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{\substack{x \in D \setminus \{x\} \\ |x - x_0| < \delta}}{\forall} \; |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln, z.B. gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \\ \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x), \end{aligned}$$

wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Darüber hinaus, wenn $f(x) \le g(x)$ für alle x in einer ε-Umgebung von x_0, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x),$$

wenn beide Grenzwerte existieren.

Zudem gilt

$$f \text{ stetig im Punkt } x_0 \;\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dies folgt in der Tat sofort aus der Definition von Stetigkeit und der Definition von $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

12.1. **Definition der Ableitung und erste Eigenschaften.** Wir sagen x ist ein *innerer Punkt* von einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x) \subset M$. Wir sagen, $M \subset \mathbb{R}$ ist *offen*, wenn jeder Punkt $x \in M$ ein innerer Punkt ist.

Beispielsweise sind offene Intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ein kompaktes Intervall $[a, b]$ ist hingegen nicht offen.

Definition. Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von D. Wir sagen, f ist *differenzierbar in* x_0, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Wir nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung von f im Punkt* x_0.

Man beachte, dass direkt aus den Definition folgt, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_0\to x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$, dann nennen wir f *differenzierbar*. Wir nennen die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f' : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

die *1. Ableitung von f*. Wenn f' differenzierbar ist, dann schreiben wir

$$f^{(2)} := f'' := (f')',$$

genannt die 2. Ableitung von f. Allgemeiner, wenn die $(n-1)$-te Ableitung von f differenzierbar ist, dann setzen wir

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$$

und wir sagen, f ist *n-fach differenzierbar*.

Notation. Wir schreiben auch

$$\frac{d}{dx}f: = \frac{df}{dx} := f', \text{ und } \frac{d^n f}{dx^n} := f^{(n)},$$

und

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} f(x) := f'(x_0), \text{ und } \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0} := f^{(n)}(x_0),$$

Beispielsweise gilt für $c \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dx} &= 0 \\ \frac{dx}{dx} &= 1. \end{aligned}$$

Lemma 12.1. *If $f\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f insbesondere stetig im Punkt x_0.*

Beweis. Beachte, dass die Funktion f im Punkt stetig ist, genau dann, wenn $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Nachdem f im Punkt x_0 differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$

weil beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. □

Satz 12.2. *(Ableitungsregeln) Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche differenzierbar im Punkt $x \in D$ sind. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass*

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) && \textit{(Linearität)} \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda \cdot f'(x) && \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && \textit{(Produktregel)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} && \textit{Quotientenregel.} \end{aligned}$$

Für die letzte Formel setzen wir natürlich voraus, dass $g(x) \neq 0$.

Beweis. Die Linearitätsregeln folgen sofort aus den Eigenschaften von Grenzwerten von Funktionen.

Wir beweisen nun die Produktregel: Es gilt

$$\begin{aligned} (f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

(Man beachte, dass $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ weil g nach Lemma 12.1 stetig ist.)

Für die Quotientenregel betrachten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right).
\end{aligned}$$

Die Quotientenregel erhalten wir jetzt indem wir auf beiden Seiten den Grenzwert $\lim_{h\to 0}$ bestimmen. □

Beispielsweise gilt

$$\frac{d}{dx}x^2=\frac{d}{dx}(x\cdot x)=x\cdot 1+1\cdot x=2x$$

und allgemein gilt für alle $n\in\mathbb{Z}$, dass

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}.$$

12.2. **Die Ableitungen von der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.** Wir beweisen zuerst folgenden Satz:

Satz 12.3. *Es sei* $(a_n)\in\mathbb{R}$ *eine Folge von reellen Zahlen. Nehmen wir an, die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ *konvergiert für ein* $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Sei* $r\in(0,x_0)$ *und* $N\in\mathbb{N}$*. Dann existiert ein* $C\in\mathbb{R}$*, so dass für alle* $x\in[-r,r]$ *gilt:*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \;-\; \sum_{n=0}^{N}a_nx^n\right|\le C|x|^{N+1}.$$

Die Aussage von Satz 12.3 wird gerne auch anders formuliert. Wir definieren eine Funktion R durch folgende Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n+R(x).$$

Die Funktion R wird manchmal das *Restglied* genannt. Dann sagt Satz 12.3 aus, dass es ein C gibt, so dass für alle $x\in[-r,r]$ gilt:

$$|R(x)|\le C|x|^{N+1}.$$

Beweis. Es seien also x_0, r und N gegeben. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n.$$

(Insbesondere konvergiert die Reihe auf der linken Seite, genau dann, wenn die Reihe auf der rechten Seite konvergiert.) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $b_n = a_{n+N+1}$, dann gilt

$$R(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = x^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^{n-N-1} = x^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Insbesondere gilt

$$|R(x)| = |x|^{N+1} \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right|.$$

Der Satz folgt jetzt aus folgender Behauptung:

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right| \le C$$

für alle $x \in [-r, r]$.

Beweis der Behauptung: Nachdem $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$ konvergiert, existiert insbesondere ein D, so dass

$$|b_n x_0^n| \le D$$

für alle n. Für $x \in [-r, r]$ gilt dann:

$$|b_n x^n| = |b_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le D \cdot \left| \frac{r}{x_0} \right|.$$

Wir setzen

$$\theta := \left| \frac{r}{x_0} \right| \in (0, 1).$$

Nachdem die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} D \cdot \theta^n$$

konvergiert, folgt auch aus dem Majoranten-Kriterium, dass für alle $x \in [-r, r]$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergiert, und dass gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} D \cdot \theta^n = D \frac{1}{1-\theta}.$$

Wenn wir jetzt $C := D\frac{1}{1-\theta}$ setzen, dann erhalten wir, dass

$$R(x) \le x^{N+1} \cdot C$$

für alle $x \in [-r, r]$. $\square$

Satz 12.4. *Es gilt*

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} & = & 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} & = & 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} & = & 0. \end{array}$$

Beweis. Wir wissen, dass die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für alle x konvergiert. Insbesondere konvergiert sie am Punkt $x_0 = 2$. Wir setzen jetzt $r = 1$ und $N = 1$. Wir schreiben

$$R(x) = \exp(x) - (1 + x).$$

Wir erhalten aus Satz 12.3, dass es ein C gibt, so dass für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$|R(x)| \leq Cx^2.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + R(x)) - 1}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x}.$$

Aber nachdem $-Cx^2 \leq R(x) \leq Cx^2$ folgt, dass

$$0 = \lim_{x\to 0} - \left|\frac{Cx^2}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0} \left|\frac{R(x)}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0} \left|\frac{Cx^2}{x}\right| = 0.$$

Es folgt also, dass $\lim_{x\to 0} \left|\frac{R(x)}{x}\right| = 0$, also auch $\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x} = 0$.

Für die Bestimmung der anderen Grenzwerte verwendet man Satz 11.3. Ansonsten verläuft der Beweis genauso wie für die Exponentialfunktion. □

Es folgt, dass

$$\begin{array}{rcl} \exp'(x) & = & \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \\ & = & \exp(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} \\ & = & \exp(x) \cdot 1 \\ & = & \exp(x). \end{array}$$

D.h. die Ableitung der Exponentialfunktion ist wiederum die Exponentialfunktion.

Mithilfe von Satz 12.4 und mithilfe der Additionstheoreme kann man auch zeigen, dass

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \text{ und } \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x).$$

(Siehe Übungsblatt 10.)

12.3. **Die Kettenregel und die Umkehrregel.**

Satz 12.5. *(Kettenregel) Es seien zwei Funktion*

$$D \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

gegeben, so dass f im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist, und so dass g im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Die Idee ist folgende Umformung auszuführen

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Allerdings macht diese Umformung keinen Sinn, wenn $f(x_0 + h) = f(x_0)$. Wir wenden deswegen einen kleinen Trick an: Wir setzen $y_0 := f(x_0)$ und wir definieren

$$\begin{array}{rcl} g^* : M & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & \text{falls } y \neq y_0, \\ g'(y_0), & \text{falls } y = y_0. \end{cases} \end{array}$$

Die Annahme, dass g im Punkt y_0 differenzierbar besagt, dass g^* im Punkt y_0 stetig ist.

Es gilt nun für alle $h \in D$, dass

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = g^*(f(x_0+h)) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

(Warum? Betrachten Sie die Fälle $f(x_0 + h) = f(x_0)$ und $f(x_0 + h) \neq f(x_0)$ getrennt.) Es gilt nun:

$$\begin{array}{rcl} \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} & = & \lim_{h\to 0} \left(g^*(f(x_0+h)) \cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) \\ & = & \lim_{h\to 0} g^*(f(x_0+h)) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ & = & g^*(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ & = & g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \end{array}$$

Hier haben wir verwendet, dass nach Satz 6.4 die Funktion auch $g^* \circ f$ stetig ist, d.h. $\lim_{h\to 0} g^*(f(x_0 + h)) = g^*(f(x_0))$. □

Es sei $f(x) = a^x$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) := \exp(\ln(a)\cdot x)' = \exp'(\ln(a)\cdot x)\cdot(\ln(a)\cdot x)' = \exp(\ln(a)\cdot x)\cdot\ln(a) = a^x\cdot\ln(a).$$

Satz 12.6. *(Umkehrregel) Es sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist und wenn $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Den Beweis, dass f^{-1} im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar ist, überlasse ich als freiwillige Übungsaufgabe (oder siehe Forster Seite 159). Wenn wir schon wissen, dass f^{-1} im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann können wir $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))$ wie folgt bestimmen: Aus der Kettenregel folgt, dass

$$1 = \frac{d}{dx}\bigg|_{x=x_0} x = \frac{d}{dx}\bigg|_{x=x_0} f^{-1}(f(x)) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$$

also

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Für jedes $y \in (a,b)$ gilt also,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)},$$

insbesondere gilt für $y = f^{-1}(x)$, dass

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Beispielsweise folgt:

$$\ln(x)' = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

13. Der Mittelwertsatz und lokale Extrema

Zur Erinnerung: Es sei g eine Funktion, dann existiert $\lim_{y\to y_0} g(y)$ genau dann, wenn $\lim_{y\searrow y_0} g(y)$ und $\lim_{y\nearrow y_0} g(y)$ existieren, und wenn gilt

$$\lim_{y\searrow y_0} g(y) = \lim_{y\nearrow y_0} g(y).$$

Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von D. Wenden wir das obige Prinzip auf die Funktion

$$h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

an, erhalten wir, dass f differenzierbar in x_0 ist, genau dann, wenn

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat bei x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Ganz analog definieren wir 'lokales Minimum'. Wir sagen x_0 ist ein *lokales Extremum* wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.

Lemma 13.1. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ ein innerer Punkt. Wenn f ein lokales Extremum in x_0 hat, und wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Man beachte, dass die Bedingung, dass x_0 ein innerer Punkt ist, sehr wichtig ist: Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion, welche durch $f(x) = 3x$ definiert ist. Dann ist $x_0 = 0$ ein lokales Minimum und $x_0 = 1$ ein lokales Maximum. Wir hatten die Ableitung an den Endpunkten nicht definiert, aber selbst wenn man diese über einseitige Grenzwerte definieren würde, wäre die Ableitung an den Endpunkten nicht null.

Beweis. O.B.d.A. sei f ein lokales Maximum. Es sei $\delta > 0$ wie in der Definition vom lokalen Maximum. Dann ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0 \text{ für alle } h \in (0, \delta),$$

es folgt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Andererseits gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \text{ für alle } h \in (-\delta, 0).$$

(Warum? Der Zähler ist negativ, aber der Nenner ist negativ weil nun h negativ ist.) Es folgt

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Aber nachdem f im Punkt x_0 differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen. □

Wir sagen im Folgenden, dass eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, wenn sie auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist, und wenn die Funktion zudem auf $[a,b]$ stetig ist. (Man beachte, dass wir die Differenzierbarkeit an den Punkten a und b nicht eingeführt haben.)

Satz 13.2. *(Satz von Rolle) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Weil f stetig ist, existieren nach Satz 8.2 zwei Punkte $x_0, x_1 \in [a, b]$, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \geq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Man beachte, dass x_0 insbesondere ein lokales Minimum ist, und dass x_1 insbesondere ein lokales Maximum ist. Wenn $x_0 \in (a, b)$, dann ist x_0 zudem ein innerer Punkt, und es folgt aus Lemma 13.1, dass $f'(x_0) = 0$. Genauso, wenn $x_1 \in (a, b)$, dann ist x_1 zudem ein innerer Punkt und es folgt wiederum aus Lemma 13.1, dass $f'(x_1) = 0$.

Wenn x_0 und x_1 auf den Endpunkten liegen, dann ist f konstant, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. □

Satz 13.3. *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass f auf (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir betrachten

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es gilt $g(a) = f(a) = g(b)$. Nachdem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $g'(\xi) = 0$, aber dann gilt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Zur Erinnerung: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton steigend*, wenn gilt:

$$x_2 > x_1 \text{ und } x_2, x_1 \in D \Rightarrow f(x_2) > f(x_1),$$

und sie heißt *monoton steigend*, wenn gilt:

$$x_2 > x_1 \text{ und } x_2, x_1 \in D \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

Analog definiert man streng monoton fallend und monoton fallend.

Satz 13.4. *(Monotoniesatz) Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ ist monoton steigend}$$

und

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist streng monoton steigend.}$$

Beweis. Sei f monoton steigend. Dann gilt für alle zulässlichen x und h, dass
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$
Es folgt, dass $f'(x) \geq 0$ für alle x.

Nun nehmen wir an, dass $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Nehmen wir an, dass f nicht monoton steigend ist. D.h. wir nehmen an, es gibt $x_2 > x_1$, so dass $f(x_2) < f(x_1)$. Wenn wir den Mittelwertsatz auf die Einschränkung von f auf $[x_1, x_2]$ anwenden, erhalten wir ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0,$$
im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die zweite Aussage beweist man fast genauso, siehe Übungsblatt 11. $\square$

Lemma 13.5. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Nehmen wir an, f ist nicht konstant. Dann gibt es x_0, x_1 mit $f(x_0) \neq f(x_1)$. O.B.d.A. $x_0 < x_1$. Nach dem Zwischenwertsatz, angewandt auf die Einschränkung von f auf $[x_0, x_1]$, gäbe es dann aber ein $\xi \in (x_0, x_1)$, mit
$$f'(\xi) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \neq 0,$$
im Widerspruch zur Annahme, dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. $\square$

In den Übungen werden Sie folgendes Lemma beweisen:

Lemma 13.6. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn $f'(x) \leq C$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt für alle $x \in [a,b]$, dass*
$$f(x) \leq f(a) + C \cdot (x-a).$$

Genauso zeigt man, dass wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist und wenn $f'(x) \geq C$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt für alle $x \in [a,b]$, dass
$$f(x) \geq f(a) + C \cdot (x-a).$$
Man kann nun z.B. zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt:
$$e^x \geq 1 + x.$$

Satz 13.7. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweifach differenzierbare Funktion. Es sei $x_0 \in (a,b)$, so dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Dann hat f bei x_0 ein lokales Minimum.*

Beweis. Nachdem

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\frac{f'(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \text{ für alle } h \in (-\delta,\delta).$$

Es folgt, dass

$$\begin{array}{rcll} f'(x_0+h) & > & f'(x_0)=0, & \text{für alle } h \in (0,\delta), \\ f'(x_0+h) & < & f'(x_0)=0, & \text{für alle } h \in (-\delta,0). \end{array}$$

Es folgt aus Satz 13.4

$$\begin{array}{l} f|_{(x_0-\delta,x_0]} \text{ ist streng monoton fallend,} \\ f|_{[x_0,x_0+\delta)} \text{ ist streng monoton steigend.} \end{array}$$

Es folgt, dass x_0 ein lokales Minimum ist. □

Satz 13.8. *(Zwischenwertsatz für Ableitungen) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 < x_1$ zwei Punkte in (a,b). Es sei $\lambda \in (f'(x_0), f'(x_1))$. Dann existiert ein $\xi \in (x_0,x_1)$, so dass $f'(\xi) = \lambda$.*

Hier ist die Versuchung groß, den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (Satz 8.3) direkt auf die Funktion f' anzuwenden. Die Sache hat allerdings einen Haken: die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist i.A. nicht stetig! Wir werden ein Beispiel dafür nach dem Beweis vom Zwischenwertsatz behandeln.

Beweis. Wir betrachten $g(x) := f(x) - \lambda \cdot x$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\xi \in (x_0,x_1)$ gibt mit $g'(\xi) = 0$.

Man beachte, dass $g'(x_0) < 0$ und $g'(x_1) > 0$. Nach Satz 8.2 existiert ein $\xi \in [x_0,x_1]$, so dass

$$f(\xi) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [x_0,x_1].$$

Es folgt aus Satz 13.4, dass g streng monoton fallend in x_0 ist und streng monoton steigend in x_1. Es folgt, das $\xi \neq x_0, x_1$, d.h. $\xi \in (x_0,x_1)$, insbesondere ist ξ ein innerer Punkt. Nach Lemma 13.1 gilt daher, dass $g'(\xi) = 0$.

□

Definition.
1. Ist f differenzierbar und ist f' stetig, dann heißt f *stetig differenzierbar* und wir sagen f *ist eine C^1-Funktion.*
2. Ist f eine C^n-Funktion und ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ eine C^1-Funktion, so heißt f eine C^{n+1}-Funktion.
3. Wir sagen f ist eine C^∞*-Funktion* wenn f für alle n eine C^n-Funktion ist.

Beispielsweise sind Polynomfunktionen, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen C^∞-Funktionen. Anderseits ist die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

in jedem Punkt differenzierbar (auch im Punkt $x = 0!$), aber ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

und diese Funktion ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

Satz 13.9. *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktion. Nehmen wir an, dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Es gilt $F(a) = f(a)$ und $F(b) = f(a)$. Wir können also den Satz von Rolle auf F anwenden. Es existiert also ein $\xi \in (a, b)$, so dass $F'(\xi) = 0$. Dann gilt

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi).$$

Nachdem $g'(\xi) \neq 0$ nach Voraussetzung, folgt, dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

wie gewünscht. □

Die wichtigste Anwendung des Satzes sind die Regeln von de l'Hospital.

Satz 13.10. *Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, so dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Wenn $f(a) = g(a) = 0$ und wenn*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Satz gilt natürlich auch, wenn $f(b) = g(b) = 0$, und wenn man $\lim_{x\searrow a}$ durch $\lim_{x\nearrow b}$ ersetzt.

Beweis. Zur Erinnerung,

$$\lim_{x\searrow a} h(x) = d :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(a,a+\delta)}{\forall} |h(x) - d| < \varepsilon.$$

Wir setzen

$$d := \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

Es sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem $\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - d \right| < \varepsilon.$$

Nun sei $x \in (a, a+\delta)$. Der Satz folgt jetzt aus folgender Behauptung:

Behauptung.

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| < \varepsilon.$$

Es sei also $x \in (a, a+\delta)$. Wir wenden den verallgemeinertem Mittelwertsatz auf die Einschränkung von f und g auf $[a, x]$ an. Nachdem verallgemeinertem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a, x)$, so dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es folgt also,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - d \right|,$$

aber nachdem $\xi \in (a, x)$, insbesondere $\xi \in (a, \delta)$, folgt, dass der Ausdruck auf der rechten Seite kleiner als ε ist. $\square$

Beispielsweise gilt nach der l'Hospitalschen Regel, dass

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Man kann auch folgende Variationen der de l'Hospitalschen Regel zeigen. (Siehe Forster Kapitel 16).

Satz 13.11. *Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, so dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Wenn*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, oder wenn

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bestimmt gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergiert, und wenn entweder

(1) $\lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$, *oder wenn*
(2) $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0$ *und* $\lim_{x \searrow a} g(x) = 0$,

dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispielsweise gilt

$$\lim_{x \searrow 0} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} -x = 0.$$

Zur Erinnerung, für $a \in \mathbb{R}$ haben wir definiert:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x \in (x_0, x_0+\varepsilon) \cap D}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon.$$

und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{X \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x \in (X, \infty) \cap D}{\forall} |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Es gilt folgendes Lemma, welches in den Übungen bewiesen wird:

Lemma 13.12. *Es sei $f\colon (b,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt für $a \in \mathbb{R}$, dass*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \searrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = a.$$

Die gleiche Aussage gilt auch für bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$.

Mithilfe dieses Lemmas können wir jetzt folgenden Satz beweisen.

Satz 13.13. *Es seien $f, g\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, so dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,\infty)$. Wenn*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, oder wenn

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergiert, und wenn entweder

(1) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, *oder*
(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *und* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,

dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir betrachten nur den 2. Fall, der 1. Fall läuft fast genauso. Wir definieren $k(x) = f(\frac{1}{x})$ und $l(x) = g(\frac{1}{x})$, dann gilt nach Lemma 13.12, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{k(x)}{l(x)}.$$

Wir wollen jetzt natürlich Satz 13.10 anwenden, aber dazu müssen wir erst zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x\searrow 0} \frac{k'(x)}{l'(x)}$ existiert. Nun gilt aber, dass

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{k'(x)}{l'(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(\frac{1}{x}) \cdot -\frac{1}{x^2}}{g'(\frac{1}{x}) \cdot -\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

D.h. der Grenzwert $\lim_{x\searrow 0} \frac{k'(x)}{l'(x)}$ existiert nach Voraussetzung.

Jetzt können wir also Satz 13.10 anwenden, und erhalten mit der obigen Berechnung, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\searrow 0} \tfrac{k(x)}{l(x)} \\ &= \lim_{x\searrow 0} \tfrac{k'(x)}{l'(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

□

Beispielsweise gilt für jedes $\alpha > 0$, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

D.h. die Funktion $\ln(x)$ wächst 'langsamer' als jede Potenz von x. Andererseits erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$, durch mehrmaliges Anwenden der Regel von l'Hospital, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x}{nx^{n-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \tfrac{e^x}{n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} = +\infty, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion $\exp(x)$ wächst 'schneller' als jede Potenz von x.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Beispiel:

Lemma 13.14. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ist C^∞ und es gilt, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

D.h. f hat die Eigenschaft, dass alle Ableitungen am Punkt 0 verschwinden, aber die Funktion ist nicht konstant.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\tfrac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\searrow 0}\tfrac{e^{-(1/x)^2}}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\tfrac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\tfrac{x}{e^{x^2}}.\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die l'Hospitalsche Regel an und erhalten, dass

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Genau das gleiche Argument zeigt auch, dass

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0,$$

d.h. wir sehen, dass $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Ganz genauso zeigt man, dass

$$\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot e^{-(1/x)^2} = 0 \tag{13.1}$$

für alle k.

Es sei jetzt $A(n)$ die Aussage: f ist n-fach differenzierbar und

$$f^{(n)} = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x \neq 0,\\ 0, & \text{wenn } x = 0.\end{cases}$$

wobei $p_n(x)$ ein Polynom ist, oder anders gesagt, $p_n(\frac{1}{x})$ ist ein Ausdruck vom Typ

$$a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \cdots + a_d\left(\frac{1}{x}\right)^d, a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}.$$

Wir wissen schon, dass $A(0)$ und $A(1)$ gelten. Durch Induktion zeigt man nun, dass $A(n)$ für alle n gilt. Beim Beweis, dass unter Annahme von $A(n)$ auch $A(n+1)$ gilt muss man mehrmals (13.1) verwenden. □

14. Das Riemannsche Integral

14.1. **Definitionen und erste Eigenschaften.** Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Eine *Zerlegung Z von $[a, b]$* ist eine Menge $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, so dass

$$a < z_1 < z_2 < \cdots < z_n < b.$$

Wir setzen dann $z_0 = a$ und $z_{n+1} = b$.

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann heißt

$$U(Z,f) = \sum_{k=0}^{n} (z_{k+1} - z_k) \inf f([z_k, z_{k+1}])$$

die *Untersumme von f bezüglich der Zerlegung Z* und

$$O(Z,f) = \sum_{k=0}^{n} (z_{k+1} - z_k) \sup f([z_k, z_{k+1}])$$

heißt die *Obersumme von f bezüglich der Zerlegung Z*. Man beachte, dass

$$U(Z,f) \le O(Z,f)$$

für jede Zerlegung.

Definition. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann integrierbar*, wenn [8]

$$\sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} = \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Wenn f Riemann integrierbar ist, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\ dx := \sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

das *Riemann-Integral über f von a nach b.*

Wir sagen in Zukunft oft auch ‘integrierbar’ anstatt ‘Riemann integrierbar’ und ‘Integral’ anstatt ‘Riemann-Integral’. Wenn f Riemann integrierbar ist, dann sagen wir auch, dass $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert.

Beispiel. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, d.h. $f(x) = c$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt für jede Unterteilung Z von $[a,b]$, dass $U(Z,f) = c(b-a)$ und $O(Z,f) = c(b-a)$, d.h. f ist Riemann-integrierbar, und

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

[8]Erinnern wir uns noch einmal an die Definition vom Supremum $\sup(M)$ einer nach oben beschränkten Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$: Wir sagen $y = \sup(M)$ wenn gilt:

(1) y ist eine obere Schranke für M, und
(2) y ist die kleinste obere Schranke für M,

anders ausgedrückt, $y = \sup(M)$ wenn gilt:

(1) $y \ge x$ für alle $x \in M$, und
(2) es existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$, so dass $x > y - \varepsilon$.

In der Tat, die erste Bedingung besagt gerade, dass y eine obere Schranke ist, und wenn die zweite Bedingung nicht gelten würde, dann wäre $y-\varepsilon$ eine obere Schranke für M, welche kleiner als y ist.

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0,3] \\ 2, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{array}$$

Es sei $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist $f([z_k, z_{k+1}]) = \{0,2\}$, d.h. $\inf f([z_k, z_{k+1}]) = 0$ und $\sup f([z_k, z_{k+1}]) = 2$. Dann gilt insbesondere für jede Zerlegung Z von $[0,3]$, dass

$$\begin{array}{l} U(Z,f) = \sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k) \inf f([z_k, z_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)\cdot 0 = 0 \\ O(Z,f) = \sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k) \sup f([z_k, z_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)\cdot 2 = 3\cdot 2. \end{array}$$

Die Funktion f ist also nicht Riemann-integrierbar.

Der folgende Satz erlaubt es die Integrabilität einer Funktion zu zeigen, ohne direkt mit Infimum und Supremum zu arbeiten.

Satz 14.1. *(Riemannsches Integrabilitätskriterium) Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt, so dass*

$$O(Z,f) - U(Z,f) < \varepsilon.$$

Für den Beweis brauchen wir noch folgende Definition: Es sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Wenn man Z' aus Z durch zufügen von Punkten erhält, d.h. wenn $Z \subset Z'$, dann nennen wir Z' eine *Verfeinerung von der Zerlegung Z*. Es gilt dann offenbar

$$U(Z',f) \le U(Z,f) \text{ und } O(Z,f) \le O(Z',f). \tag{14.1}$$

Beweis. Sei also f integrierbar und $\varepsilon > 0$. Nachdem

$$\begin{array}{rcl} \sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} & = & \int_a^b f(x)\,dx \\ \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} & = & \int_a^b f(x)\,dx \end{array}$$

existieren Zerlegungen Z_1 und Z_2, so dass [9]

$$\int_a^b f(x)\,dx - U(Z_1,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

[9]Ganz allgemein gilt folgende Aussage: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge, $y = \sup(M)$ und $\delta > 0$. Dann existiert ein $m \in M$, so dass $y - \delta \le m \le y$. In der Tat: y ist eine obere Schranke für M, aber $y - \delta$ ist keine obere Schranke für M da das Supremum die kleinste obere Schranke ist.
Wir wenden jetzt diese Aussage auf $M = \{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$, $y = \int_a^b f(x)\,dx$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ an. Wir erhalten dann ein $m \in M$, aber jedes $m \in M$ ist von der Form $m = U(Y,f)$ wobei Y eine Zerlegung von $[a,b]$ ist.

und

$$O(Z_2, f) - \int_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt $O(Z_2, f) - U(Z_1, f) < \varepsilon$. Nachdem $Z_1 \cup Z_2$ eine Verfeinerung von Z_1 und von Z_2 ist, folgt aus (14.1), dass

$$\begin{array}{rl} & O(Z_1 \cup Z_2, f) - U(Z_1 \cup Z_2, f) \\ < & O(Z_2, f) - U(Z_1, f) \\ = & O(Z_1, f) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx - U(Z_1, f) \\ < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{array}$$

Dies zeigt, dass f das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt.

Nun nehmen wir an, dass f das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt. Wir müssen zeigen, dass

$$\inf\{O(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} - \sup\{U(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} = 0.$$

Man beachte, dass dieser Ausdruck immer größer gleich Null ist. Um zu zeigen, dass der Ausdruck Null ist, genügt es folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\inf\{O(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} - \sup\{U(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} < \varepsilon.$$

Es sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zerlegung Z, so dass $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} U(Z, f) & \leq & \sup\{U(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \\ & \leq & \inf\{O(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \\ & \leq & O(Z, f). \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$0 \leq \inf\{O(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} - \sup\{U(Z, f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} < \varepsilon.$$

□

Beispiel.

Satz 14.2. *Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt*

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx & = & \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ \int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx & = & \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen, dass $f + g$ das Riemann-Kriterium erfüllt. Sei also $\varepsilon > 0$.

Für jedes Intervall $[c, d]$ gilt:

$$\inf(f([c, d])) + \inf(g([c, d])) \leq \inf((f + g)([c, d]))$$

und

$$\sup(f([c,d])) + \sup(g([c,d])) \geq \sup((f+g)([c,d])).$$

Es folgt also, dass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt, dass

$$\begin{aligned} U(Z,f) + U(Z,g) &\leq U(Z,f+g) \\ &\leq O(Z,f+g) \leq O(Z,f) + O(Z,g). \end{aligned} \tag{14.2}$$

Nachdem f und g Riemann integrierbar sind, existieren nach Satz 14.1 Zerlegungen Z_1 und Z_2, so dass

$$O(Z_1,f) - U(Z_1,f) < \frac{\varepsilon}{2},$$

und so dass

$$O(Z_2,g) - U(Z_2,g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus folgt (14.1) und (14.2) folgt, dass

$$\begin{aligned} U(Z_1,f) + U(Z_2,g) &\leq U(Z_1 \cup Z_2, f) + U(Z_1 \cup Z_2, g) \\ &\leq U(Z_1 \cup Z_2, f+g) \\ &\leq O(Z_1 \cup Z_2, f+g) \\ &\leq O(Z_1 \cup Z_2, f) + O(Z_1 \cup Z_2, g) \\ &\leq O(Z_1,f) + O(Z_2,g). \end{aligned}$$

Nachdem die Differenz zwischen dem letzten und dem ersten Ausdruck kleiner als $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ist, folgt, dass auch

$$O(Z_1 \cup Z_2, f+g) - U(Z_1 \cup Z_2, f+g) < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass $f+g$ das Riemann-Kriterium erfüllt. Es folgt dann auch, dass

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ = \; &\sup\{U(Z_1,f) \,|\, Z_1 \text{ Zerlegung von } [a,b]\} + \sup\{U(Z_2,g) \,|\, Z_2 \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \\ = \; &\sup\{U(Z,f+g) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}. \end{aligned}$$

(Die erste Gleichung folgt aus der Definition des Integrals, die zweite Gleichung folgt aus dem obigen Argument.)

Die Aussage für λf zeigt man fast genauso. □

Korollar 14.3. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche aus g durch Abänderung an endlich vielen Punkten entstanden ist. Dann ist g ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Wir definieren $h(x) := g(x) - f(x)$. Bis auf endlich viele Ausnahmen gilt dann $h(x) = 0$ für $x \in [a,b]$. Ähnlich wie im Beispiel bevor Satz 14.1 zeigt man, dass h Riemann-integrierbar ist mit $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Das Korollar folgt nun aus Satz 14.2 nachdem $g = f + h$. $\square$

Lemma 14.4. *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann integrierbare Funktionen, so dass $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dies folgt sofort aus der Definition, nachdem für jedes Intervall $[c,d]$ gilt:

$$\inf(f([c,d]) \le \inf(g(c[,d])).$$

Es sei nun $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $E \subset D$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen dann mit $f|_E$ die Einschränkung von f auf E.

Lemma 14.5. *Es sei $a < b < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind, dann ist f ebenfalls integrierbar und es gilt*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Beweis. Es seien Z_1 eine Zerlegung von $[a,b]$ und Z_2 eine Zerlegung von $[b,c]$. Dann ist $Z := Z_1 \cup \{b\} \cup Z_2$ eine Zerlegung von $[a,c]$ und es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$\begin{array}{rcl} U(Z_1, f|_{[a,b]}) + U(Z_2, f|_{[b,c]}) & = & U(Z,f) \\ O(Z_1, f|_{[a,b]}) + O(Z_2, f|_{[b,c]}) & = & O(Z,f) \end{array} \tag{14.3}$$

Es folgt, dass

$$\begin{array}{rl} & \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x) \\ = & \sup\{U(Z_1, f|_{[a,b]}) \mid Z_1\} + \sup\{U(Z_2, f|_{[b,c]}) \mid Z_2) \\ \le & \sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \\ \le & \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \\ \le & \inf\{O(Z_1, f|_{[a,b]}) \mid Z_1\} + \sup\{O(Z_2, f|_{[b,c]}) \mid Z_2) \\ = & \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x). \end{array}$$

(Die erste und dritte Ungleichung folgen aus (14.3).) Insbesondere erhalten wir, dass

$$\sup\{U(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,c]\} = \inf\{O(Z,f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,c]\},$$

und beide stimmen mit $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)$ überein. Es folgt, dass f Riemann-integrierbar ist, und dass

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

□

Beispiel. Es seien $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ in $\mathbb{R}$ gegeben und es seien $y_0, \ldots, y_{n-1}$ in $\mathbb{R}$ gegeben, dann bezeichnen wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} [x_0, x_n] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} y_k, & \text{wenn } x \in [x_k, x_{k+1}) \\ y_{n-1}, & \text{wenn } x = x_n. \end{cases} \end{array}$$

als *Treppenfunktion.* Dann folgt aus den Beispiel, aus Satz 14.2 und aus Lemma 14.5, dass $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ integrierbar ist, und dass

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1} - x_k).$$

Konvention. Für $b < a$ definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Mit dieser Konvention gilt Lemma 14.5 für beliebige a, b und c.

14.2. **Integrabilitätskriterien.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und Z eine Zerlegung von der Form

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n < z_{n+1} = b,$$

dann können wir $O(Z, f) - U(Z, f)$ auch folgendermaßen umschreiben:
(14.4)

$$\begin{array}{cl} & O(Z, f) - U(Z, f) \\ = & \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i) \sup f([z_i, z_{i+1}]) - \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i) \inf f([z_i, z_{i+1}]) \\ = & \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i)(\sup f([z_i, z_{i+1}]) - \inf f([z_i, z_{i+1}]) \\ = & \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i) \sup\{|f(x) - f(x')| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\}. \end{array}$$

Wenn f stetig ist, dann nimmt f das Maximum und Minimum auf den kompakten Intervallen $[z_i, z_{i+1}]$ an, und es folgt, dass wir das Supremum durch das Maximum ersetzen können, d.h. es gilt:
(14.5)

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i) \max\{|f(x) - f(x')| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\}.$$

Satz 14.6. *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f stetig ist, dann ist f auch integrierbar.*

Beweis. Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Satz 14.1 müssen wir zeigen, dass es eine Zerlegung Z von der Form

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n < z_{n+1} = b$$

gibt, so dass $O(Z,f) - U(Z,f) < \varepsilon$, d.h. so dass

$$\sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) \max\{|f(x) - f(x')| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\} < \varepsilon.$$

Die Idee ist nun zu zeigen, dass es eine Zerlegung gibt, so dass für alle i gilt

$$x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Eine solche Zerlegung finden wir, wenn wir uns der gleichmäßigen Stetigkeit entsinnen.

Zur Erinnerung, in Satz 8.4 hatten wir bewiesen, dass eine stetige Funktion f, welche auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ definiert ist, auch gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$\underset{\eta>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x,x'\in[a,b]\, mit\, |x-x'|<\delta}{\forall} |f(x) - f(x')| < \eta.$$

Wir setzen nun $\eta = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Es existiert dann also ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$x, x' \in [a,b] \text{ und } |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \eta = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nachdem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{b-a}{n+1} < \delta$. Wir betrachten dann die Zerlegung

$$z_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n+1}, i = 0, \ldots, n+1.$$

Dann gilt

$$x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \Rightarrow |x - x'| \le z_{i+1} - z_i < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \eta,$$

insbesondere gilt:

$$\max\{|f(x) - f(x')| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\} < \eta = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{array}{rcl} O(Z,f) - U(Z,f) & = & \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) \max\{|f(x) - f(x')| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\} \\ & < & \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) \frac{\varepsilon}{b-a} \\ & = & \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) \\ & = & \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

□

Aus Lemma 14.5 und Satz 14.6 folgt sofort, dass jede beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen Riemann integrierbar ist.

In den Übungen werden Sie folgendes Lemma beweisen:

Lemma 14.7. *Jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar.*

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist *Lipschitz-stetig* mit der Lipschitzkonstante L, wenn für alle $x, y \in D$ gilt, dass

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

Beispiel.

(1) Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$.

(2) Es sei $c > 0$, dann ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [-c,c] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Lipschitz-stetig. In der Tat, es gilt für alle $x, y \in [-c,c]$, dass

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y|\cdot|x+y| \le |x-y|\cdot 2c,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 2c$.

(3) Es sei $c > 0$, dann ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,c] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

nicht Lipschitz-stetig. (Dies wird in den Übungen gezeigt.)

(4) In den Übungen werden Sie zeigen, dass jede Lipschitz-stetige Funktion in der Tat stetig ist.

Man beachte, dass Lipschitz-stetige Funktion auch stetig sind. Dies wird in den Übungen bewiesen.

Lemma 14.8. *Es sei $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\phi : M \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, so dass $h([a,b]) \subset M$. Dann ist die Funktion $\phi \circ h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar.*

Beweis. Es sei ϕ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Es sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ von der Form

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n < z_{n+1} = b,$$

nach (14.4) gilt dann

$$\begin{aligned} O(Z,h) - U(Z,h) &= \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) \sup\{|h(x) - h(x')| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\} \\ O(Z,\phi\circ h) - U(Z,\phi\circ h) &= \sum_{i=0}^{n} (z_{i+1} - z_i) \sup\{|\phi(h(x)) - \phi(h(x'))| \,|\, x, x' \in [z_i, z_{i+1}]\}. \end{aligned}$$

Anderseits gilt nach Voraussetzung, dass

$$|\phi(h(x)) - \phi(h(x'))| \le L \cdot |h(x) - h(x')|$$

für alle x, x' Es folgt sofort, dass für jede Zerlegung gilt:

$$O(Z, \phi \circ f) - U(Z, \phi \circ f) < L \cdot (O(Z, f) - U(Z, f)). \tag{14.6}$$

Wir zeigen nun mithilfe des Riemann-Kriteriums, dass $\phi \circ f$ Riemann integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem f Riemann-integrierbar ist, existiert eine Zerlegung Z von $[a, b]$, so dass

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \frac{\varepsilon}{L},$$

es folgt aus (14.6), dass

$$O(Z, \phi \circ f) - U(Z, \phi \circ f) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

□

Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, dann erhalten wir eine neue Funktion $\max(f, g)$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \max(f(x), g(x)). \end{array}$$

Beispielsweise gilt $|x| = \max(x, -x)$. Ganz analog wird die Funktion $\min(f, g)$ eingeführt.

Satz 14.9. *Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Dann sind*

$$f \cdot g,\ |f|,\ |g|,\ \max(f, g),\ \min(f, g)$$

ebenfalls integrierbar.

Es folgt beispielsweise, dass Polynomfunktionen integrierbar sind.

Beweis. (In dem Beweis werden wir mehrmals Satz 14.2 verwenden ohne den Satz explizit zu erwähnen.)

Nachdem f integrierbar ist, ist f beschränkt, d.h. es existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \le C$ für alle x. Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \phi : [-C, C] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $2C$. Es folgt aus Lemma 14.8, dass und $\phi \circ (f + g) = (f + g)^2$ und $\phi \circ (f - g) = (f - g)^2$ integrierbar sind. Dann ist aber auch

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f + g)^2 - (f - g)^2)\right)$$

integrierbar.

Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \phi : [-C, C] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. Es folgt aus Lemma 14.8, dass $|f|$ und $|g|$ integrierbar sind, und dass

$$\max(f, g) = f + \frac{1}{2}(g - f + |g - f|)$$

integrierbar ist. □

Satz 14.10. *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktionen, so dass es ein $\delta > 0$ gibt, mit $|f(x)| \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ ebenfalls integrierbar.*

Man beachte, dass aus Satz 8.2 folgt, dass die Bedingung an f erfüllt ist, wenn f stetig ist und keine Nullstelle auf $[a, b]$ besitzt.

Beweis. Nachdem f integrierbar ist, ist f beschränkt, d.h. es existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle x. Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \phi : (-\infty, -C] \cup [C, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\frac{1}{C^2}$ (wie man leicht zeigen kann). Es folgt, dass $\phi \circ f = \frac{1}{f}$ integrierbar ist. □

Lemma 14.11. *Wenn $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar ist, dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Beweis. Es gilt $|f(x)| \geq f(x)$ und $|f(x)| \geq -f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Aus Lemma 14.4 folgt

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b |f(x)|\, dx & \geq & \int_a^b f(x)\, dx \\ \int_a^b |f(x)|\, dx & \geq & \int_a^b -f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx, \end{array}$$

also auch

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \geq \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|.$$

□

Dieses Lemma kann man als Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ auffassen.

Lemma 14.12. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, und so dass $f(x_0) > 0$ für mindestens ein $x_0 \in [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Beweis. Wir wenden die Definition von Stetigkeit im Punkt x_0 auf $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ an. Es existiert dann ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann auch, dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & \text{falls } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und aus Lemma 14.4 folgt, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Andererseits ist g eine Treppenfunktion und es ist offensichtlich, dass $\int_a^b g(x)\,dx$ größals Null ist. □

Satz 14.13. *(Mittelwertsatz der Integralrechnung) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Nach Satz 8.2 existieren $x_0, x_1 \in [a,b]$, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

für alle $x \in [a,b]$. O.B.d.A. $x_0 \leq x_1$.

Wenn $f(x_0) = f(x_1)$, dann ist die Aussage des Satzes wahr für jedes $\xi \in [a,b]$.

Nehmen wir nun an, dass $f(x_0) < f(x_1)$. Ein ξ, welches einen vorgegebenen Funktionswert annimmt, erhält man durch den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (Satz 8.3). Um diesen anwenden zu können, zeigen wir folgende Behauptung:

Behauptung.

$$f(x_0) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx < f(x_1).$$

Die erste Ungleichung folgt aus Lemma 14.12 angewandt auf $g(x) = \frac{1}{b-a}(f(x) - f(x_0))$ und die zweite folgt Lemma 14.12 angewandt auf $g(x) = \frac{1}{b-a}(f(x_1) - f(x))$.

Der Satz folgt jetzt sofort aus der Behauptung und aus dem Zwischenwertsatz (Satz 8.3). □

14.3. **Integrale und Funktionenfolgen.** Zur Erinnerung:

Definition. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ wenn es zu jedem $\eta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \eta.$$

Satz 14.14. *(Konvergenz-Satz für Riemann-Integrale) Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst mithilfe des Riemann-Kriteriums, dass f Riemann integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben.

Bevor wir den Beweis fortführen, machen wir eine kleine Nebenrechnung. Nehmen wir an, dass gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \eta \text{ für alle } x \in [a,b],$$

d.h.

$$f_n(x) \in (f(x) - \eta, f(x) + \eta), \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Dann gilt für jede Zerlegung von $[a,b]$, dass

$$\begin{array}{rcll} U(Z,f_n) & \leq & U(Z,f) + (b-a)\eta & \text{und} \\ O(Z,f_n) & \geq & O(Z,f) - (b-a)\eta. & \end{array}$$

Wir wählen nun ein n, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \eta := \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ für alle $x \in [a,b]$, und eine Zerlegung Z von $[a,b]$, so dass

$$O(Z,f_n) - U(Z,f_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt auch, dass

$$\begin{array}{rcl} O(Z,f)-U(Z,f) & < & (O(Z,f_n)+(b-a)\eta)-(U(Z,f_n)-(b-a)\eta) \\ & = & (O(Z,f_n)-U(Z,f_n))+\frac{\varepsilon}{2} \\ & < & \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

Dies zeigt, dass f in der Tat Riemann integrierbar ist.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Sei N so gewählt, dass für alle $n \ge N$ und alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Dann gilt für $n \ge N$ auch, wegen Lemma 14.11, dass

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| & \le & \int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx \\ & \le & \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx \\ & < & \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

□

15. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

In diesem Kapitel sei $I \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Menge, d.h. I ist ein Intervall, welches möglicherweise offen, halboffen, geschlossen, beschränkt oder unbeschränkt ist.

Satz 15.1. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in I$. Wir definieren*

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

dann ist $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $F' = f$.

Beweis. Sei $x \in I$ und $h \neq 0$, dann folgt aus Lemma 14.5, dass

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 14.13) existiert nun zu jedem $h > 0$ ein $\xi_h \in (x, x+h)$, so dass
$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(\xi_h).$$
Nachdem f stetig ist, gilt nun
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(\lim_{h\to 0} \xi_h) = f(x).$$
$\square$

Es sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine *Stammfunktion von f* ist eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$.

Lemma 15.2. *Wenn F und G Stammfunktionen von $f \colon I \to \mathbb{R}$ sind, dann ist die Funktion $F - G$ eine konstante Funktion.*

Beweis. Es gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, das Lemma folgt jetzt aus Lemma 13.5. $\square$

Satz 15.3. *Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion, dann gilt für alle $a, b \in I$, dass*
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Wir betrachten
$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$
Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist G ebenfalls eine Stammfunktion, und nach Lemma 15.2 existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = G(x) + C$ für alle $x \in I$. Es folgt, dass
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = F(b) - F(a).$$
$\square$

Für eine beliebige Funktion F schreiben wir auch
$$[F(x)]_a^b := F(x)|_a^b := F(b) - F(a).$$
Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann schreiben wir zudem
$$\int f(x)\,dx = F.$$
Diese Schreibweise ist natürlich etwas problematisch, weil F nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Wir nennen $\int f(x)\,dx$ manchmal auch das *unbestimmte Integral von f*.

Aus den schon bestimmten Ableitungen erhalten wir jetzt folgende Tabelle:

Funktion	Ableitung	Funktion	Stammfunktion
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\ln(-x), x < 0,$	$\frac{1}{x}$		
e^x	e^x	e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos(x)$

15.1. **Partielle Integration.** Es sei weiterhin I eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, d.h. I ist ein Intervall.

Satz 15.4. *Es seien $u, v : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen und $a, b \in I$, dann gilt*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Beweis. Aus der Produktregel der Ableitung folgt, dass

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

also

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Der Satz folgt nun sofort aus den Definitionen und aus Satz 15.3. □

Für unbestimmte Integrale schreibt man oft kurz:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Mithilfe der partiellen Integration kann man also ein Integral durch ein anderes ersetzen. Man wendet partielle Integration of auf $u = x^n$ oder $u = \ln(x)$ an.

Beispiel. Wir betrachten $f(x) = x\cdot\cos(x)$. Wir setzen $u(x) = x, v'(x) = \cos(x)$, dann ist $u'(x) = 1$ und $v(x) = \sin(x)$, und es folgt

$$\int x\cdot\cos(x)\,dx = x\cdot\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x).$$

Beispiel.

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x.$$

15.2. **Substitution.**

Satz 15.5. *Es seien $u:[a,b]\to I$ und $f\colon I\to\mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Beweis. Es sei F eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$. Dann gilt nach der Kettenregel, dass

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = f(u(x))\cdot u'(x).$$

Es folgt aus Satz 15.3, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx &= [F(u(x))]_{x=a}^{x=b}\\ &= F(u(b)) - F(u(a)) = [F(u)]_{u=u(a)}^{u=u(b)}\\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.\end{aligned}$$

□

Wenn wir nur unbestimmte Integrale betrachten, erhalten wir:

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Beispiel. (1) Es sei F eine Stammfunktion von f und es seien $c, d\in\mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int f(cx+d)\,dx &= \frac{1}{c}\int f(cx+d)(cx+d)'\,dx\\ &\overset{u=cx+d}{=} \frac{1}{c}\int f(u)\,du\\ &= \frac{1}{c}F(u) = \frac{1}{c}F(cx+d).\end{aligned}$$

(2) Mithilfe der Additionstheoreme und mithilfe von (1) können wir zeigen, dass

$$\begin{aligned}\int \cos(x)^2\,dx &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int_c^d \tfrac{x}{1+x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_c^d \tfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&\overset{u=1+x^2}{=} \tfrac{1}{2}\int_{c^2}^{d^2} \tfrac{1}{u}\,du \\
&= [\tfrac{1}{2}\ln|u|]_{c^2}^{d^2} \\
&= \tfrac{1}{2}(\ln|1+c^2| - \ln|1+d^2|).
\end{aligned}$$

(4) Wir betrachten

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Wir setzen $u = \arcsin(x)$, man beachte, dass $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int (1-x^2)\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \int (1-\sin(\arcsin(x))^2)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \int (1-\sin(u(x))^2)\cdot u'(x)\,dx \\
&= \int 1-\sin(u)^2\,du \\
&= \int \cos(u)^2\,du \\
&= \tfrac{1}{2}(u+\tfrac{1}{2}\sin(2u)) \\
&= \tfrac{1}{2}(\arcsin(x)+\tfrac{1}{2}\sin(2\arcsin(x))).
\end{aligned}$$

(Man kann dann mithilfe der Additionstheoreme noch zeigen, dass $\sin(2\arcsin(x)) = x\sqrt{1-x^2}$.)

15.3. **Uneigentliche Integrale.**

Definition. Es sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für jedes $a \le d < b$ das Riemann-Integral $\int_a^d f(x)\,dx$ existiert. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{d\to b}\int_a^d f(x)\,dx$$

existiert, dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{d\to b}\int_a^d f(x)\,dx,$$

und nennen es das *uneigentliche Integral auf* $[a,b)$.

Wenn der Grenzwert $\lim_{d\to b}\int_a^d f(x)\,dx$ existiert, dann sagen wir $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert. Wenn $\lim_{d\to b}\int_a^d f(x)\,dx$ bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert, dann sagen wir, dass $\int_a^b f(x)\,dx$ bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Ganz analog definiert man das uneigentliche Integral auf den halb-offenen Intervallen $(a, b]$.

Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} &= \lim_{d\to\infty} \int_0^d e^{-x} \\ &= \lim_{d\to\infty} [-e^{-x}]_0^d \\ &= \lim_{d\to\infty} (-e^{-d}+1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für ein $c \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ und } \int_c^b f(x)\,dx$$

existieren, dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

und nennen es das *uneigentliche Integral auf* (a,b). (Man kann mithilfe von Lemma 14.5 leicht zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von $c \in (a,b)$ abhängt.)

Es gilt die folgende verallgemeinerte Version von Satz 15.3:

Satz 15.6. *Sei* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* F *eine Stammfunktion, dann gilt, dass*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x).$$

Mithilfe dieses Satzes können wir nun folgendes Lemma beweisen:

Lemma 15.7. *Es sei* $\alpha > -1$, *dann gilt*

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x}^\alpha\,dx &= \lim_{d\searrow 0} \int_d^1 x^\alpha\,dx \\ &= \lim_{d\searrow 0} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_d^1 \\ &= \lim_{d\searrow 0} \left(\frac{1}{1+\alpha} - \frac{d^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

(In der letzten Gleichung haben wir benützt, dass $\alpha > -1$.) □

Die Konvergenz von uneigentlichen Integralen ist oft äquivalent zur Konvergenz von Reihen:

Satz 15.8. *Es sei* $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *eine monoton fallende Funktion, dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Den Beweis dazu kann man z.B. auf Seite 222 vom Forster finden.

Beispielsweise gilt für $s > 1$, dass

$$\begin{array}{rcl} \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx &=& \lim_{d\to\infty} \int_1^d x^{-s}\,dx \\ &=& \lim_{d\to\infty} [\frac{x^{-s+1}}{-s+1}]_1^d \\ &=& \lim_{d\to\infty} (\frac{d^{-s+1}}{-s+1} + \frac{1}{s-1}) \\ &=& \frac{1}{s-1}. \end{array}$$

Es folgt also aus Satz 15.8 angewandt auf $f(x) = \frac{1}{x^s}$, dass für jedes $s \in (1,\infty)$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert. Dies ist insbesondere eine Verallgemeinerung von Satz 5.4.

Andererseits gilt, dass

$$\begin{array}{rcl} \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &=& \lim_{d\to\infty} \int_1^d \frac{1}{x}\,dx \\ &=& \lim_{d\to\infty} [\ln(|x|)]_1^d \\ &=& \lim_{d\to\infty} (\ln(d) - \ln(1)) \\ &=& \infty. \end{array}$$

Es folgt also aus Satz 15.8 angewandt auf $f(x) = \frac{1}{x}$, dass die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Den folgenden Satz kann man mithilfe von Lemma 14.4 leicht beweisen.

Satz 15.9. *(Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale) Seien* $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *zwei stetige Funktionen gegeben, wobei* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Nehmen wir an, es gibt ein* $C \in \mathbb{R}$, *so dass*

$$g(x) \geq |f(x)| \text{ für alle } x \in [C, b).$$

Dann gilt:

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ konvergiert } \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Eine analoge Aussage gilt auch für Funktionen, welche auf $(a,b]$ definiert sind.

Es folgt z.B. aus dem Satz und der obigen Rechnung, dass

$$\int_1^\infty \frac{x+10}{x^3+x^2-2}\,dx$$

konvergiert, nachdem $\frac{1}{x^3+x^2-2} \leq \frac{2}{x^2}$ für $x \geq 10$.

15.4. **Die Gamma-Funktion.**

Lemma 15.10. *Für jedes $s > 0$ konvergiert*

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Beweis. Sei also $s > 0$ gegeben. Per Definition ist

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt \quad = \quad \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass beide uneigentlichen Integrale existieren.

Für $t \in (0,1]$ gilt, dass

$$t^{s-1}e^{-t} \leq t^{s-1},$$

aber $\int_0^1 t^{s-1}\,dt$ existiert nach Lemma 15.7, also konvergiert nach Satz 15.9 auch $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt$.

Wir zeigen nun, dass $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ existiert. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \geq C$ gilt:

$$t^{s-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Mithilfe der Regel von l'Hospital kann man zeigen, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{s-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Wenden wir die Definition von $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ auf $\varepsilon = 1$ an, sehen wir, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \geq C$ gilt:

$$t^{s-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Nachdem $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ konvergiert, folgt wieder aus Satz 15.9, dass auch $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ konvergiert. □

Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \end{array}$$

heißt *Gamma-Funktion*. Sie hat folgende Eigenschaften:

Satz 15.11. (1) $\Gamma(1) = 1$,

(2) *für alle* $x \in (0,\infty)$ *gilt*

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),$$

(3) *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\Gamma(n) = n!.$$

Beweis. Es ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Für $a, b \in (0,\infty)$ folgt aus partieller Integration, dass

$$\int_a^b t^x e^{-t} = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} + x \cdot \int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Es sei $c \in (0,\infty)$, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \int_0^\infty t^x e^{-t} & = & \int_0^c t^x e^{-t} + \int_c^\infty t^x e^{-t} \\ & = & \lim_{a\to 0}\left([-t^x e^{-t}]_{t=a}^{t=c} + x \cdot \int_a^c t^{x-1}e^{-t}\,dt\right) \\ & & + \lim_{b\to\infty}\left([-t^x e^{-t}]_{t=c}^{t=b} + x \cdot \int_c^b t^{x-1}e^{-t}\,dt\right) \\ & = & -\lim_{a\to 0}(-a^x e^{-a}) + \lim_{b\to\infty} -b^x e^{-b} + x \cdot \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt. \end{array}$$

Man beachte, dass $\lim_{b\to\infty} -b^x e^{-b} = 0$ (wegen der Regel von l'Hospital) und $\lim_{a\to 0}(-a^x e^{-a}) = 0$. Es folgt, dass in der Tat $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Die letzte Aussage folgt aus (1) und (2) durch Induktion. □

15.5. Eine C^∞-Treppenfunktion.

Satz 15.12. *Es gibt eine C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = 0$ für $x \le 0$ und $f(x) = 1$ für $x \ge 1$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x \ge 0, \\ 0, & \text{wenn } x \le 0. \end{cases} \end{array}$$

Wie in Lemma 13.14 zeigt man, mithilfe der Regel von l'Hospital, dass diese Funktion C^∞ ist. Die durch $h(x) := g(x) \cdot g(1-x)$ definierte

Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaft, dass $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) = 0$ für $x \geq 1$ und $h(x) > 0$ für $x \in (0, 1)$. Wir setzen

$$C := \int_0^1 h(t)\,dt.$$

Dann hat

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{C}\int_0^x h(t)\,dt \end{array}$$

die gewünschte Eigenschaft. □

16. Das Taylorpolynom

In diesem Kapitel sei I durchweg ein offenes Intervall, beschränkt oder unbeschränkt.

Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt C^n-Funktion wenn die Funktion n-mal differenzierbar ist und wenn $f^{(n)}$ zudem stetig ist. Wir sagen, f ist eine C^∞-Funktion wenn f beliebig oft differenzierbar ist.

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $x_0 \in I$. Dann ist die Funktion

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(welche oft die Tangente zu f am Punkt x_0 genannt wird) eine 'Approximation von f am Punkt x_0'. Mathematisch ausgedrückt gilt:

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{x-x_0} & = & \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0} \\ & = & \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \\ & = & f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \end{array}$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass man eine Funktion durch Polynome noch besser approximieren kann. Zur Erinnerung, ein *Polynom vom Grad n* ist ein Ausdruck von der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und x eine Variable ist. Man beachte, dass es für ein gegebenes x_0 eindeutig bestimmte $b_0, \ldots, b_n$ gibt, so dass

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n = b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n.$$

(Dies kann man durch Induktion nach n zeigen.)

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und $x_0 \in I$, dann existiert (genau ein) Polynom p von Grad n, so dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Um solch ein Polynom zu finden verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 16.1. *Es seien $g, h\colon I \to \mathbb{R}$ zwei C^n-Funktionen, so dass*
$$g^{(k)}(x_0) = h^{(k)}(x_0) \text{ für alle } k \in \{0,\dots,n\},$$
dann gilt
$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-h(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Beweis. Wir setzen $r(x) = g(x)-h(x)$. Nach Voraussetzung gilt $r^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 0,\dots,n$. Nach der l'Hospitalschen Regel gilt dann
$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-h(x)}{(x-x_0)^n} &=& \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} \\ &=& \lim_{x\to x_0} \frac{r'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\ &=& \lim_{x\to x_0} \frac{r''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \\ &=& \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n)}(x)}{n!} = 0. \end{array}$$
□

Es sei nun $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion. Dann heißt
$$p_{n,x_0}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
das *n-te Taylorpolynom von f bei x_0*. Wir schreiben oft einfach auch $p_n(x)$. Wir können $p_n(x) := p_{n,x_0}(f)(x)$ auch wie folgt schreiben:
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n.$$
Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass für jedes $k = 0,\dots,n$ gilt:
$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$
Folgender Satz folgt jetzt aus dieser Beobachtung und aus Lemma 16.1.

Satz 16.2. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und $x_0 \in I$, dann gilt*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$
Ferner ist $p_n(x)$ das einzige Polynom von Grad n mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Die Existenz des Polynoms haben wir schon in der Diskussion vor Satz 16.2 bewiesen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass es genau ein Polynom gibt, mit der gewünschten Eigenschaft. Nun seien
$$\begin{array}{rcl} p(x) &=& a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \\ q(x) &=& b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n, \end{array}$$

zwei Polynome von Grad n, so dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \text{ und } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-q(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Dann kann man (ähnlich wie Lemma 16.1) zeigen, dass

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) = q^{(k)}(x_0)$$

für $k = 0, \ldots, n$. Es gilt aber

$$k!a_k = p^{(k)}(x_0) \text{ und } k!b_k = q^{(k)}(x_0),$$

es folgt also $a_k = b_k$ für $k = 0, \ldots, n$, also $p(x) = q(x)$. □

Beispielsweise ist das n-te Taylorpolynom von der Exponentialfunktion am Punkt $x_0 = 0$ gegeben durch:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Das fünfte Taylorpolynom von der Sinusfunktion am Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_5(x) &= \sin(0) + \cos(0)x + \tfrac{-\sin(0)}{2!}x^2 + \tfrac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \tfrac{\sin(0)}{4!}x^5 + \tfrac{\cos(0)}{5!}x^5 \\ &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

Definition. Es seit p_n das n-te Taylorpolynom von f bei x_0, so heißt

$$R_n(x) := R_{n,x_0}(f)(x) := f(x) - p_n(x)$$

das *n-te Restglied von f bei x_0.*

Satz 16.3. *(Restgliedformel von Taylor) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion und $x_0 \in I$, dann gilt*

$$R_{n,x_0}(f)(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mithilfe von Induktion nach n. Die Aussage für $n = 0$ kann man leicht direkt beweisen:

$$R_0(x) = f(x) - p_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt,$$

wobei die letzte Gleichung aus Satz 15.3 folgt.

Nun nehmen wir an, die Aussage gilt für $n-1$. Wir müssen nun zeigen, dass sie auch für n gilt. Es folgt mithilfe der Induktionsannahme, dass

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - p_{n-1}(x) - \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \int_{x_0}^{x} \tfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(t)\, dt - \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Nun wenden wir partielle Integration auf

$$\begin{array}{rcl} u'(t) &=& \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ v(t) &=& f^{(n)}(t) \end{array}$$

an. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} u(t) &=& -\frac{(x-t)^{n}}{n!}, \\ v'(t) &=& f^{(n+1)}(t). \end{array}$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcl} R_n(x) &=& \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &=& \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(x)\right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x -\frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &=& \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{array}$$

□

Satz 16.4. *(Restgliedformel von Lagrange) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion, $x_0 \in I$ und $x \in I$. Dann existiert ein $\xi \in [x_0, x]$, so dass*

$$R_{n,x_0}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

anders ausgedrückt, es existiert ein $\xi_x \in (x_0, x)$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

Man beachte, dass dieser Satz insbesondere eine Verallgemeinerung von Satz 12.3 ist.

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $x_0 < x$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\xi \in (x_0, x)$ gibt, so dass

$$f^{(n+1)}(\xi) = R_{n,x_0}(f)(x)\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Die Idee ist nun den Zwischenwertsatz (Satz 8.3) geschickt anzuwenden um solch ein ξ zu finden.

Nach Voraussetzung ist die Funktion $f^{(n+1)}|_{[x_0,x]}$ stetig. Nach Satz 8.2 existieren $x_1, x_2 \in [x_0, x]$, so dass

$$f^{(n+1)}(x_1) \le f^{(n+1)}(t) \le f^{(n+1)}(x_2)$$

für alle $t \in [x_0, x]$. Aus Lemma 14.4 folgt nun, dass

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_1)\,dt \le \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \le \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_2)\,dt.$$

Aus Satz 16.3 folgt zu dem $R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$. Also

$$f^{(n+1)}(x_1) \cdot \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \leq R_n(x) \leq f^{(n+1)}(x_2)\,dt \cdot \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Man beachte, dass

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Es gilt also

$$f^{(n+1)}(x_1) \leq \frac{R_n(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}} \leq f^{(n+1)}(x_2).$$

Nachdem Zwischenwertsatz (Satz 8.3), angewandt auf die stetige Funktion $f^{(n+1)}$, existiert nun ein $\xi_x \in (x_1, x_2) \subset (x, x_0)$, so dass

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{R_n(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Der Satz folgt nun sofort durch auflösen nach $R_n(x)$. $\square$

Wir erhalten umgehend folgendes Korollar.

Korollar 16.5. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion und $x_0 \in I$. Nehmen wir an, dass $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$ für alle $\xi \in [x, x_0]$. Dann gilt für alle $x \in I$, dass*

$$|f(x) - p_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}.$$

Zur Erinnerung, das fünfte Taylorpolynom von der Sinusfunktion am Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Nachdem die sechste Ableitung von der Sinusfunktion die Cosinusfunktion ist, welche durch $C = 1$ beschränkt ist, folgt aus dem obigen Korollar, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - p_5(x)| \leq \frac{1}{6!}|x|^6.$$

Für kleine x gibt das schon einen hervorragenden Näherungswert. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} \sin(0.1) &= 0.0998334166... \\ p_5(0.1) &= 0.0998334167.... \end{aligned}$$

17. Potenzreihen

Im Folgenden sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von *komplexen Zahlen* und es sei $a \in \mathbb{C}$. Eine *Potenzreihe* ist ein formaler Ausdruck von der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

wobei z eine Variable ist. Man interessiert sich für die Menge von komplexen Zahlen für welche die Potenzreihe konvergiert, d.h. man will

$$K(f) := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, \text{ die Reihe } f(z) \text{ konvergiert } \}$$

bestimmen.

Beispiel. (1) Betrachten wir z.B. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

dann gilt

$$K(f) = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \}.$$

In der Tat, wenn $|z| < 1$, dann konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium, und wenn $|z| \geq 1$, dann ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, keine Nullfolge, d.h. für solche n divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

(2) Betrachten wir nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

betrachten, dann gilt

$$\{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \} \subset K(f)$$

zudem gilt $-1 \in K(f)$ (wegen dem Leibniz-Kriterium), aber $1 \notin K(f)$ (weil die harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert). [10]

Satz 17.1. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \neq a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es sei $r \in (0, |z_0 - a|)$. Dann konvergiert die Reihe auf

$$D(a,r) := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| \leq r \}$$

absolut und gleichmäßig.

[10] Man kann auch leicht zeigen, dass $K(f) \subset \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1 \}$, aber es ist etwas kniffelig zu bestimmen, für welche z's auf dem Einheitskreis die Reihe $f(z)$ konvergiert.

Beweis. Der Beweis besteht nur darin, einen Teil des Beweises von Satz 12.3 zu übernehmen:

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $a = 0$. Nachdem $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ konvergiert, ist $(c_n z_0^n)$ eine Nullfolge, insbesondere beschränkt, d.h. es existiert insbesondere ein D, so dass

$$|c_n z_0^n| \leq D$$

für alle n. Für $z \in D(0, r)$ gilt dann:

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq D \cdot \left|\frac{r}{z_0}\right|.$$

Wir setzen

$$\theta := \left|\frac{r}{z_0}\right| \in (0, 1).$$

Nachdem die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} D \cdot \theta^n$$

konvergiert, folgt auch aus dem Majoranten-Kriterium (Satz 7.3), dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ gleichmäßig und absolut auf $D(a, r)$ konvergiert. □

Definition. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann nennen wir

$$R := \sup\{|z - a| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ konvergiert } \} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

den *Konvergenzradius der Potenzreihe* $f(z)$.

Beispiel.
(1) Der Konvergenzradius der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist eins, wie leicht aus der Definition und den obigen Argumenten folgt.
(2) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für jedes z, also ist der Konvergenzradius ∞.

Lemma 17.2. *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} r < R &\Rightarrow f(z) \text{ konvergiert gleichmäßig auf } D(a, r), \\ |z| < R &\Rightarrow f(z) \text{ konvergiert absolut}, \\ |z| > R &\Rightarrow f(z) \text{ divergiert}. \end{aligned}$$

Wie wir am Beispiel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ gesehen haben, können wir keine allgemeine Aussage über die Konvergenz einer Reihe für $|z| = R$ treffen.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus Satz 17.1 und die zweite Aussage folgt aus der ersten angewandt auf $r = |z|$. Die letzte Aussage folgt sofort aus der Definition von R. □

Lemma 17.3. *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$. Dann ist die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < R\} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

stetig.

Beweis. Es sei $r \in (0, R)$. Es folgt aus Lemma 17.2 und Satz 7.1, dass f stetig ist auf $D(a, r)$. D.h. f ist stetig auf allen Schreiben $D(a, r)$ mit $r < R$. Die Vereinigung aller dieser Scheiben ist aber gerade $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < R\}$. □

Man kann den Konvergenzradius, zumindest im Prinzip, direkt von den Koeffizienten der Potenzreihe ablesen:

Satz 17.4. *(Hadamardsche Formel) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann ist*

$$\left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$$

der Konvergenzradius. (Hier verwenden wir die Konvention, dass $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$.) [11]

Für den Beweis verweise ich auf Walter, Analysis I, Seite 143.

Im folgenden betrachten wir Ableitungen und Stammfunktionen von durch Potenzreihen definierten Funktionen. Nachdem wir den Begriff der Ableitung und der Stammfunktion von komplexen Funktionen noch nicht definiert haben, werden wir von jetzt an nur noch reelle Reihen betrachten.

Satz 17.5. *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

die dazugehörige Potenzreihe. Wir bezeichnen mit R den Konvergenzradius von $f(x)$. Dann haben die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \text{ ‘gliedweise Ableitung’}$$

[11] Genauer gesagt soll das Folgendes heißen: Wenn $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, dann ist ∞ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, anderseits wenn die Folge $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, dann ist Null der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \text{ ‘gliedweise Integration’}$$

den gleichen Konvergenzradius, und auf $(a-R, a+R)$ definieren diese Reihen die Ableitung bzw. eine Stammfunktion von f.

Es folgt, dass durch Potenzreihen definierte Funktionen notwendigerweise C^∞-Funktionen sind.

Beispiel. Betrachten wir die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Durch gliedweises Ableiten erhalten wir

$$\exp(x)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} = \exp(x).$$

Beweis. Die Tatsache, dass beide Reihen den gleichen Konvergenzradius besitzen kann man leicht durch die Hadamardsche Formel zeigen.

Wir wollen zuerst zeigen, dass

$$\begin{array}{rcl} (a-R, a+R) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \end{array}$$

eine Stammfunktion von f ist. Nachdem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in (a-R, a+R)$ gilt:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

Sei also $x \in (a-R, a+R)$. O.B.d.A. sei $x > a$. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f_n : [a,x] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} c_k(t-a)^k, n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Nach Satz 17.1 konvergiert diese Folge von Funktionen auf $[a,x]$ gleichmäßig gegen f. Nach Satz 14.14 gilt dann, dass

$$\begin{array}{rcl} \int_a^x f(t)\,dt & = & \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt \\ & = & \lim_{n\to\infty} \int_a^x \sum_{k=0}^{n} c_k(t-a)^k\,dt \\ & = & \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(t-a)^{k+1}\right]_a^x \\ & = & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}. \end{array}$$

Dies zeigt, dass

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

in der Tat eine Stammfunktion für $x \mapsto f(x)$ ist.

Das gleiche Argument angewandt auf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

und deren gliedweise Integration

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

zeigt nun auch, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine Stammfunktion von $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ ist. Anders ausgedrückt, die Ableitung von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ist gegeben durch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$. Aber das ist genau das, was wir beweisen wollten. □

Satz 17.6. *(Abelscher Grenzwertsatz) Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

die dazugehörige Potenzreihe. Wenn $f(x_0)$ existiert, dann ist die Funktion $x \mapsto f(x)$ stetig auf $[a, x_0]$.

Beweis. Dass die Funktion auf dem halb-offenem Intervall $[a, x_0)$ stetig ist folgt schon aus Lemma 17.3. Es verbleibt zu zeigen, dass f auch im Punkt x_0 stetig ist.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $a = 0$ und $x_0 = 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für alle $x > 1 - \delta$.

Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ und $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = f(1)$. Für $x \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{array}{rcl} f(1) - f(x) & = & \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty}(1-x^n)a_n \\ & = & \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)a_n \\ & = & (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)a_n \\ & = & (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s - s_n)x^n. \end{array}$$

Nachdem $\lim_{n\to\infty}(s-s_n)=0$ existiert ein $N\in\mathbb{N}$, so dass $|s-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n\geq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|f(1)-f(x)| &= \left|(1-x)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)x^n\right| \\
&= \left|(1-x)\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}(s-s_n)x^n+(1-x)\sum_{n=N}^{\infty}(s-s_n)x^n\right| \\
&< (1-x)\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}|s-s_n|x^n+(1-x)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}x^n \\
&\leq (1-x)\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}|s-s_n|+\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\
&= (1-x)\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}|s-s_n|+\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} \\
&= (1-x)\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}|s-s_n|+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Wir setzen $C:=\sum_{n=0}^{N-1}|s-s_n|$. Für $x>1-\frac{\varepsilon}{2C}$ gilt dann

$$|f(1)-f(x)|<(1-x)C+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

Aus Satz 3.8 folgt, dass

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \text{ für alle } x\in(-1,1).$$

Insbesondere ist nach Satz 17.5 die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x}$. Andererseits ist $\ln(1+x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x}$. Nachdem beide bei $x=0$ den gleichen Wert haben, erhalten wir, dass

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \text{ für alle } x\in(-1,1).$$

Nachdem beide Seiten auch für $x=1$ existieren, folgt aus der Stetigkeit (siehe Satz 17.6), dass die Gleichheit für $x=1$ gilt, d.h. es ist

$$\ln(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Aus Satz 3.8 folgt zudem, dass

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \text{ für alle } x\in(-1,1).$$

Insbesondere ist nach Satz 17.5 die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$. Andererseits ist $\arctan(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$. Nachdem beide bei $x = 0$ den gleichen Wert haben, erhalten wir, dass

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Nachdem beide Seiten auch für $x = 1$ existieren, folgt aus der Stetigkeit (siehe Satz 17.6), dass die Gleichheit für $x = 1$ gilt, d.h. es ist

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Zur annäherungsweisen Berechnung von π ist diese Darstellung allerdings ungeeignet, weil die Reihe nur 'langsam' konvergiert. Beispielsweise, wenn sie $\frac{\pi}{4}$ bis auf sechs Stellen berechnen wollen, dann müssen sie die Summe $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ für $k = 500.000$ berechnen.

18. Die Taylor-Reihe und reell-analytische Funktionen

Definition. Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $x_0 \in (a, b)$, dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die *Taylorreihe von f bei x_0.*

Beispiel. Wenn $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ durch eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

gegeben ist, dann folgt aus Satz 17.5, dass

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, \dots, f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n, \dots$$

daher ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

auch die Taylorreihe von f bei x_0.

Die Taylorreihen von $\exp(x), \sin(x), \cos(x)$ am Punkt $x_0 = 0$ sind natürlich wie folgt gegeben:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x}. \end{array}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1-x} & = & \frac{1}{1-x_0-(x-x_0)} \\ & = & \frac{1}{1-x_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}}. \end{array}$$

Für alle x mit $\left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1$, d.h. für alle $x \in (x_0 - \frac{1}{|1-x_0|}, x_0 + \frac{1}{|1-x_0|})$ gilt dann, dass

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1-x} & = & \frac{1}{1-x_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}} \\ & = & \frac{1}{1-x_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}\cdot(x-x_0)^n. \end{array}$$

Insbesondere ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}\cdot(x-x_0)^n$$

die Taylorreihe von f am Punkt x_0.

Definition. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $x_0 \in (a,b)$. Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

auf $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ konvergiert, und so dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

für alle $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, dann sagen wir, dass f *lokal bei x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist.*

Definition. Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, die sich um jeden Punkt $x_0 \in (a,b)$ lokal in eine Taylorreihe entwickeln läßt, heißt *reell-analytisch.*

Beispielsweise ist die Exponentialfunktion reell-analytisch. In der Tat, sei $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\exp(x) = \exp(x_0)\cdot\exp(x-x_0) = \exp(x_0)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Zudem ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ reell-analytisch, wie wir oben gesehen haben. Folgende Funktionen sind ebenfalls reell-analytisch:

(1) Sinus-Funktion und Cosinus-Funktion,
(2) Polynomfunktionen und rationale Funktionen,
(3) Produkte, Summen und Quotienten von reell-analytischen Funktionen.

Man beachte, dass aus Satz 17.5 folgt, dass eine reell-analytische Funktion notwendigerweise eine C^∞-Funktion ist. Allerdings ist nicht jede C^∞-Funktion reell-analytisch. Beispielsweise hat die C^∞-Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{wenn } x \geq 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

die Eigenschaft, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe den Beweis von Lemma 13.14), insbesondere ist die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ die Nullreihe. Aber es gilt $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, d.h. die Taylorreihe von f und die Funktion f stimmen in keiner δ-Umgebung von $x_0 = 0$ über ein.

Ganz analog sieht man, dass die 'Treppenfunktion' von Satz 15.12 ebenfalls nicht reell analytisch ist.

Satz 18.1. *Es seien $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei reell analytische Funktionen, welche auf einem offenen Intervall übereinstimmen. Dann ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beweis. Es sei $(c, d) \subset (a, b)$ ein Intervall auf dem f und g übereinstimmen. Wir setzen nun

$$B := \sup\{t \in (c, b) \mid f \text{ und } g \text{ stimmen auf } (c, t) \text{ über ein}\}.$$

Behauptung.

$$B = b.$$

Nehmen wir an, dass $B < b$. Aus der Definition von B folgt, dass $f(x) = g(x)$ auf dem offenen Intervall (c, B). Es folgt dann, dass auch $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ für alle $x \in (c, B)$. Aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ (wie oben erwähnt sind reell-analytische Funktionen C^∞-Funktionen) folgt nun, dass $f^{(n)}(B) = g^{(n)}(B)$ für alle n. Insbesondere haben f und g die gleiche Taylorreihe um den Punkt B. Nachdem f und g reell-analytisch sind, stimmen die Funktionen f und g in einer δ-Umgebung mit ihren Taylorreihen über ein. Es folgt also, dass

$$f(x) = g(x) \text{ für all } x \in (B - \delta, B + \delta),$$

insbesondere

$$f(x) = g(x) \text{ für all } x \in (b, B + \delta),$$

im Widerspruch zur Wahl von B.

Dies zeigt, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (c, b)$. Ganz analog zeigt man, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

$\square$