

ANALYSIS III - WINTERSEMESTER 2011–2012

STEFAN FRIEDL

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	3
1. Einleitung und Erinnerung	4
1.1. Einleitung	4
1.2. Erinnerung an topologische Grundbegriffe	4
2. Lebesgue–Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger	5
2.1. Definition des Lebesgue–Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger	5
2.2. Erste Eigenschaften des Lebesgue–Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger	7
2.3. Die axiomatische Charakterisierung des Lebesgue–Integrals	9
2.4. Beweis von Satz 2.3	12
3. Transformationsformel für differenzierbare Abbildungen	16
3.1. Formulierung der Transformationsformel	16
3.2. Beweis der Transformationsformel I	17
3.3. Beweis der Transformationsformel II	23
3.4. Beispiele	25
4. Das Lebesgue–Integral für halbstetige Funktionen	28
4.1. Die Definition von $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$	28
4.2. Beweis von Satz 4.2	30
4.3. Die Definition von $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$	33
4.4. Funktionen in einer Variablen	33
4.5. Eigenschaften des Integrals von Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$	35
4.6. Halbstetige Funktionen	41
5. Volumen von kompakten Mengen	44
6. Das allgemeine Lebesgue–Integral	47
6.1. Lebesgue–integrierbare Funktionen	47
6.2. Das Riemann–Integral und das Lebesgue–Integral	52
6.3. Beispiel einer Lebesgue–integrierbaren Funktion, welche nicht Riemann–integrierbar ist	53

6.4.	Das uneigentliche Riemann–Integral und das Lebesgue–Integral	54
6.5.	Zusammenfassung der Definition des Lebesgue–Integrals	55
6.6.	Eigenschaften des Lebesgue–Integrals	56
6.7.	Erweiterungen des Lebesgue–Integrals	64
7.	Messbare Mengen	65
7.1.	Definition von messbaren Mengen	65
	Einschub: Äquivalenzrelationen	67
7.2.	Nichtmessbare Mengen	68
7.3.	Weitere Eigenschaften von messbaren Mengen	69
7.4.	Nullmengen	70
7.5.	Funktionen, welche fast überall gleich sind	74
7.6.	Der Satz von Fubini	76
8.	Das Cantorsche Diskontinuum	79
9.	Konvergenzsätze	82
10.	Die L_p –Räume	88
10.1.	Banachräume	88
10.2.	Die L^p –Pseudonorm von Funktionen	89
10.3.	Einschub: Quotientenvektorräume	90
10.4.	Der Banachraum $L_p(\mathbb{R}^n)$	91
11.	Die Transformationsformel für Lebesgue–integrierbare Funktionen	92
12.	Integration und Untermannigfaltigkeiten	100
12.1.	Erinnerung an Untermannigfaltigkeiten	100
12.2.	Differenzierbare Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten	103
12.3.	Einschub: Lineare Algebra	104
12.4.	Integration auf Untermannigfaltigkeiten I	106
12.5.	Die Zerlegung der Eins	109
12.6.	Integration auf Untermannigfaltigkeiten II	110
13.	Weihnachtsvorlesung: Das Gefangenenproblem	110
13.1.	Das Gefangenenproblem I: Endlich viele Gefangene	110
13.2.	Das Gefangenenproblem II: Abzählbar viele Gefangene	112
14.	Der Gaußsche Integralsatz	115
14.1.	Untermannigfaltigkeiten mit Rand	115
14.2.	Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten	119
14.3.	Formulierung des Gaußschen Integralsatzes	121
14.4.	Beweis des Gaußschen Integralsatzes I: Quader	123
14.5.	Beweis des Gaußschen Integralsatzes II: Stempel	125
14.6.	Beweis des Gaußschen Integralsatzes III: Der allgemeine Fall	127
15.	Pfaffsche Formen	129
15.1.	Duale Vektorräume	129

15.2.	Definition und Integrierbarkeit von Pfaffschen Formen	130
15.3.	Umparametrisierungen und Integration auf eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten	133
16.	Integration von Differentialformen höherer Ordnung	135
16.1.	Motivation	135
16.2.	Alternierende Multilinearformen I: Definition	137
16.3.	Alternierende Multilinearformen II: Das Dachprodukt von Linearformen	139
16.4.	Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten	141
16.5.	Induzierte Abbildungen	142
16.6.	Stetige Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten	144
16.7.	Integration von Differentialformen I	146
16.8.	Orientierte Vektorräume und Untermannigfaltigkeiten	149
16.9.	Integration von Differentialformen II	153
16.10.	Integration von Differentialformen III	155
16.11.	Null-dimensionale Untermannigfaltigkeiten	157
17.	Der Satz von Stokes	158
17.1.	Orientierte Untermannigfaltigkeiten mit Rand	158
17.2.	Das Differential von Differentialformen	160
17.3.	Formulierung des Satz von Stokes	164
17.4.	Beweis des Satz von Stokes	165
17.5.	Der Satz von Stokes für Flächen in \mathbb{R}^3	167

LITERATUR

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skriptum. Das Skriptum orientiert sich an

Forster: Analysis III: Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen

in der 1. bis zur 5. Auflage. Die 6. Auflage von Forster: Analysis III (mit dem Beitel 'Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im \mathbb{R}^n und Anwendungen') wurde vollständig überarbeitet und unterscheidet sich in der ersten Hälfte deutlich von den früheren Auflagen. Die Verweise im Skript auf Forster, Analysis III beziehen sich immer auf die 5. Auflage.

1. EINLEITUNG UND ERINNERUNG

1.1. **Einleitung.** In der Vorlesung Analysis I haben wir mithilfe von Obersummen und Untersummen das Riemann–Integral eingeführt. Wir haben insbesondere gesehen, dass das Riemann–Integral definiert ist für jede stetige Funktion, welche auf einem kompakten Intervall definiert ist. Andererseits haben wir gesehen, dass es beschränkte Funktionen gibt, welche auf einem kompakten Intervall definiert sind, welche nicht Riemann–integrierbar sind. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

nicht Riemann–integrierbar.

Im ersten Teil der Vorlesung Analysis III, werden wir das Lebesgue–Integral für Funktionen einführen, welche auf Teilmengen des \mathbb{R}^n definiert sind. Wir werden das Lebesgue–Integral schrittweise einführen, in dem wir zuerst das Lebesgue–Integral von stetigen Funktion mit kompaktem ‘Träger’ einführen, und danach das allgemeine Lebesgue–Integral von allgemeineren Funktionen durch ‘Grenzwertbildung’ und Betrachtung von ‘Oberintegralen’ und ‘Unterintegralen’ definieren.

1.2. Erinnerung an topologische Grundbegriffe.

(1) Wir bezeichnen mit

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

den euklidischen Abstand von zwei Punkten $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

die offene ε –Kugel um x .

- (2) Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.
- (3) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, dann heißt $U \subset \mathbb{R}^n$ *Umgebung von x* , wenn $x \in U$ und wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.
- (4) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, dann heißt $U \subset \mathbb{R}^n$ *offene Umgebung von x* , wenn U offen ist, und wenn U eine Umgebung von x ist. Man beachte, dass U eine offene Umgebung von x ist, genau dann, wenn $x \in U$ und wenn U offen ist.
- (5) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen ist.

- (6) Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$, wir bezeichnen mit \overline{X} die *abgeschlossene Hülle von X* , d.h. die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, so dass jede offene Umgebung von x mindestens einen Punkt in X enthält. Beispielsweise ist die abgeschlossene Hülle von $B_\varepsilon(x)$ gegeben durch die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B_\varepsilon(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Die abgeschlossene Hülle \overline{X} ist die kleinste¹ aller abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{R}^n , welche X enthält.

- (7) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $r \geq 0$ gibt, so dass $A \subset B_r(0)$.
- (8) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist nach dem Satz von Heine–Borel kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.

2. LEBESGUE–INTEGRAL FÜR STETIGE FUNKTIONEN MIT KOMPAKTEM TRÄGER

2.1. Definition des Lebesgue–Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Es sei Q ein achsenparallelen Quader im \mathbb{R}^n , d.h. Q ist von der Form

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \quad \text{wobei } I_k = [a_k, b_k], k = 1, \dots, n.$$

Sei

$$\begin{aligned} f: Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Wir definieren nun *Lebesgue–Integral*² von f über Q iterativ durch Riemann–Integrale in einer Variablen wie folgt:

$$\int_Q f(x) dx := \int_{x_n=a_n}^{x_n=b_n} \cdots \int_{x_2=a_2}^{x_2=b_2} \int_{x_1=a_1}^{x_1=b_1} \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{\substack{x_2, \dots, x_n \text{ konst.} \\ \text{d.h. Funktion in } x_1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\substack{x_3, \dots, x_n \text{ konst.} \\ \text{d.h. Funktion in } x_2}}$$

Man beachte, dass die jeweiligen Funktionen, welche wir integrieren stetig sind, d.h. alle n Riemann–Integrale existieren.

¹‘Kleinste’ soll heissen, wenn Y eine beliebige abgeschlossene Menge von \mathbb{R}^n ist, welche X enthält, dann ist $X \subset Y$.

²Im Folgenden, wenn keine Verwechslungsgefahr mit dem Riemann–Integral besteht, dann werden wir einfach nur ‘Integral’ anstatt ‘Lebesgue–Integral’ sagen.

Definition. (1) Der *Träger* einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, geschrieben³ als $\text{Supp}(f)$, ist definiert als

$$\text{Supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Man beachte, dass der Träger eine abgeschlossene Teilmenge ist. Wenn $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ beschränkt ist, dann ist der Träger sogar kompakt.

(2) Wir verwenden folgende Bezeichnungen:⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) &= \text{Vektorraum aller stetigen Funktionen } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) &= \text{Vektorraum aller stetigen Funktionen } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ &\text{mit kompaktem Träger.} \end{aligned}$$

Es sei nun $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein achsenparalleler Quader Q , so dass $\text{Supp}(f) \subset Q$, und wir definieren das *Lebesgue-Integral von f über \mathbb{R}^n* als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_Q (f|_Q)(x) dx.$$

(Hier bezeichnen wir mit $f|_Q$ die Einschränkung von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$.) Man kann leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl des Quaders Q abhängt.

Bemerkung. Sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gegeben, anstatt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

schreiben wir auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \cdots dx_n,$$

außerdem können wir f auch als Funktion in beliebig anders genannten Variablen auffassen, z.B. als Funktion in $y = (y_1, \dots, y_n)$, und dann gilt natürlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy.$$

³Die Notation kommt vom Englischen, dort wird der Träger einer Funktion als ‘support’ bezeichnet.

⁴Anders ausgedrückt, wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen f , so dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$$

beschränkt ist. Man sieht nun leicht, dass $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum ist, d.h. wenn $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch $f + g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$.

2.2. Erste Eigenschaften des Lebesgue-Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Sei nun $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^n$, dann definieren wir die um a translatierte Funktion $\tau_a f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, durch

$$(\tau_a f)(x) := f(x - a) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Der folgende Satz folgt leicht aus der Definition des Lebesgue-Integrals und den entsprechenden Aussagen über das Riemann-Integral aus der Analysis I.⁵

Satz 2.1. *Es seien $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f + g \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx && \text{(Linearität),} \\ \int_{\mathbb{R}^n} \lambda f \, dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \tau_a(f) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx && \text{(Translationsinvarianz).} \end{aligned}$$

Darüber hinaus,⁶

$$f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx \quad \text{(Monotonie),}$$

und es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx \quad \text{('Dreiecksungleichung').}$$

Wir beweisen nun eine etwas technischere Aussage. Dafür müssen wir erst an zwei Definitionen aus Analysis I and II erinnern:

Definition. (1) Es sei $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktionen, dann definieren wir

$$\|h\| := \sup\{|h(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

7

(2) Es sei $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen. Wir sagen $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion f , wenn gilt⁸

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall k \geq K \quad \|f_k - f\| < \varepsilon.$$

⁵Siehe Forster, Analysis III, für Details bezüglich der Translationsinvarianz.

⁶Zur Erinnerung, wir schreiben $f \leq g$, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle x im Definitionsbereich.

⁷Das Supremum existiert z.B. wenn h stetig ist und der Träger kompakt ist. In der Tat, denn aus Analysis II folgt, dass in diesem Fall die Funktion h ein Maximum und ein Minimum annimmt.

⁸Anders ausgedrückt, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion f , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Die Aussage des folgenden Satzes ist ähnlich wie die Aussage von Analysis I, Satz 14.14.

Satz 2.2. *Es sei $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen. Wir nehmen an, es gibt eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\text{Supp}(f_k) \subset K$ für alle k . Wenn die Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Der Satz besagt also, dass man unter gewissen Voraussetzungen ‘Integral’ und ‘Grenzwert’ vertauschen kann, d.h. unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dx.$$

Beweis. Es sei $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, so dass $\text{Supp}(f_k) \subset K$ für alle k . Wir wählen Intervalle I_1, \dots, I_n , so dass

$$K \subset Q := I_1 \times \dots \times I_n.$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ wählen wir eine Funktion $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:⁹

- (1) φ_i ist stetig,
- (2) für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_i(t) \in [0, 1]$,
- (3) für alle $t \in I_i$ ist $\varphi_i(t) = 1$,
- (4) der Träger von φ_i ist kompakt.

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n). \end{aligned}$$

dann gilt

- (1) Φ ist stetig,
- (2) für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\Phi(x) \in [0, 1]$,
- (3) für alle $x \in K$ ist $\Phi(x) = 1$,
- (4) der Träger von Φ ist kompakt.

Diese Formulierung entspricht der Formulierung, welche wir in Analysis I verwendet haben.

⁹Das eine solche Funktion existiert kann man leicht zeigen.

Nachdem $\text{Supp}(f_k - f) \subset K$, gilt¹⁰

$$-\|f_k - f\| \cdot \Phi \leq f_k - f \leq \|f_k - f\| \cdot \Phi.$$

Aus der Monotonie und Linearität des Integrals folgt daraus, dass

$$-\|f_k - f\| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k - f \, dx \leq \|f_k - f\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \, dx.$$

Wir setzen $C := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \, dx$, es folgt, dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \right| \leq \|f_k - f\| \cdot C.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ erhalten wir, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \right) = 0, \text{ d.h. } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx.$$

□

2.3. Die axiomatische Charakterisierung des Lebesgue–Integrals.

Wenn man die Definition von $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ liest, dann stellt sich die Frage, ob es einen Unterschied macht, wenn man nach den verschiedenen Variablen in einer anderen Reihenfolge integriert. Allgemeiner kann man fragen, ob es für eine Funktion, welche auf dem n -dimensionalen Raum definiert ist, einen Unterschied macht, welche orthonormal Basis man verwendet um Koordinatenachsen zu definieren.¹¹

Zum Glück werden wir beide Fragen mit ‘Nein’ beantworten können, aber um dies zu beweisen, werden wir etwas ausholen müssen.

Definition. Eine Abbildung

$$I : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt *lineares Funktional*, falls¹²

$$\begin{aligned} I(f + g) &= I(f) + I(g), & \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), \\ I(\lambda f) &= \lambda I(f), & \text{für alle } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

¹⁰D.h. es gilt

$$-\|f_k - f\| \cdot \Phi(x) \leq f_k(x) - f(x) \leq \|f_k - f\| \cdot \Phi(x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dies sieht man leicht indem man die Fälle $x \in K$ und $x \notin K$ getrennt betrachtet.

¹¹Beispielsweise könnte f eine physikalische Funktion sein, z.B. Dichte an einem Punkt, ein sinnvoller Integralbegriff sollte dann nicht davon abhängen, welche Richtungen wir als x, y, z -Achsen definieren. Aus der Translationsinvarianz folgt zumindest, dass die Wahl des Ursprungs keinen Unterschied macht.

¹²Ein lineares Funktional ist also nichts anderes als ein Vektorraum Homomorphismus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$.

Zudem heißt I *monoton*, wenn gilt

$$f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$$

und f heißt *translationsinvariant*, falls

$$I(\tau_a f) = I(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Wir haben in Satz 2.1 gesehen, dass $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ ein monotones, translationsinvariantes lineares Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ist. Der folgende Satz besagt nun, dass dies, bis auf Multiplikation mit einer Konstanten, das einzige monotone, translationsinvariante, lineare Funktional ist:

Satz 2.3. *Es sei $I : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, translationsinvariantes lineares Funktional. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$, so dass*

$$I(f) = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Wir verschieben den Beweis von 2.3 auf das nächste Kapitel. Wir wollen uns zuerst mit einem Korollar befassen:

Korollar 2.4. *Es sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(A \cdot x) \cdot |\det(A)| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy.$$

Bemerkung. (1) Wenn $|\det(A)| = 1$, dann gilt insbesondere, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f(A \cdot x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy$. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn A eine Permutationsmatrix ist, oder, etwas allgemeiner, eine beliebige orthogonale Matrix ist. Es folgt, dass wir die am Anfang des Kapitels gestellten Fragen mit ‘Nein’ beantworten können.

(2) Es sei $n = 1$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Stammfunktion F . In diesem Fall folgt das Korollar aus der bekannten Tatsache, dass die Stammfunktion von $f(ax)$ gerade gegeben ist durch $\frac{1}{a}F(ax)$.¹³

Beweis von Korollar 2.4. Es sei also $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Man kann leicht nachweisen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) \, dx \end{aligned}$$

¹³Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, warum denn nun im Falle $n = 1$ die Aussage ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax) \, dx \cdot |a| = \int_{\mathbb{R}} f(y) \, dy,$$

d.h. woher kommt der Absolutbetrag?

ein monotonen, translationsinvariantes lineares Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ist. Es folgt also aus Satz 2.3, dass es ein $C \geq 0$ gibt, so dass

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) dx = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f dx \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Das Korollar folgt nun also aus folgender Behauptung.

Behauptung.

$$C = |\det(A)|.$$

Wir beweisen zuerst zwei Spezialfälle, bevor wir den allgemeinen Fall betrachten. (1) Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass A eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen a_1, \dots, a_n ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(A(x_1, \dots, x_n)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(a_1x_1, \dots, a_nx_n) dx \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(u_1, \dots, u_n) du \\ &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx. \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung folgt leicht aus der Definition des Integrals und aus den Substitutionen $u_i = a_i x_i$, $i = 1, \dots, n$.

(2) Wir betrachten nun den Spezialfall, dass $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix ist. Man beachte, dass (2.1) für jede Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gilt, um zu zeigen, dass $C = |\det(A)| = 1$ wählen wir jetzt geschickt eine Funktion, welche unter Rotation mit A invariant ist. Genauer gesagt, wir betrachten

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 - \|x\|, & \text{wenn } \|x\| \leq 1, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich stetig mit kompaktem Träger, d.h. $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Da A eine Orthogonalmatrix ist gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass $\|A \cdot x\| = \|x\|$ und insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass $f(x) = f(A \cdot x)$. Nachdem $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \neq 0$ erhalten wir aus (2.1), dass $C = 1$.

(3) Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, dass $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ beliebig ist. Aus der linearen Algebra¹⁴ wissen wir, dass es orthogonale Matrizen P und Q , sowie eine Diagonalmatrix D mit positiven Diagonaleinträgen gibt, so dass $A = PDQ$. Die Aussage folgt nun durch einfaches Anwenden von (1), zweifaches Anwenden von (2) und der Tatsache, dass $|\det(A)| = |\det(PDQ)| = |\det(P) \det(D) \det(Q)| = \det(D)$. \square

¹⁴Siehe auch Forster, Analysis III, Seite 14.

2.4. Beweis von Satz 2.3. Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Satz 2.3 zu. Sei von nun an $I : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ein fest gewähltes monotonen, translationsinvariantes lineares Funktional. Wir müssen zeigen, dass es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$I(f) = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Wir beginnen mit der Beobachtung, dass die Aussage von Satz 2.2 auch für I gilt, denn im Beweis von Satz 2.2 haben wir nur die Linearität und Monotonität des Integrals verwendet. Wir erhalten also folgendes Lemma:

Lemma 2.5. *Es sei $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen. Wenn es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\text{Supp}(f_k) \subset K$ für alle k , und wenn die Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k) = I(f).$$

Wir betrachten nun folgende zwei Funktionen:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 - |t|, & \text{wenn } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{wenn } |t| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} && \text{(Zackenfunktion)} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \psi(x_1) \cdots \psi(x_n). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $\Psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, und dass $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi \, dx = 1$. Wir setzen jetzt

$$C := I(\Psi).$$

Satz 2.3 folgt nun aus folgender Behauptung:

Behauptung. Für alle $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I(f) = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx.$$

Die Beweisidee ist wie folgt:

- (1) Die Aussage gilt per Definition für $f = \Psi$.
- (2) Durch Ausnutzen der Linearität und der Translationsinvarianz werden wir zeigen, dass die Aussage auch für Linearkombinationen von Translationen von ‘Streckungen’ von Ψ gilt.
- (3) Wir zeigen, dass jede Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen wie in (2) ist.
- (4) Die Behauptung folgt dann sofort aus Satz 2.2 und Lemma 2.5.

Wir führen jetzt die Beweisschritte aus. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\Psi_\varepsilon(x) := \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(Wir bezeichnen Ψ_ε als *Streckung von Ψ um den Faktor ε* .)

Lemma 2.6. *Es sei $J : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares translationsinvariantes Funktional. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, dass*

$$J(\Psi_{\varepsilon/2}) = \frac{1}{2}J(\Psi_\varepsilon).$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Dann ist $\Psi = \psi$ und es gilt folgende Gleichheit:¹⁵

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau_{-\varepsilon/2}\psi_{\varepsilon/2} + \psi_{\varepsilon/2} + \frac{1}{2}\tau_{\varepsilon/2}\psi_{\varepsilon/2}.$$

Es folgt aus der Translationsinvarianz und der Linearität von J , dass

$$J(\psi_\varepsilon) = \frac{1}{2}J(\tau_{-\varepsilon/2}\psi_{\varepsilon/2}) + J(\psi_{\varepsilon/2}) + \frac{1}{2}J(\tau_{\varepsilon/2}\psi_{\varepsilon/2}) = 2J(\psi_{\varepsilon/2}).$$

Der Fall $n > 1$ wird ähnlich bewiesen, der Beweis ist notationsmäßig etwas aufwändiger, aber basiert auf der selben Idee. Wir verweisen auf Forster, Analysis III, Seite 8 für die Details. \square

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ heißt *zackig*, wenn es $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \tau_{a_i} \Psi_{2^{-m_i}}.$$

Eine zackige Funktion ist also eine Linearkombination von Translationen von Streckungen von Zackenfunktionen.

Es folgt aus Lemma 2.6 und der Linearität und Translationsinvarianz des Integrals und von I , dass für jede zackige Funktion f gilt

$$(2.2) \quad I(f) = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx.$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass man jede Funktion in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ durch zackige Funktionen beliebig bzgl. der Norm $\| - \|$ approximieren kann.

Lemma 2.7. *Sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $r \in \mathbb{R}_+$ so gewählt, dass $\text{Supp}(f) \subset \overline{B(0, r)}$. Zu jedem $\sigma > 0$ existiert dann eine zackige Funktion g , so dass $\|f - g\| < \sigma$, und so dass $\text{Supp}(g) \subset \overline{B(0, r + \sqrt{n})}$.*

¹⁵Siehe Forster Analysis III, Seite 7 für eine hilfreiche Illustration.

Beweis. Sei also $\sigma > 0$. Nachdem der Träger von f kompakt ist, ist f nach Analysis II, Satz 3.2 (siehe auch Analysis I, Satz 8.4 und Forster, Analysis II, Seite 34) gleichmäßig stetig, insbesondere existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \sigma.$$

Wir wählen nun ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\varepsilon := 2^{-m} < \frac{1}{\sqrt{n}}\delta$. Wir betrachten

$$(2.3) \quad g := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(\varepsilon \cdot p) \cdot \tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon.$$

Das Lemma folgt nun aus folgender Behauptung:

- Behauptung.* (1) g ist eine zackige Funktion,
 (2) $\text{Supp}(g) \subset B(0, r + \sqrt{n})$,
 (3) $\|f - g\| < \sigma$.

Nachdem $\text{Supp}(f)$ kompakt, insbesondere beschränkt ist, folgt, dass es nur endliche viele $p \in \mathbb{Z}^n$ gibt mit $f(\varepsilon \cdot p) \neq 0$. Insbesondere ist (2.3) eine endliche Summe. Es ist nun klar, dass g eine zackige Funktion ist.

Aus der Definition von Ψ folgt sofort, dass

$$(2.4) \quad \text{Supp}(\Psi_\varepsilon) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ für alle } i\} \subset \overline{B(0, \varepsilon\sqrt{n})}.$$

Nachdem $\text{Supp}(f) \subset \overline{B(0, r)}$ folgt nun, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $f(y) \neq 0$ und für alle $\varepsilon \in [0, 1]$ gilt

$$(2.5) \quad \text{Supp}(\tau_y \Psi_\varepsilon) \subset \overline{B(y, \varepsilon\sqrt{n})} \subset \overline{B(0, r + \sqrt{n}\varepsilon)} \subset \overline{B(0, r + \sqrt{n})}.$$

Es folgt, dass $\text{Supp}(g) \subset \overline{B(0, r + \sqrt{n})}$.

Wir wenden uns jetzt dem Beweis der 3. Behauptung zu. Man beachte zuerst, dass¹⁶

$$(2.6) \quad \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist leicht zu sehen im Fall $n = 1$, gilt aber in der Tat für alle n , siehe Forster, Analysis III Seite 9 für Details.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Wir bezeichnen mit A die Menge aller Multiindices $p \in \mathbb{Z}^n$ mit $x \in \text{Supp}(\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)$. Es folgt aus (2.6) und der

¹⁶Man beachte, dass für gegebenes x die Summe

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x)$$

wohldefiniert ist, weil es nur endlich viele $p \in \mathbb{Z}^n$ gibt, mit $(\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) \neq 0$.

Definition von g , dass

$$\begin{aligned}
 |f(x) - g(x)| &= \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(x) \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) - \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(\varepsilon \cdot p) \cdot \tau_{\varepsilon \cdot p}(\Psi_\varepsilon)(x) \right| \\
 &= \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (f(x) - f(\varepsilon \cdot p)) \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) \right| \\
 &= \left| \sum_{p \in A} (f(x) - f(\varepsilon \cdot p)) \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) \right| \\
 &\leq \sum_{p \in A} |(f(x) - f(\varepsilon \cdot p)) \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x)|.
 \end{aligned}$$

Für $p \in A$ folgt aus (2.4), dass $\|x - \varepsilon p\| \leq \varepsilon \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \delta \sqrt{n} = \delta$. Aus der Wahl von δ erhalten wir, dass $|f(x) - f(p\varepsilon)| < \sigma$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
 |f(x) - g(x)| &\leq \sum_{p \in A} |(f(x) - f(\varepsilon \cdot p)) \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x)| \\
 &< \sum_{p \in A} \sigma \cdot (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) \\
 &= \sigma \cdot \sum_{p \in A} (\tau_{\varepsilon \cdot p} \Psi_\varepsilon)(x) \\
 &\leq \sigma.
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt hierbei aus (2.6). Wir haben damit die Behauptung, und daher das Lemma bewiesen. \square

Wir können jetzt endlich Satz 2.3 beweisen. Sei also $I : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ein monotones, translationsinvariantes lineares Funktional. Wir setzen

$$C := I(\Psi).$$

Sei nun $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Aus Lemma 2.7 folgt, dass es eine Folge von zackigen Funktionen $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\text{Supp}(f_k) \subset K$ für alle k , und so dass $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt nach Lemma 2.5, Gleichung (2.2) und Satz 2.2, dass

$$I(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = C \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

3. TRANSFORMATIONSFORMEL FÜR DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN

3.1. Formulierung der Transformationsformel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wir definieren¹⁷

$$\mathcal{C}_c(U) := \text{Vektorraum aller stetigen Funktionen } f: U \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass $\text{Supp}(f)$ kompakt ist und in U liegt.

Für $f \in \mathcal{C}_c(U)$ definieren wir das Integral

$$\int_U f(x) dx$$

dadurch, dass wir f auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen (indem wir allen Punkten außerhalb von U den Wert 0 zuordnen), und dann das Integral bestimmen.

Es seien nun U und V zwei offene Teilmengen von \mathbb{R}^n und $\varphi: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus.¹⁸ Wir sagen φ ist \mathcal{C}^1 -invertierbar, wenn sowohl φ als auch φ^{-1} einmal stetig differenzierbar sind.

Zur Erinnerung, wir bezeichnen mit

$$D\varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

das Differential¹⁹ von φ . Wenn φ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung ist, dann ist $D\varphi$ in jedem Punkt a invertierbar, und es gilt

$$(D\varphi(a))^{-1} = (D\varphi^{-1})(\varphi(a)).$$

Wir können nun den folgenden Satz formulieren:

Satz 3.1. (Transformationssatz) *Es sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen U und V von \mathbb{R}^n . Dann gilt für*

¹⁷Sei z.B. $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, dann liegt die Funktion

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

nicht in $\mathcal{C}_c(U)$. Der Träger von f ist die Scheibe $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, diese ist zwar kompakt, ist aber keine Teilmenge von U .

¹⁸Zur Erinnerung, dies bedeutet:

- (1) φ ist stetig,
- (2) φ ist bijektiv,
- (3) $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ ist ebenfalls stetig.

¹⁹Auch Funktionalmatrix oder Jacobimatrix genannt.

alle $f \in \mathcal{C}_c(V)$, dass

$$\int_U f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx = \int_V f(y) dy.$$

Bemerkung. (1) Man beachte, dass wir in Korollar 2.4 den Spezialfall $U = V = \mathbb{R}^n$ und φ eine lineare Abbildung bewiesen haben.

- (2) Der Spezialfall $n = 1$ kann auch direkt mit Hilfe der Substitutionsregel aus der Analysis I bewiesen werden, siehe Übungsblatt 2.

3.2. Beweis der Transformationsformel I. Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Satz 3.1 zu. Um die Notation etwas zu vereinfachen beschränken wir uns im Beweis auf den Spezialfall, dass $U = V = \mathbb{R}^n$.

Der Beweis von Satz 3.1 besteht aus zwei Schritten:

- (1) In Kapitel 3.2 beweisen wir zuerst eine etwas schwächere Aussage als die Transformationsregel für Zackenfunktionen.
- (2) In Kapitel 3.3 verwenden wir dann die Tatsache, dass jedes $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ durch zackige Funktionen ‘beliebig gut’ approximiert werden kann.

Die Hauptarbeit steckt im Beweis des folgenden Lemmas:

Lemma 3.2. *Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung. Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann gibt es eine Funktion $\eta: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{e \searrow 0} \eta(e) = 0$, so dass für alle $e \in (0, \varepsilon)$ und $b \in L$ gilt:*²⁰

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_b \Psi_e)(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_b \Psi_e)(y) dy \right| \leq \eta(e) \cdot e^n.$$

Bemerkung. (1) Die Tatsache, dass der Faktor e^n auf der rechten Seite erscheint ist nicht überraschend, nachdem beide Integrale auf der linken Seite ‘mit e^n schrumpfen’. Das Wichtige ist also die Zusatzinformation, dass $\lim_{e \searrow 0} \eta(e) = 0$.

- (2) Die Aussage von Lemma 3.2 ist schwächer, als die Aussage, dass der Transformationssatz für Funktionen von der Form $\tau_b \Psi_e$ gilt. Wir werden dennoch, durch geschicktes Anwenden von Lemma 3.2 in Kapitel 3.3 den allgemeinen Transformationssatz auf Lemma 3.2 zurückführen können.

Die Idee für den Beweis von Lemma 3.2 ist wie folgt:

²⁰Zur Erinnerung, Ψ_e ist die um e gestreckte Zackenfunktion $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, und $\tau_b \Psi_e$ ist die Translation von Ψ_e um b .

- (1) Wenn φ eine affin-lineare Abbildung ist ²¹, dann folgt die Transformationsformel aus der Translationsinvarianz des Integrals und aus Korollar 2.4.
- (2) Für ‘kleine e ’ können wir φ durch eine affin-lineare Abbildung ‘approximieren’, durch geschicktes argumentieren, können wir zeigen, dass der ‘Fehlerterm’ nicht größer ist als $\eta(e)e^n$ wobei $\lim_{e \searrow 0} \eta(e) = 0$ ist.

Die Ausführung der Idee erfordert allerdings einen ziemlichen Aufwand.

Wir beginnen mit dem Beweis des folgenden Lemmas:

Lemma 3.3. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Funktion $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$,
- (2) ω ist monoton steigend, d.h. $\omega(t) \leq \omega(t')$ für $t \leq t'$,
- (3) für alle $x, x' \in K$ gilt:

$$|f(x) - f(x')| \leq \omega(\|x - x'\|).$$

Beispiel. Wenn f Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante C ist, dann besitzt $\omega(t) := C \cdot t$ alle gewünschten Eigenschaften.

Beweis. Die Idee ist ω so zu wählen, dass ω die ‘kleinste’ Funktion ist, für die (3) per Definition gilt, und dann zu zeigen, dass (1) und (2) auch gelten müssen.

Für $t \geq 0$ definieren wir also ²²

$$w(t) := \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in K \text{ mit } \|x - x'\| \leq t\}.$$

Dann gilt (3) per Definition und es ist auch offensichtlich, dass (2) gilt. ²³

Wir müssen also nur noch (1) zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$. Da K kompakt ist, ist f insbesondere gleichmäßig stetig, es existiert also ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per Definition gilt dann aber, dass $\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Nachdem ω monoton steigend ist und nicht negativ folgt, dass sogar $\omega(t) \in [0, \varepsilon)$ für alle $t \in [0, \delta)$. Es folgt, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$. \square

²¹D.h. eine Abbildung vom Typ

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Av + b \end{aligned}$$

wobei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$

²²Beachte, dass $w(t)$ in der Tat existiert, da stetige Funktionen auf einem kompakten Definitionsbereich beschränkt sind.

²³Weil wir für $t' \geq t$, das Supremum einer größeren Menge betrachten.

Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Lemma 3.2 zu. Es sei also $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung und es sei $L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir setzen $K := \varphi^{-1}(L)$. Nachdem φ insbesondere ein Homöomorphismus ist, ist K wiederum kompakt.

Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$|x| := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

die Maximumsnorm, man beachte, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\| \leq |x| \leq \|x\|.$$

Zudem gilt

$$(3.1) \quad \text{Supp}(\tau_b \Psi_e) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - b| \leq e\}.$$

Nachdem K und L kompakt sind, existieren insbesondere $r \geq 0$ und $s \geq 0$, so dass

$$\begin{aligned} r &\geq \sup\{|x| + 1 \mid x \in K\}, \text{ und} \\ s &\geq \sup\{|x| + 1 \mid x \in L\}. \end{aligned}$$

Es folgt insbesondere, dass

$$\begin{aligned} K &\subset K' := W(0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\} \text{ und} \\ L &\subset L' := W(0, s) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq s\}. \end{aligned}$$

Wir können dabei s so groß wählen, dass $\varphi(K') \subset L'$.

Sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, wir definieren

$$\|A\| := \sup\{|Av| \mid |v| = 1\}.$$

Man beachte, dass für $A = (a_{ij})$ gilt:

$$(3.2) \quad \|A\| \leq n \cdot \max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n\}.$$

Behauptung. Wir wählen $C \in \mathbb{R}$, so dass ²⁴

$$C \geq \text{Sup}\{\|D\varphi(a)\| \mid a \in K'\}$$

und

$$C \geq \text{Sup}\{\|D\varphi^{-1}(b)\| \mid b \in L'\}.$$

²⁴Nachdem φ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung ist, sind die Komponentenfunktionen von $D\varphi$ und $D\varphi^{-1}$ stetig, insbesondere sind sie auf den kompakten Mengen $\overline{B}(0, r)$ und $\overline{B}(0, s)$ beschränkt. Es folgt, dass

$$\text{Sup}\{\|D\varphi(a)\| \mid a \in K'\} < \infty$$

und

$$\text{Sup}\{\|D\varphi^{-1}(b)\| \mid b \in L'\} < \infty.$$

Insbesondere gibt es also solch ein C .

Dann gilt für alle $x, x' \in K'$, dass

$$(3.3) \quad \frac{1}{C}|x - x'| \leq |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq C|x - x'|.$$

Beweis. Aus der Definition der Norm einer Matrix folgt also, dass

$$(3.4) \quad |D\varphi(a)\xi| \leq C \cdot |\xi| \text{ und } |D\varphi^{-1}(b)\xi| \leq C \cdot |\xi|,$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $a \in K'$ und $b \in L'$.

Aus dem Mittelwertsatz²⁵ (siehe Analysis II, Satz 6.9) folgt, dass

$$(3.5) \quad \varphi(x') - \varphi(x) = \left(\int_0^1 D\varphi(x + t(x' - x)) dt \right) \cdot (x' - x)$$

für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Es folgt aus (3.4) und (3.5), dass²⁶

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq C \cdot |x - x'|$$

für alle $x, x' \in K'$, ganz analog, gilt auch

$$|\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y')| \leq C \cdot |y - y'|$$

für alle $y, y' \in L'$. Nachdem $\varphi(K') \subset L'$ folgt auch, dass

$$|x - x'| \leq C \cdot |\varphi(x) - \varphi(x')|$$

für alle $x, x' \in K'$. □

Für $a \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda_a : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi(a) + D\varphi(a) \cdot (x - a), \end{aligned}$$

d.h. λ_a ist die 'best-mögliche' Approximation von φ durch eine affine Abbildung am Punkt a . Aus der Wahl von C und aus dem Beweis der obigen Behauptung folgt, dass auch folgende Ungleichung gilt:

$$(3.6) \quad \frac{1}{C}|x - x'| \leq \underbrace{|\lambda_a(x) - \lambda_a(x')|}_{D\varphi(a)(x-x')} \leq C|x - x'|$$

²⁵Zur Erinnerung, dieser besagt Folgendes:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $x \in U$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x + tv \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$f(x + v) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + tv) dt \right) \cdot v.$$

²⁶Hier verwenden wir, dass die Strecke zwischen x und x' in $\overline{B(0, r)}$ liegt, und wir daher für alle Punkte auf der Strecke eine Abschätzung für die Norm des Differentials besitzen.

für alle $x, x' \in K'$ und $a \in K'$.

Nachdem wir die Transformationsformel für affin-lineare Abbildungen schon bewiesen haben, wollen wir jetzt φ und λ_a vergleichen.

Behauptung. Es existiert eine monotone Funktion $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{e \searrow 0} \omega(e) = 0$, so dass

$$(3.7) \quad |\varphi(x) - \lambda_a(x)| \leq \omega(|x - a|) \cdot |x - a|$$

für alle $x \in K'$ und $a \in K'$.

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz (3.5) und der Definition von λ_a folgt, dass

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda_a(x) &= \varphi(x) - \varphi(a) + \varphi(a) - \lambda_a(x) \\ &= \left(\int_0^1 D\varphi(a + t(x - a)) dt \right) (x - a) - D\varphi(a)(x - a) \\ &= \left(\int_0^1 D\varphi(a + t(x - a)) - D\varphi(a) dt \right) (x - a). \end{aligned}$$

Wir wenden nun Lemma 3.3 auf die Funktionen

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (i, j)\text{-Komponente von } D\varphi(x) \end{aligned}$$

an und erhalten Funktionen ω_{ij} . Wir setzen

$$\omega(t) := n \max\{\omega_{ij}(t) \mid i, j = 1, \dots, n\}.$$

Die Funktion $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist monoton mit $\lim_{e \searrow 0} \omega(e) = 0$, und es folgt aus (3.2), dass

$$|\varphi(x) - \lambda_a(x)| \leq \omega(|x - a|) \cdot |x - a|$$

für alle $x \in K'$ und $a \in K'$. □

Sei nun $b \in L$ und $e \in \mathbb{R}_+$. Wir schreiben $h_{e,b}(x) := (\tau_b \Psi_e)(x)$ und wir setzen $a := \varphi^{-1}(b)$.

Behauptung. (1) Es gilt

$$h_{e,b}(\varphi(x)) = 0 \text{ und } h_{e,b}(\lambda_a(x)) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x - a| \geq Ce.$$

(2) Es sei ω die gleiche Funktion wie in der vorherigen Behauptung. Dann gilt

$$|h_{e,b}(\varphi(x)) - h_{e,b}(\lambda_a(x))| \leq nC \cdot \omega(Ce)$$

für alle $x \in K'$ und $e > 0$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus (3.1) sowie aus den Ungleichungen (3.3) und (3.6).

Wir wenden uns nun dem Beweis der zweiten Behauptung zu. Wenn $|x - a| \geq Ce$, dann folgt aus (1), dass

$$|h_{e,b}(\varphi(x)) - h_{e,b}(\lambda_a(x))| = 0,$$

insbesondere gilt die gewünschte Ungleichung. Nehmen wir nun an, dass $|x - a| < Ce$. Man kann leicht zeigen, indem man die explizite Definition von $h_{e,b} = \tau_b \Phi_e$ verwendet, dass

$$(3.8) \quad |h_{e,b}(x) - h_{e,b}(x')| \leq \frac{n}{e}|x - x'|.$$

Aus den Ungleichungen (3.7) und (3.8) folgt nun, dass

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |h_{e,b}(\varphi(x)) - h_{e,b}(\lambda_a(x))| &\leq \frac{n}{e}|\varphi(x) - \lambda_a(x)| \\ &\leq \frac{n}{e}|x - a| \cdot \omega(|x - a|) \\ &< \frac{n}{e}Ce \cdot \omega(Ce) = nC \cdot \omega(Ce). \end{aligned}$$

□

Die folgende Behauptung impliziert nun Lemma 3.2.

Behauptung. Es existiert eine monotone Funktion $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{e \searrow 0} \eta(e) = 0$, so dass für alle $b \in L$ und $e \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} h_{e,b}(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} h_{e,b}(y) dy \right| \leq \eta(e)e^n$$

Beweis. Die Funktion

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |\det D\varphi(x)| \end{aligned}$$

ist stetig, nachdem K kompakt ist, ist diese Funktion sogar gleichmäßig stetig. Aus der vorherigen Behauptung und aus Übungsblatt 2, Aufgabe 4,²⁷ folgt nun, dass es eine monotone Funktion $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt mit $\lim_{e \searrow 0} \delta(e) = 0$, so dass für alle $b \in L$, $x \in K'$ und $e \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$|h_{e,b}(\varphi(x)) |\det(D\varphi)(x)| - h_{e,b}(\lambda_a(x)) |\det(D\varphi)(a)| | \leq \delta(e),$$

wobei $a = \varphi^{-1}(b) \in K$.

Es sei nun $e \in (0, \frac{1}{C})$. Dann folgt aus der Definition von K' , dass $W(a, Ce) \subset W(a, 1) \subset K'$ für alle $a \in K$. Es folgt nun aus Korollar 2.4 angewandt auf die affine lineare Abbildung λ_a und aus den obigen

²⁷Wir wenden die Übungsaufgabe auf $\varphi(x)$ und $\psi(x) := \lambda_a(x)$ sowie $f(y) := |\det(D\varphi)(y)|$ an.

Abschätzungen, dass

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} h_{e,b}(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} h_{e,b}(y) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h_{e,b}(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(\lambda_a(x)) |\det D\varphi(a)| dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| h_{e,b}(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| - h(\lambda_a(x)) |\det D\varphi(a)| \right| dx \\
&\leq \int_{W(a,Ce)} \left| h_{e,b}(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| - h(\lambda_a(x)) |\det D\varphi(a)| \right| dx \\
&\leq \int_{W(a,Ce)} \delta(e) dx \\
&= \delta(e) \cdot (2Ce)^n.
\end{aligned}$$

Die Funktion $\eta(e) := (2C)^n \delta(e)$, $e \in (0, \frac{1}{C})$ hat dann die gewünschten Eigenschaften. Wir haben damit die Behauptung bewiesen. \square

Der Beweis der Behauptung beschließt auch den Beweis von Lemma 3.2.

3.3. Beweis der Transformationsformel II. Wir können uns nun endlich dem Beweis des Transformationssatzes zuwenden. Zur Erinnerung, dieser lautet wie folgt:

Satz. (Transformationsatz) *Es sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen U und V von \mathbb{R}^n . Dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c(V)$, dass*

$$\int_U f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx = \int_V f(y) dy.$$

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir wieder nur den Fall $U = V = \mathbb{R}^n$. Sei nun also $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Wir setzen $L := \text{Supp}(f)$ und $K := \varphi^{-1}(L)$. Darüber hinaus sei L' ein abgeschlossener Würfel in \mathbb{R}^n , so dass

$$\overline{B(x, \sqrt{n})} \subset L' \text{ für alle } x \in L.$$

Für $e > 0$ betrachten wir wie im Beweis von Lemma 2.7 die zackige Funktion

$$f_e := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(e \cdot p) \tau_{e \cdot p} \Psi_e.$$

Behauptung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad & \lim_{e \searrow 0} \int f_e(y) dy = \int f(y) dy \\
& \lim_{e \searrow 0} \int f_e(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx = \int f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx.
\end{aligned}$$

Es folgt aus (2.5), dass $\text{Supp}(f_e) \subset L'$ für alle $e \in (0, 1]$. Nach Lemma 2.7 (siehe insbesondere Definition (2.3)) konvergieren die Funktionen für $e \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen f . Es gilt also nach Satz 2.2, dass

$$\lim_{e \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_e(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy.$$

Wir wenden uns nun dem zweiten Grenzwert zu. Die Funktion $x \mapsto |\det D\varphi(x)|$ ist stetig, und ist daher insbesondere beschränkt auf der kompakten Menge L' . Es folgt nun leicht (siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 2), dass die Funktionen

$$x \mapsto f_e(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)|$$

mit $e \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen

$$x \mapsto f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)|$$

konvergieren. Die zweite Aussage der Behauptung folgt nun wieder aus Satz 2.2. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{e \searrow 0} \eta(e) = 0$, so dass für alle $e \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_e(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_e(y) dy \right| \leq C\eta(e).$$

Nach Lemma 3.2 existiert eine Funktion $\eta : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{e \searrow 0} \eta(e) = 0$, so dass für alle $e \in (0, \varepsilon)$ und $b \in L$ gilt:

$$(3.11) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_b \Psi_e)(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_b \Psi_e)(y) dy \right| \leq \eta(e) \cdot e^n.$$

Für $e > 0$ setzen wir nun

$$M_e := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} |f(e \cdot p)|.$$

Dann folgt aus (3.11), der Definition von f_e und der Dreiecksungleichung, dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_e(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_e(y) dy \right| \leq \eta(e) \cdot e^n \cdot M_e.$$

Nachdem L kompakt ist, ist L in einem achsenparallelen Würfel mit einer Seitenlänge $s \geq 0$ enthalten. Es folgt, dass M_e höchstens $\left(\frac{s}{e} + 1\right)^n$ Summanden hat, insbesondere gilt, dass

$$M_e \leq \left(\frac{s}{e} + 1\right)^n \cdot M, \quad \text{wobei } M := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|.$$

Man beachte, dass M in der Tat definiert ist, nachdem f eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist. Die gewünschte Ungleichung folgt nun aus den obigen Diskussion, indem wir ²⁸

$$C := \sup\{e^n(\frac{S}{e} + 1)^n \mid e \in (0, \infty)\}$$

setzen. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Setzen wir nun die obigen Ergebnisse zusammen, dann erhalten wir mithilfe von (3.10), dass

$$\begin{aligned} & \left| \int f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \int f(y) dy \right| \\ &= \left| \lim_{e \searrow 0} \int f_e(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx - \lim_{e \searrow 0} \int f_e(y) dy \right| \\ &= \left| \lim_{e \searrow 0} \left(\int f_e(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| - \int f_e(y) dy \right) \right| \\ &\leq \lim_{e \searrow 0} \eta(e) \cdot C \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben damit den Transformationssatz bewiesen. \square

3.4. Beispiele. Wir beschreiben im Folgenden die drei vielleicht häufigsten Anwendungen von Satz 3.1, nämlich:

- (1) ebene Polarkoordinaten,
- (2) zylindrische Koordinaten, und
- (3) sphärische Polarkoordinaten.

3.4.1. Polarkoordinaten. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit S_α den Halbstrahl

$$S_\alpha := \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid r \in [0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Die Abbildung ²⁹

$$\begin{aligned} \Psi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi} \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, mit Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi} \rightarrow (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(\frac{y}{x})), & \text{falls } x > 0, \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \arctan(\frac{y}{x})), & \text{falls } x < 0 \text{ und } y > 0, \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, -\pi + \arctan(\frac{y}{x})), & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0, \\ (y, \frac{\pi}{2}), & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ (-y, -\frac{\pi}{2}), & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

²⁸Es ist leicht zu sehen, dass die Funktion $e \mapsto e^n(\frac{S}{e} + 1)^n$ für $e > 0$ nach oben beschränkt ist.

²⁹Die Verwendung der Symbole x, y und r, φ hat mathematisch natürlich keinerlei Bedeutung.

Behauptung. Die Abbildung Ψ ist ein Diffeomorphismus³⁰, insbesondere \mathcal{C}^1 -invertierbar.

Die Abbildung Ψ ist offensichtlich eine bijektive \mathcal{C}^∞ -Abbildung. Man kann nun direkt über die oben angegebene Bestimmung von Ψ^{-1} zeigen, dass Ψ^{-1} ebenfalls eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung ist. Es ist allerdings eleganter wie folgt zu argumentieren: Es ist

$$(3.12) \quad \det D\Psi(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \neq 0$$

für alle (r, φ) im Definitionsbereich. Es folgt nun aus dem Satz von Umkehrabbildung (siehe Analysis II, Satz 7.4), dass Ψ an jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist Ψ^{-1} eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung an jedem Punkt, d.h. Ψ^{-1} ist eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Wir können also jetzt den Transformationssatz auf den Diffeomorphismus Ψ anwenden, und erhalten mit Hilfe von (3.12) folgendes Lemma:

Lemma 3.4. *Es sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi}} f(x, y) dx dy = \int_{(0, \infty) \times (-\pi, \pi)} \underbrace{f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}_{=\Psi(r, \varphi)} \cdot r d\varphi dr.$$

Bemerkung. (1) Das Lemma, so wie es jetzt formuliert und bewiesen ist, ist in der Praxis noch zu restriktiv, weil wir nur stetige Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger betrachten können. Wir werden später sehen, dass diese Restriktionen nicht notwendig sind.

(2) Für $P := (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi}$ heißen $(r, \varphi) := \Psi^{-1}(x, y)$ die *Polarkoordinaten* von (x, y) . Die Polarkoordinaten haben folgende geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} r &= \text{Distanz von } P \text{ zum Ursprung } O \\ \varphi &= \text{Winkel zwischen dem Vektor } OP \text{ und der } x\text{-Achse.} \end{aligned}$$

(3) Die Definition von Ψ kann man leicht variieren um einen Diffeomorphismus zwischen einem beliebigen ‘offenen Band der Breite 2π ’ und dem Komplement eines beliebigen Halbstrahles zu finden.

³⁰Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ heißt Diffeomorphismus, wenn Ψ eine bijektive \mathcal{C}^∞ Abbildung ist, so dass die Umkehrfunktion ebenfalls eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung ist.

3.4.2. *Zylindrische Koordinaten.* Die Definition von Zylindrischen Koordinaten ist fast identisch mit der Definition von Polarkoordinaten, der einzige Unterschied ist, dass man jetzt noch ‘eine z -Koordinate’ hinzufügt.

Wir wollen dies nun mathematisch etwas präziser ausdrücken. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi} \times \mathbb{R} \\ (r, \varphi, z) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, mit Umkehrabbildung

$$(\mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(\frac{y}{x}), z), & \text{falls } x > 0, \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \arctan(\frac{y}{x}), z), & \text{falls } x < 0, y > 0, \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, -\pi + \arctan(\frac{y}{x}), z), & \text{falls } x < 0, y < 0, \\ (y, \frac{\pi}{2}, z), & \text{falls } x = 0, y > 0, \\ (-y, -\frac{\pi}{2}, z), & \text{falls } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

In diesem Falle ist

$$\det D\Psi(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Wie im Falle der Polarkoordinaten kann man leicht zeigen, dass Ψ wiederum ein Diffeomorphismus ist. Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus S_{-\pi} \times \mathbb{R}$ heißen $\Psi^{-1}(x, y, z)$ die *Zylinderkoordinaten* von (x, y, z) .

3.4.3. *Sphärische Koordinaten.* Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ r \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bildmenge von Ψ ist das Komplement einer Halbebene in \mathbb{R}^3 , genauer gesagt, die Bildmenge ist

$$\text{Im}(\Psi) = \{(x, y, z) \mid y \neq 0 \text{ oder } x > 0\}.$$

Man kann leicht verifizieren, dass Ψ eine Bijektion ist. Zudem gilt für alle (r, φ, θ) , dass

$$\det D\Psi = r^2 \cos \theta,$$

dies ist ungleich Null für alle (r, φ, θ) im Definitionsbereich. Wie im Falle der Polarkoordinaten kann man leicht zeigen, dass Ψ wiederum ein Diffeomorphismus ist.

Für $P = (x, y, z) \in \text{Im}(\Psi)$ heißen $(r, \varphi, \theta) := \Psi^{-1}(x, y, z)$ die *sphärischen Koordinaten* (oder *Kugelkoordinaten*) von (x, y, z) . Wir bezeichnen mit $P' = (x, y, 0)$ die Projektion von P auf die xy -Ebene. Die Kugelkoordinaten haben dann folgende geometrische Interpretation:

- r = Distanz von P zum Ursprung O
- φ = Winkel zwischen dem Vektor OP' und der x -Achse
- θ = Winkel zwischen dem Vektor OP und der xy -Ebene.

4. DAS LEBESGUE-INTEGRAL FÜR HALBSTETIGE FUNKTIONEN

4.1. Die Definition von $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Bis jetzt haben wir nur das Integral für stetige Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger eingeführt. Unser Ziel ist nun Schritt für Schritt die Definition auf größere Klassen von Funktionen zu erweitern.

Die Idee ist an sich ganz einfach: wenn eine Funktion f Grenzwert einer Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ ist, dann würde man gerne $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ als $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$ definieren. Allerdings werden wir in Aufgabe 3 im 3. Übungsblatt sehen, dass diese naive Idee, im Allgemeinen, so nicht funktionieren kann.

Sprechweise. Es sei $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir sagen die Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* ∞ , wenn die Folge bestimmt gegen ∞ divergiert.

Mit dieser Sprechweise können wir jetzt folgendes Lemma aus der Analysis I formulieren:

Lemma 4.1. *Es sei $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von reellen Zahlen, dann konvergiert die Folge gegen ein eindeutig bestimmtes $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Definition. Es sei nun $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Funktion³¹ und $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Wir schreiben

$$f_k \uparrow f$$

wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Folge von reellen Zahlen $f_k(x)$ monoton steigend ist und gegen $f(x)$ konvergiert. Anders ausgedrückt, es gilt $f_k \uparrow f$, wenn f eine monoton steigende Funktionenfolge ist, welche punktweise gegen die Funktion f konvergiert.

Definition. Wir definieren $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ als die Menge aller Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_k \uparrow f$.

³¹Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist also eine Abbildung, welche jedem $x \in \mathbb{R}^n$ entweder eine reelle Zahl oder das Symbol '∞' zuordnet.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq 0, \\ 1, & \text{wenn } t \in (0, 3), \\ 0, & \text{wenn } t \geq 3. \end{cases}$$

Dann liegt f nicht in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, aber f liegt in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$, in der Tat, denn betrachten wir die Funktionen

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq 0, \\ kt, & \text{wenn } t \in (0, \frac{1}{k}), \\ 1, & \text{wenn } t \in [\frac{1}{k}, 3 - \frac{1}{k}], \\ 1 - k(t - (3 - \frac{1}{k})), & \text{wenn } t \in (3 - \frac{1}{k}, 3), \\ 0, & \text{wenn } t \geq 3 \end{cases}$$

dann ist dies eine monoton steigende Folge von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, welche gegen f punktweise konvergiert.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq 0, \\ \infty, & \text{wenn } t \in (0, 3), \\ 0, & \text{wenn } t \geq 3. \end{cases}$$

Diese Funktion liegt in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$, in der Tat, denn f ist Grenzwert der folgenden monoton steigenden Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$:

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq 0, \\ k^2 t, & \text{wenn } t \in (0, \frac{1}{k}), \\ k, & \text{wenn } t \in [\frac{1}{k}, 3 - \frac{1}{k}], \\ k - k^2(t - (3 - \frac{1}{k})), & \text{wenn } t \in (3 - \frac{1}{k}, 3), \\ 0, & \text{wenn } t \geq 3. \end{cases}$$

Sei nun $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Es sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, welche punktweise gegen f konvergiert. Die Idee ist nun $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$$

zu definieren. Aber macht das überhaupt Sinn? Ist der Grenzwert auf der rechten Seite überhaupt definiert? Zudem gibt es viele monoton steigende Folgen von Funktionen, welche gegen f konvergieren, und a

priori ist es nicht klar, dass die dazugehörigen Integrale den gleichen Grenzwert ergeben.

Es ist zum Glück leicht zu zeigen, dass der obige Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx$ existiert (siehe Übungsaufgabe 3 in Übungsblatt 3). Der folgende Satz besagt nun auch, dass der Grenzwert nicht von der Wahl der Funktionenfolge abhängt:

Satz 4.2. Sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Es seien $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zwei monoton steigende Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, welche punktweise gegen f konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k dx.$$

Wir werden den Beweis im nächsten Kapitel nachliefern. Wir bemerken aber zuerst, dass der Satz insbesondere besagt, dass folgende Definition in der Tat Sinn macht:

Definition. Sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Es sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, welche punktweise gegen f konvergiert. Wir definieren das *Lebesgue-Integral von f über \mathbb{R}^n* als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Bemerkung. Wenn $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, dann ist f die Grenzfunktion für die konstante Folge $f_k = f$, insbesondere liegt $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, und die obige Definition von $\int_{\mathbb{R}^n} f dx$ stimmt mit der bisherigen Definition des Integrals für Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ über ein.

4.2. Beweis von Satz 4.2. Für den Beweis von Satz 4.2 benötigen wir den folgenden Satz von Dini.

Satz 4.3. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und

$$f_i : K \rightarrow \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$$

eine Folge von stetigen Funktionen, welche punktweise und monoton gegen eine stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge von Funktionen auch gleichmäßig gegen f .

Zur Erinnerung

$$\begin{aligned} (f_i) \text{ konv. punktweise gegen } f &\Leftrightarrow \forall_{x \in K} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{I \in \mathbb{N}} \quad \forall_{i \geq I} \quad |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon \\ (f_i) \text{ konv. gleichmäßig gegen } f &\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{I \in \mathbb{N}} \quad \forall_{i \geq I} \quad \forall_{x \in K} \quad |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Man beachte, dass eine Funktionenfolge, welche gleichmäßig konvergiert, auch punktweise konvergiert, aber i.A. gilt der Umkehrschluß nicht.

Beweis vom Satz von Dini. O.B.d.A. können wir annehmen, dass f eine monoton steigende Funktionenfolge ist. Wir setzen

$$g_i := f - f_i,$$

dann ist $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Funktionenfolge, welche punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Wir müssen nun zeigen, dass diese Folge gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Nachdem die g_i alle nichtnegativ sind, müssen wir also folgende Aussage beweisen:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{I \in \mathbb{N}} \forall_{i \geq I} \forall_{x \in K} g_i(x) < \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nachdem $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert existiert zu jedem $x \in K$ ein $I(x) \in \mathbb{N}$, so dass

$$g_i(x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } i \geq I(x).$$

Behauptung. Es sei $x \in K$. Wir setzen $I := I(x)$. Dann existiert eine offene Umgebung U_x von x , so dass

$$g_i(x') < \varepsilon \text{ für alle } i \geq I \text{ und } x' \in U_x \cap K.$$

Nachdem g_I insbesondere im Punkt x stetig ist, existiert eine offene Umgebung U_x von x ³², so dass

$$|g_I(x') - g_I(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x' \in U_x \cap K.$$

Sei nun $i \geq I$ und $x' \in U_x \cap K$. Nachdem die Funktionenfolge g_i monoton fallend ist, gilt

$$g_i(x') \leq g_I(x') = g_I(x) + \underbrace{g_I(x') - g_I(x)}_{| \cdot | < \frac{\varepsilon}{2}} < g_I(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Diese offene Umgebung hat die gewünschte Eigenschaft, und wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Nachdem jedes $x \in K$ in U_x enthalten ist, ist $\{U_x\}_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K . Es folgt aus der Kompaktheit von K , dass man K auch durch endlich viele dieser offenen Mengen überdecken kann. D.h. es gibt $x_1, \dots, x_k \in K$, so dass

$$K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}.$$

Wir setzen nun

$$I := \max\{I(x_1), \dots, I(x_k)\}.$$

Sei nun $i \geq I$ und $x \in K$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, k\}$, so dass $x \in U_{x_j}$, und es folgt aus der obigen Behauptung, dass $g_i(x) < \varepsilon$. \square

³²Beispielsweise eine offene Menge der Form $B(x, \delta)$ für ein $\delta > 0$

Wir können nun Satz 4.2 beweisen:

Beweis von Satz 4.2. Sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und es seien $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zwei monoton steigende Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, welche punktweise gegen f konvergieren. Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k dx.$$

Behauptung. Sei $j \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k dx.$$

Um die Behauptung zu beweisen, betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\begin{aligned} h_k : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_k(x) := \min\{f_j(x), g_k(x)\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass

- (1) $h_k \leq f_j$ und $h_k \leq g_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- (2) $h_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ für alle k ,
- (3) h_k ist eine monoton steigende Funktionenfolge,
- (4) die Funktionenfolge h_k konvergiert punktweise gegen f_j .³³

Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$h_1(x) \leq h_k(x) \leq f(x),$$

d.h.

$$\text{Supp}(h_k) \subset K := \text{Supp}(h_1) \cup \text{Supp}(f) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Aus dem Satz von Dini konvergiert also die Funktionenfolge h_k gleichmäßig gegen f_j . Aus Satz 2.2 und aus der Monotonität des Integrals folgt nun, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) dx.$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Es folgt aus der Behauptung, dass auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k dx.$$

Aus der Vertauschung der Rollen von f_j und g_k folgt die umgekehrte Ungleichung, also sind beide Grenzwerte in der Tat gleich. □

³³Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen, dass $h_k(x), k \in \mathbb{N}$ gegen $f_j(x)$ konvergiert. Wenn $f_j(x) = f(x)$, dann gilt $h_k(x) = \min(f_j(x), g_k(x)) = g_k(x)$ und die Aussage folgt aus $g_k(x) \uparrow f(x)$. Wenn $f_j(x) < f(x)$, dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $g_k(x) \geq f_j(x)$ für alle $k \geq K$. Dann gilt aber auch, dass $h_k(x) = f_j(x)$ für alle $k \geq K$.

4.3. Die Definition von $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$. Es sei nun $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine Funktion und $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Wir schreiben

$$f_k \downarrow f$$

wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Folge von reellen Zahlen $f_k(x)$ monoton fallend ist und gegen $f(x)$ konvergiert.

Wir definieren nun $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ als die Menge aller Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \downarrow f$.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } t < 0, \\ 1, & \text{wenn } t \in [0, 3], \\ 0, & \text{wenn } t > 3. \end{cases}$$

Dann liegt f nicht in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ und nicht in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, aber f liegt in $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$.

Definition. Sei $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$. Es sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Funktionen, welche punktweise gegen f konvergiert. Wir definieren das *Lebesgue-Integral von f über \mathbb{R}^n* als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Ganz analog zu Satz 4.2 kann man zeigen, dass diese Definition sinnvoll ist, d.h. die Definition von $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ ist unabhängig von der Wahl der Folge f_k .

Wenn f zugleich in $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ liegt, haben wir jetzt a priori zwei verschiedene Definition für $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$, allerdings kann man zeigen, dass diese übereinstimmen. Dies folgt auch aus der unten bewiesenen Tatsache, dass $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$.

4.4. Funktionen in einer Variablen. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $a < b$ das Riemann-Integral ³⁴ $\int_a^b f(x) \, dx$ existiert. Wenn die Grenzwerte

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^0 f(x) \, dx$$

existieren, dann sagen wir *f ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf \mathbb{R}* , und wir nennen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx := \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d f(x) \, dx + \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^0 f(x) \, dx$$

³⁴Welches über Untersummen und Obersummen definiert ist, siehe Analysis I.

das *uneigentliche Riemann-Integral* von f auf \mathbb{R} .

Sei nun $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche uneigentlich Riemann-integrierbar auf \mathbb{R} ist, und welche auch in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$ liegt. Sei $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ eine Folge von Funktion, so dass $f_k \uparrow f$. Dann gilt per Definition, dass

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx}_{\text{Lebesgue-Integral}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx,$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{\text{uneigentliches Riemann-Integral}} = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d f(x) dx + \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^0 f(x) dx.$$

Wir haben also a priori zwei verschiedene Integralbegriffe für Funktionen f über $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Man beachte, dass sich diese beiden Definitionen selbst für ‘einfache’ Funktionen wie

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{wenn } x \notin (0, 1), \end{cases}$$

oder

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

auf den ersten Blick stark unterscheiden.

Zum Glück gilt allerdings folgender Satz:

Satz 4.4. *Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche uneigentlich Riemann-integrierbar auf \mathbb{R} ist, und welche in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$ liegt. Dann gilt*

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx}_{\text{Lebesgue-Integral}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{\text{uneigentliches Riemann-Integral}}$$

Sei zuerst $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Dann gibt es ein $C \geq 0$, so dass $\text{Supp}(f) \subset [-C, C]$, dann folgt leicht aus den Definitionen, dass

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx}_{\text{Lebesgue-Integral}} := \underbrace{\int_{-C}^C f(x) dx}_{\text{Riemann-Integral}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{\text{uneigentliches Riemann-Integral}}.$$

Wenn f eine beliebige stetige Funktion in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ ist, welche sowohl uneigentlich Riemann-integrierbar auf \mathbb{R} ist, als auch in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$ liegt, dann kann auch relativ leicht zeigen (wie z.B. in Aufgabe 2 (b) von Übungsblatt 3), dass die beiden Integralbegriffe übereinstimmen. Der Beweis des Satzes im allgemeinen Fall ist eine freiwillige *-Übungsaufgabe.

4.5. Eigenschaften des Integrals von Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir nun

$$\begin{aligned} x + \infty &:= \infty, \\ \infty + \infty &:= \infty, \\ x + (-\infty) &:= -\infty, \\ (-\infty) + (-\infty) &:= -\infty, \text{ sowie} \\ \infty \cdot x &:= \infty, \text{ falls } x > 0, \\ \infty \cdot x &:= -\infty, \text{ falls } x < 0. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir hierbei weder $0 \cdot \infty$ noch $\infty - \infty$ definieren.

Wir betrachten zudem \mathbb{R} wie üblich als geordnete Menge, wir erweitern diese Ordnung auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ durch folgende Definition:

$$\begin{aligned} \infty &> x, && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ x &> -\infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ \infty &> -\infty. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz 4.5. *Es seien $f, g \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt*

(1) $f + g \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx + \int_{\mathbb{R}^n} g dx,$$

(2) wenn $\lambda > 0$, dann gilt $\lambda f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f dx,$$

wenn $\lambda < 0$, dann gilt $\lambda f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx,$$

(3) falls $f \leq g$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx.$$

Die analogen Aussagen gelten auch für $f, g \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Es seien f_k und g_k Folgen von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow g$. Dann gilt auch $(f_k + g_k) \uparrow (f + g)$, d.h. $f + g \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f + g \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k + g_k \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx. \end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird ganz analog gezeigt.³⁵ Für die dritte Aussage verweisen wir auf Übungsblatt 4. \square

Unter gewissen Voraussetzungen gilt die Additivität des Integrals auch für Reihen von Funktionen. Genauer gesagt gilt folgender Satz:

Satz 4.6. *Es sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_k \geq 0$ für alle k . Wir setzen*

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k,$$

dann ist $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Beweis. Per Definition von $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen

$$f_{k1}, f_{k2}, \dots \text{ in } \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ mit } f_{ki} \uparrow f_k.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $f_{ki} \geq 0$ für alle k und i .³⁶

³⁵Woher kommt die Fallunterscheidung $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$?

³⁶In der Tat, nachdem $f_{ki} \uparrow f_k$ und nachdem $f_k \geq 0$ gilt ebenfalls, dass

$$g_{ki} := \max\{f_{ki}, 0\} \uparrow f_k$$

(a) Wir zeigen zuerst, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Wir setzen

$$g_{k0} := f_{k0} \text{ und } g_{ki} := f_{ki} - f_{k,i-1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

dann gilt ³⁷

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} f_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^j g_{ki} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_{ki} = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^i g_{k,i-k}}_{:=h_i \in C_c(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i.$$

Es gilt $g_{kj} \geq 0$ für alle k, j , insbesondere gilt auch $h_i \geq 0$ für alle i . Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} h_i$ konvergiert also monoton gegen f . Es folgt daher aus der Definition vom Integral für Funktionen in \mathcal{H}^\uparrow , dass

$$\int f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \int h_i(x) \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int h_i(x) \, dx.$$

Für alle N gilt

$$\sum_{i=0}^N h_i = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i g_{k,i-k} = \sum_{i=0}^N \underbrace{\sum_{k=0}^{N+1-i} g_{ik}}_{\leq f_i} \leq \sum_{i=0}^N f_i.$$

darüber hinaus gilt $g_{ki} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $g_{ki} \geq 0$. Wir können daher die Folgen f_{ki} durch die Folgen g_{ki} ersetzen und erhalten Funktionenfolgen mit den gewünschten Eigenschaften.

³⁷Hier verwenden wir folgende Aussage aus der Analysis I:

Es seien $a_{ki}, k, i \in \mathbb{N}$ nicht negative reelle Zahlen, so für alle k die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ki}$ konvergiert, und so dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki}$$

konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i a_{k,i-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki},$$

insbesondere konvergiert die Reihe auf der linken Seite. Der ‘naive Beweis’ besteht darin zu sagen, dass auf beiden Seiten jeder Summand a_{ij} genau einmal vorkommt, die Schwierigkeit besteht darin, diese Idee mathematisch sauber umzusetzen. Der Beweis dieser Aussage ist auch die (*)-Aufgabe von Übungsblatt 4.

Es folgt aus der Monotonie und der Linearität des Integrals und der Monotonie der Grenzwerte³⁸ von Folgen, dass die folgende gewünschte Ungleichung gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int h_i(x) \, dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int f_i(x) \, dx.$$

(b) Wir wollen nun zeigen, dass auch die umgekehrte Ungleichung gilt, d.h. wir wollen zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx.$$

Wir bemerken zuerst, dass offensichtlich für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{k=0}^N f_k \leq f,$$

Aus der Monotonie und der Linearität des Integrals folgt, dass

$$\sum_{k=0}^N \int f_k \, dx \leq \int f(x) \, dx.$$

Da dies für alle N gilt, folgt auch, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \, dx \leq \int f(x) \, dx.$$

□

Folgender Satz folgt sofort aus den Definitionen, Satz 2.1 und Korollar 2.4:

Satz 4.7. *Es $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Wir betrachten die affin-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax + b. \end{aligned}$$

Sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Dann liegt

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(\Phi(x)) \cdot |\det(A)| \end{aligned}$$

in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(x)) \cdot |\det(A)| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy.$$

³⁸D.h. wenn $a_i \leq b_i$ für alle i , und beide Folgen konvergieren, dann gilt auch $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$.

Die analoge Aussage gilt auch für $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$.

Die Aussage des Transformationssatz (Satz 3.1) gilt auch für beliebige Funktionen $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildungen φ zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n . Die allgemeine Aussage, d.h. für beliebiges φ und $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, kann allerdings nicht so leicht auf den Fall für Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ zurückgeführt werden. Wir werden daher diesen Satz erst deutlich später, und dann allerdings mit größerer Allgemeinheit, beweisen.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren erwähnen wir noch folgendes einfache Lemma. Hierbei verwenden wir für den Rest des Kapitels folgende Abkürzung $x = (x_1, \dots, x_k)$ und $y = (y_1, \dots, y_{n-k})$.

Lemma 4.8. *Es sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, und es sei $y = (y_1, \dots, y_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ fest gewählt. Dann liegt die Funktion*

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x = (x_1, \dots, x_k) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$.

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ eine Funktionenfolge mit $f_i \uparrow f$. Sei zudem $k \in \mathbb{N}$, und es sei $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ beliebig. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} g_i: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_i(x, y). \end{aligned}$$

Diese Funktionen liegen in ³⁹ $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$, die Folge ist monoton steigend und konvergiert punktweise gegen g . Es folgt, dass $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$. \square

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren:

Satz 4.9. *(Satz von Fubini) Es sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (y_1, \dots, y_{n-k}) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) dx_1 \dots dx_k \end{aligned}$$

³⁹Die Einschränkung einer stetigen Funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf eine Teilmenge (in unserem Falle $\mathbb{R}^k \times (y_1, \dots, y_{n-k})$) ist wiederum stetig, zudem ist der Schnitt einer kompakten Teilmenge von \mathbb{R}^n mit einer Teilmenge vom Typ $\mathbb{R}^k \times (y_1, \dots, y_{n-k})$ wiederum kompakt.

⁴⁰Man beachte, dass das Integral nach Lemma 4.8 definiert ist.

liegt in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^{n-k})$, und es gilt, dass

$$(4.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx}_{\in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^{n-k})} \right) dy.$$

Die analoge Aussage gilt auch für $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$.

Dieser Satz gilt per Definition für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, für Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ muss dieser Satz jedoch bewiesen werden.

Beweis. Sei zuerst $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ beliebig. Wir betrachten die Funktionen g^y, g_i^y von $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, welche definiert sind durch

$$g^y(x) := f(x, y) \text{ und } g_i^y(x) := f_i(x, y).$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.8 folgt, dass $g_i^y \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ für alle k , und dass $g_i^y \uparrow g^y$. Es folgt nun, dass $g_i^y \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$, und aus der Definition des Integrals von Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$ folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^k} g^y(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} g_i^y(x) dx.$$

Zudem gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ wegen der Monotonie der Funktionenfolge, dass

$$\int_{\mathbb{R}^k} g_i^y(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^k} g^y(x) dx.$$

Wir betrachten nun Funktionen G und G_i von \mathbb{R}^{n-k} nach \mathbb{R} , welche wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} G(y) &:= \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^k} g^y(x) dx \text{ und} \\ G_i(y) &:= \int_{\mathbb{R}^k} f_i(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^k} g_i^y(x) dx. \end{aligned}$$

Aus der obigen Diskussion folgt, dass

$$G_i \uparrow G.$$

Es ist offensichtlich, dass G_i kompakten Träger hat,⁴¹ aus der Stetigkeit von f_i folgt dann auch, dass G_i stetig⁴² ist, d.h. $G_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{n-k})$. Es folgt nun, dass

⁴¹In der Tat, nachdem der Träger von f_i kompakt ist, gibt es Quader $A \subset \mathbb{R}^k$ und $B \subset \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $\text{Supp}(f_i) \subset A \times B$. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass $G_i(y) = 0$ für alle $y \notin B$.

⁴²Diese Aussage ist intuitiv klar, eine genaue Ausführung erfordert allerdings etwas Aufwand, und wird als freiwillige Übungsaufgabe überlassen.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d(x, y) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x, y) d(x, y) \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f_i(x, y) dx \right) dy \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} G_i(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} G(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x, y) dx \right) ,
\end{aligned}$$

wobei das 1. und 4. Gleichheitszeichen nach Definition des Integrals für entsprechende Funktionen aus \mathcal{H}^\uparrow gilt, sowie das zweite Gleichheitszeichen nach der Definition des mehrdimensionalen Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. □

4.6. Halbstetige Funktionen.

Definition. (1) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *von unten halbstetig* im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, falls zu jedem $c < f(x)$ eine Umgebung U von x existiert, so dass ⁴³

$$c < f(x') \text{ für alle } x' \in U.$$

(2) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt *von oben halbstetig* im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, falls zu jedem $c > f(x)$ eine Umgebung U von x existiert, so dass

$$c > f(x') \text{ für alle } x' \in U.$$

Die Funktion f heißt auf \mathbb{R}^n von oben (bzw. unten) halbstetig, falls sie in jedem Punkt von oben (bzw. unten) halbstetig ist.

Das folgende Lemma kann man leicht mithilfe der Definitionen zeigen, und ist eine Übungsaufgabe im Übungsblatt 4.

⁴³Es ist leicht zu sehen, dass f von unten halbstetig im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist, falls zu jedem $c < f(x)$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$c < f(x') \text{ für alle } x' \in B(x, \delta).$$

Lemma 4.10. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$f \text{ stetig im Punkt } x \Leftrightarrow \begin{array}{l} f \text{ ist von unten und oben} \\ \text{halbstetig im Punkt } x. \end{array}$$

Beispiel. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Die *charakteristische Funktion* von A ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases}$$

Mithilfe der Definitionen (siehe auch Übungsblatt 4) kann man leicht zeigen:

$$\begin{array}{ll} A \text{ ist offen} & \Leftrightarrow \chi_A \text{ ist von unten halbstetig,} \\ A \text{ ist abgeschlossen} & \Leftrightarrow \chi_A \text{ ist von oben halbstetig.} \end{array}$$

Wir können nun folgende Charakterisierung von Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ formulieren und beweisen:

Satz 4.11. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Funktion. Dann gilt, $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) *f ist von unten halbstetig,*
- (2) *es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass*

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Beweis. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Funktion.

(a) Nehmen wir zuerst an, dass $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. Es existiert also eine monoton steigende Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, welche punktweise gegen f konvergiert. Es folgt insbesondere, dass $f \geq f_1$, dies impliziert wiederum, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K := \text{Supp}(f_1)$. Wir haben damit Eigenschaft (2) bewiesen.

Wir müssen noch zeigen, dass f von unten halbstetig ist. Sei also $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > c$. Nachdem $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f_k(x) > c$. Nachdem f_k stetig ist, und insbesondere von unten halbstetig, existiert eine Umgebung U von x , so dass $f_k(x) > c$ für alle $x \in U$. Nachdem $f \geq f_k$ folgt nun auch, dass $f(x) > c$ für alle $x \in U$. Wir haben damit Eigenschaft (1) bewiesen.

(b) Nehmen wir nun umgekehrt an, dass f die Eigenschaften (1) und (2) besitzt. Wir können o.B.d.A. ⁴⁴ annehmen, dass es ein $R \geq 0$ gibt, so dass

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}.$$

⁴⁴Nachdem K kompakt ist, ist K insbesondere beschränkt, es existiert also ein $R \geq 0$, so dass

$$K \subset K' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\},$$

Nachdem f von unten halbstetig ist, und nachdem f nicht negativ ist außerhalb einer kompakten Menge folgt, dass f nach unten beschränkt ist (siehe Übungsblatt 4.) Insbesondere existiert ein rationales $M \geq 0$, so dass $f(x) \geq -M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wir bezeichnen mit A die Menge aller Kugeln

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$$

wobei $a \in \mathbb{Q}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Zudem sei

$$J := \{(U_\varepsilon(a), c) \mid U_\varepsilon(a) \in A \text{ und } c \in \mathbb{Q} \\ \text{wobei } c \geq -M \text{ und } f(x) \geq c \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(a)\}.$$

Behauptung. Zu jedem $j = (U_\varepsilon(a), c) \in J$ gibt es eine Funktion g_j , so dass

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g_j(x) &= c, & \text{für alle } x \in U_{\varepsilon/2}(a), \\ \text{(b)} \quad g_j(x) &\leq f(x), & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{(c)} \quad g_j &\in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Zu also $j = (U_\varepsilon(a), c) \in J$. Wir skizzieren kurz, wie man mit mehreren Schritten eine stetige Funktion g_j mit folgenden Eigenschaften konstruieren kann:

$$\begin{aligned} \text{(\alpha)} \quad g_j(x) &= c, & \text{für alle } x \in U_{\varepsilon/2}(a), \\ \text{(\beta)} \quad g_j(x) &\leq c, & \text{für alle } x \in U_\varepsilon(a), \\ \text{(\gamma)} \quad g_j(x) &= -M, & \text{für alle } x \in K \setminus U_\varepsilon(a), \\ \text{(\delta)} \quad g_j(x) &= 0, & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus (B(0, 2R) \cup U_\varepsilon(a)). \end{aligned}$$

Die Schritte in der Definition sind nun wie folgt:

- (i) Wir definieren zunächst g_j für $x \in U_{\varepsilon/2}(a)$ und $x \in K \setminus U_\varepsilon(a)$ und $x \notin B(0, 2R) \cup U_\varepsilon(a)$ wie in (α) and (γ) und (δ) .
- (ii) Wir definieren g_j auf $U_\varepsilon(a) \setminus U_{\varepsilon/2}(a)$ und $\mathbb{R}^n \setminus (K \cup U_\varepsilon(a))$ indem wir zwischen den schon definierten Werten von g_j auf dem jeweiligen Rand interpolieren.⁴⁵

Man beachte, dass solch ein g_j stetig ist, und dass $\text{Supp}(g_j) \subset B_{2R}(0) \cup U_\varepsilon(a)$, insbesondere ist $\text{Supp}(g_j)$ beschränkt, d.h. $g_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Es folgt auch leicht aus den Eigenschaften (α) bis (δ) , dass g_j auch die gewünschten Eigenschaften (a) und (b) besitzt. Wir beschliessen damit den Beweis der Behauptung.

aber es gilt dann auch für K' , dass

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus K'.$$

Wir können also gleich annehmen, dass K ein geschlossener Ball ist.

⁴⁵Dieser letzte Schritt ist etwas vage, eine genaue Ausführung dieses Schrittes ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

Behauptung. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) \geq g_j(x) \text{ für alle } j$$

und

$$f(x) = \sup\{g_j(x) \mid j \in J\}.$$

Wir skizzieren den Beweis der Behauptung. Sei also $x \in \mathbb{R}^n$. Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition der g_j . Wir wollen nun zeigen, dass $f(x) = \sup\{g_j(x) \mid j \in J\}$. Wir müssen also zeigen, dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $j = (U_\varepsilon(a), c) \in J$ gibt mit $g_j(x) \geq f(x) - \delta$. Wir wählen zuerst ein rationales c in $(f(x) - \delta/2, f(x) - \delta)$. Da f halbstetig von unten ist, kann man nun ein rationales $a \in \mathbb{R}^n$ und ein rationales $\varepsilon > 0$ finden, so dass $(U_\varepsilon(a), c) \in J$. Die Funktion g_j hat dann die gewünschte Eigenschaft. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Man beachte, dass die Menge J abzählbar ist. Wir wählen eine Abzählung j_1, j_2, \dots von J und für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_k := \max\{g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_k}\}.$$

Die Funktionen f_k liegen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ (siehe 1. Übungsblatt Aufgabe 4) und es ist offensichtlich, dass dies eine monoton steigende Funktionenfolge ist. Aus der obigen Behauptung folgt zudem, dass $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Es folgt also, dass $f_k \uparrow f$, und wir haben damit bewiesen, dass $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$. \square

Satz 4.12. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Funktion. Dann gilt, $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) f ist von oben halbstetig,
- (2) es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 4.11 angewandt auf $-f$. \square

Aus Lemma 4.10, Satz 4.11 und Satz 4.12 erhalten wir das folgende Korollar:

Korollar 4.13. *Es gilt*

$$\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

5. VOLUMEN VON KOMPAKTEN MENGEN

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Zur Erinnerung, die *charakteristische Funktion* von A ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases}$$

Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} A \text{ ist offen} &\Leftrightarrow \chi_A \text{ ist von unten halbstetig,} \\ A \text{ ist abgeschlossen} &\Leftrightarrow \chi_A \text{ ist von oben halbstetig.} \end{aligned}$$

Sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Es folgt aus Satz 4.12, dass $\chi_K \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun das *Volumen von K* durch ^{46 47}

$$\text{Vol}_n(K) := \text{Vol}(K) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx.$$

Bemerkung. Die Definition ist vielleicht auf den ersten Blick etwas überraschend. Warum muss man so etwas offensichtliches wie ‘Volumen’ überhaupt definieren? Allerdings, wenn man sich über den Begriff Volumen Gedanken macht, sieht man, dass es gar nicht so einfach ist, einer Teilmenge des \mathbb{R}^n ein mathematisch sauber definiertes Volumen zuzuordnen. Wir werden sogar später sehen, dass es endliche Teilmengen gibt, welchen man kein Volumen zuordnen kann.

Beispiel. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen, dann folgt aus Satz 4.4, dass

$$\text{Vol}([a, b]) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x) dx = \int_a^b 1 dx = b - a.$$

Beispiel. Es seien $a_i \leq b_i, i = 1, \dots, n$ reelle Zahlen. Wir betrachten den Quader

$$Q := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, n\}.$$

Dann folgt aus n -maligem Anwenden des Satzes von Fubini (Satz 4.9), dass

$$\text{Vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Satz 5.1. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Wir betrachten die affin-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax + b. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\text{Vol}(\Phi(K)) = |\det(A)| \cdot \text{Vol}(K).$$

⁴⁶Wir schreiben normalerweise $\text{Vol}(K)$, nur wenn es unklar ist, in welchem Raum sich K befindet, dann notieren wir auch die Dimension des Raumes, d.h. wir schreiben $\text{Vol}_n(K)$.

⁴⁷Wir verwenden den Begriff ‘Volumen’ in allen Dimensionen, selbst wenn für Teilmengen des \mathbb{R}^2 der Begriff ‘Fläche’ geläufiger ist.

Beweis. Aus den Definitionen folgt, dass

$$\chi_{\Phi(K)}(\Phi(x)) = \chi_K(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn $\det(A) \neq 0$, d.h. wenn $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, dann folgt die Aussage sofort aus den Definitionen und aus dem Transformationssatz (Satz 4.7).

Wir betrachten nun den Fall, dass $\det(A) = 0$. Wir müssen zeigen, dass $\text{Vol}(\Phi(K)) = 0$. Es folgt aus den Definitionen und aus der Transformationsinvarianz des Integrals (Satz 2.1), dass

$$\text{Vol}(\Phi(K)) = \text{Vol}(A \cdot K + b) = \text{Vol}(A \cdot K).$$

Nachdem $\det(A) = 0$ existiert eine Hyperebene ⁴⁸ $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\text{Im}(A) \subset V$. Wir wählen ⁴⁹ nun eine orthogonale Matrix P mit $\det(P) = 1$, so dass $P \cdot V = \mathbb{R}^{n-1} \times 0$. Dann folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass

$$\text{Vol}(A \cdot K) = \text{Vol}(P \cdot (A \cdot K)).$$

Wir schreiben $B := P \cdot (A \cdot K)$. Es folgt aus dem Satz von Fubini (Satz 4.9), dass

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P \cdot (A \cdot K)) &= \text{Vol}(B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_B(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)}_{=0 \text{ für } x_n \neq 0 \text{ da } B \subset \mathbb{R}^{n-1} \times 0} dx_n \\ &= \int_0^0 \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_B(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Wir erhalten nun folgendes Korollar, welches eine geometrische Interpretation der Determinante einer Matrix liefert:

Korollar 5.2. *Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Wir bezeichnen mit P das Parallelotop ⁵⁰*

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in [0, 1] \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}.$$

⁴⁸D.h. ein Unterraum der Kodimension eins.

⁴⁹Es ist eine Übungsaufgabe sich zu überlegen, warum solch eine Matrix existiert.

⁵⁰Die Menge P besteht also aus der Menge aller Linearkombinationen von v_1, \dots, v_n , so dass die Linearfaktoren sich zwischen 0 und 1 bewegen. Anhand eines Bildes kann man sich leicht davon überzeugen, dass P dem von v_1, \dots, v_n aufgespannten Parallelotop (oder Parallelogramm) entspricht.

Dann gilt

$$\text{Vol}(P) := |\det(\underbrace{(v_1 \cdots v_n)}_{n \times n\text{-Matrix}})|.$$

Beweis. Wir wenden Satz 5.1 auf den Würfel

$$W := [0, 1]^n$$

an, dessen Volumen, wie oben gesehen, eins beträgt. \square

Aus Satz 4.9 folgt auch leicht folgender Satz:

Satz 5.3. (Cavalierisches Prinzip) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Für $t \in \mathbb{R}$ schreiben wir*⁵¹

$$K_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\} \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dann gilt

$$\text{Vol}_n(K) := \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(K_t) dt.$$

Es folgt insbesondere, dass zwei kompakte Teilmengen K, L im \mathbb{R}^n das gleiche Volumen besitzen, wenn alle Schnittmengen K_t und L_t das gleiche Volumen besitzen.

6. DAS ALLGEMEINE LEBESGUE–INTEGRAL

Wir haben bis jetzt das Lebesgue–Integral für Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, und allgemeiner für Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow := \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{H}^\downarrow := \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Wir werden in diesem Kapitel die Menge der Lebesgue–integrierbaren Funktionen definieren, welche u.a. \mathcal{H}^\uparrow und \mathcal{H}^\downarrow beinhaltet.

6.1. Lebesgue–integrierbare Funktionen. Bevor wir die erste, ehrfurchteinflößende Definition einführen, erinnern wir daran, dass wir in Analysis I für jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ das Supremum $\sup(A) \subset \mathbb{R}$ eingeführt haben. Wir erweitern den Supremumsbegriff nun wie folgt:

- (1) für eine nach oben unbeschränkte, nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $\sup(A) := \infty$,
- (2) wenn $A \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nichtleere Teilmenge ist, welche ∞ enthält, dann definieren wir $\sup(A) = \infty$, andernfalls definieren wir $\sup(A)$ wie üblich.

⁵¹D.h. K_t ist die Schnittmenge von K mit dem $(n-1)$ –dimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$, wobei diese Schnittmenge nun als Teilmenge des \mathbb{R}^{n-1} aufgefasst wird.

Ganz analog definieren wir natürlich auch das Infimum für jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Definition. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion, wir definieren ⁵²

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) dx := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow, \varphi \geq f \right\} \quad (\text{Oberintegral}),$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \mid \psi \in \mathcal{H}^\downarrow, \psi \leq f \right\} \quad (\text{Unterintegral}).$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, dann lassen wir \mathbb{R}^n in der Notation weg, und wir schreiben

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) dx.$$

Wir fassen einige Eigenschaften von den Ober- und Unterintegralen in einem Lemma zusammen:

Lemma 6.1. *Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zwei Funktionen, dann gilt:*

(1)

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n}^* (-f(x)) dx,$$

(2)

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) dx,$$

(3) *wenn $f \leq g$, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* g(x) dx,$$

(4) *wenn f und g nur reelle Werte annehmen, dann gilt*⁵³

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f + g dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f dx + \int_{\mathbb{R}^n}^* g dx$$

⁵²Man beachte, dass die Menge, deren Infimum wir bestimmen, nicht leer ist. In der Tat, die Funktion

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$x \mapsto \infty$$

liegt in \mathcal{H}^\uparrow (siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 1) und es gilt $f \leq g$ für alle Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ganz analog zeigt man, dass die Menge deren Supremum wir bestimmen, nicht leer ist.

⁵³Aussagen (4) und (5) wurden am 14.11. hinzugefügt.

und

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f \, dx + \int_{\mathbb{R}^{n*}} g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^{n*}} f + g \, dx,$$

(5) für alle $\lambda \geq 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda \cdot f \, dx = \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \text{ und } \int_{\mathbb{R}^{n*}} \lambda \cdot f \, dx = \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^{n*}} f \, dx.$$

Beweis. Aussagen (1) und (3) folgen leicht aus den Definitionen. Der Beweis von Aussage (2) ist skizziert auf Seite 55 von Forster, Analysis III, es ist eine Übungsaufgabe den Beweis sorgfältig auszuformulieren.

Wir wenden uns dem Beweis von Aussage (4) zu. Es seien α, β Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ mit $\alpha \geq f$ und $\beta \geq g$, dann gilt auch $\alpha + \beta \geq f + g$ und $\alpha + \beta \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ sowie

$$\int \alpha + \beta \, dx = \int \alpha \, dx + \int \beta \, dx.$$

Es folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f + g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \alpha + \beta \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \beta \, dx.$$

Nachdem diese für alle solche α und β gilt, folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f + g \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f \, dx + \int_{\mathbb{R}^n}^* g \, dx.$$

Die Aussage für die Unterintegrale wird ganz analog bewiesen.

Die letzte Aussage folgt wiederum leicht aus folgender Tatsache (siehe Übungsblatt 0): Es sei $A \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ eine Teilmenge und $\lambda \in \mathbb{R}_+$, dann gilt

$$\inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \inf(A).$$

Das Argument wird auf Seite 56 von Forster, Analysis III ausführlich ausgeführt. \square

Satz 6.2. *Es sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow$ oder $f \in \mathcal{H}^\downarrow$, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow$. Es folgt sofort aus der Definition des Oberintegrals, dass

$$(6.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

(Die sorgfältige Ausformulierung dieser Aussage ist auch Übungsaufgabe 1 in Übungsblatt 5.)

Wir wollen nun zeigen, dass $\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$. Nachdem $f \in \mathcal{H}^\uparrow$ gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow f$. Es folgt, dass

$$(6.2) \quad \int f dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{n*}} f_k dx \leq \int_{\mathbb{R}^{n*}} f dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

In der Tat,

- (1) die erste Gleichheit folgt aus der Definition von $\int f dx$,
- (2) die erste Ungleichung folgt aus der Definition des Unterintegrals und der Tatsache, dass $f_k \leq f$ und $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$,
- (3) die zweite Ungleichung folgt aus Lemma 6.1,
- (4) und die letzte Gleichheit folgt aus (6.1).

Es folgt, dass alle Ungleichungen in (6.2) Gleichheiten sein müssen, insbesondere folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Der Beweis für $f \in \mathcal{H}^\downarrow$ verläuft ganz analog. \square

Definition. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, falls

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) dx,$$

und falls dieser Wert endlich ist. Dieser Wert heißt dann das *Lebesgue-Integral von f* und wird mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \text{ oder } \int f(x) dx$$

bezeichnet. ⁵⁴

Aus Satz 6.2 folgt sofort folgendes Lemma:

Lemma 6.3.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) &\Rightarrow f \text{ Lebesgue-integrierbar} \\ f \in \mathcal{H}^\uparrow \text{ und } \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx < \infty &\Rightarrow f \text{ Lebesgue-integrierbar} \\ f \in \mathcal{H}^\downarrow \text{ und } \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx > -\infty &\Rightarrow f \text{ Lebesgue-integrierbar,} \end{aligned}$$

ferner stimmen die vorherigen Definitionen des Lebesgue-Integrals mit der obigen Definition des Lebesgue-Integrals über ein.

⁵⁴Im Folgenden sagen wir oft auch nur ‘integrierbar’ und ‘Integral’ anstatt ‘Lebesgue-integrierbar’ und ‘Lebesgue-Integral’.

Aus der Definition von Supremum und Infimum folgt sofort folgende Umformulierung von Lebesgue–Integrierbarkeit:

Lemma 6.4. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f Lebesgue–integrierbar, genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Funktionen $\varphi \in \mathcal{H}^\uparrow$ und $\psi \in \mathcal{H}^\downarrow$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$ gibt, so dass⁵⁵*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) - \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Lemma 6.5.⁵⁶

- (1) *Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, welche Lebesgue–integrierbar sind, dann ist $f + g$ Lebesgue–integrierbar, und es gilt*

$$\int f + g dx = \int f dx + \int g dx.$$

- (2) *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lebesgue–integrierbare Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda \cdot f$ Lebesgue–integrierbar, und es gilt*

$$\int \lambda \cdot f dx = \lambda \cdot \int f dx.$$

Beweis. Aus Lemma 6.1 (4) folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f + g dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f dx + \int_{\mathbb{R}^n}^* g dx$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f dx + \int_{\mathbb{R}^{n*}} g dx \leq \int_{\mathbb{R}^{n*}} f + g dx$$

Andererseits folgt aus Lemma 6.1 (2) und der Integrierbarkeit von f und g , dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n*}} f dx + \int_{\mathbb{R}^{n*}} g dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{n*}} f + g dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f + g dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f dx + \int_{\mathbb{R}^n}^* g dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n*}} f dx + \int_{\mathbb{R}^{n*}} g dx. \end{aligned}$$

Alle Ungleichungen sind also Gleichheiten, und es folgt, dass $f + g$ ebenfalls Lebesgue–integrierbar ist.

Die zweite Aussage des Lemmas folgt ebenfalls aus Lemma 6.1.⁵⁷ \square

⁵⁵Man beachte, dass $\psi \in \mathcal{H}^\downarrow$ bedeutet, dass $-\psi \in \mathcal{H}^\uparrow$, insbesondere liegt $\varphi - \psi \in \mathcal{H}^\uparrow$, d.h. das Integral von $\varphi - \psi$ ist in der Tat definiert.

⁵⁶Dieses Lemma wurde am 14.11. modifiziert.

⁵⁷Für $\lambda > 0$ ist das offensichtlich, aber wie beweist man den Fall $\lambda < 0$ mithilfe von Lemma 6.1?

6.2. Das Riemann–Integral und das Lebesgue–Integral. Das Riemann–Integral für Funktionen einer Variablen wurde über Approximationen durch Treppenfunktionen eingeführt. Wir werden jetzt sehen, dass man diese Definition leicht auf Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erweitern kann.

Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion der Form

$$\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \cdot \chi_{Q_k},$$

wobei $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ und Q_1, \dots, Q_m achsenparallele beschränkte Quader im \mathbb{R}^n sind.⁵⁸ Wir sagen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist *Riemann–integrierbar*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \chi_{Q_i} \quad \text{und} \quad \psi = \sum_{j=1}^l d_j \cdot \chi_{R_j},$$

gibt, so dass

$$(1) \quad \varphi \leq f \leq \psi, \quad \text{und}$$

$$(2)$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^l d_j \cdot \text{Vol}(R_j)}_{\text{‘Obersumme’}} - \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i \cdot \text{Vol}(Q_i)}_{\text{‘Untersumme’}} < \varepsilon.$$

Bemerkung. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Nach Analysis I, Satz 14.1 ist die obige Definition von Riemann–Integrierbarkeit äquivalent zur Definition von Riemann–Integrierbarkeit, welche wir in Analysis I gegeben haben.

Satz 6.6. *Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann–integrierbare Funktion, dann ist f auch Lebesgue–integrierbar.*

Beweis. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann–integrierbare Funktion. Wir wollen das Kriterium von Lemma 6.4 anwenden, um zu zeigen, dass f auch Lebesgue–integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es Treppenfunktionen

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \chi_{Q_i} \quad \text{und} \quad \psi = \sum_{j=1}^l d_j \cdot \chi_{R_j},$$

gibt, so dass

$$(1) \quad \varphi \leq f \leq \psi, \quad \text{und}$$

⁵⁸Für $n = 1$ erhält man den gleichen Begriff der Treppenfunktion wie in Analysis I.

(2)

$$\sum_{j=1}^l d_j \cdot \text{Vol}(R_j) - \sum_{i=1}^k c_i \cdot \text{Vol}(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt aus Lemma 6.5 und Satz 4.11 sowie Satz 4.12, dass φ und ψ Lebesgue-integrierbar⁵⁹ sind, mit

$$\int \varphi dx = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \text{Vol}(Q_i) \text{ sowie } \int \psi dx = \sum_{j=1}^l d_j \cdot \text{Vol}(R_j).$$

Aus der Lebesgue-Integrierbarkeit von φ und ψ folgt insbesondere die Existenz von $\alpha \in \mathcal{H}^\downarrow$ und $\beta \in \mathcal{H}^\uparrow$ mit $\alpha \leq \varphi$ und $\psi \leq \beta$, so dass

$$\int \varphi - \alpha dx < \frac{\varepsilon}{4} \text{ und } \int \beta - \psi dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Es folgt, dass $\alpha \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq \beta$ und

$$\int \beta - \alpha dx = \int \beta - \psi dx + \int \psi - \varphi dx + \int \varphi - \alpha dx < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Aus Lemma 6.4 folgt nun, dass f Lebesgue-integrierbar ist. \square

6.3. Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, welche nicht Riemann-integrierbar ist. Jede Riemann-integrierbare Funktion ist also auch Lebesgue-integrierbar. Vergleicht man die Definition von Riemann-integrierbar mit dem Kriterium von Lemma 6.4 ist es offensichtlich, dass man im Kriterium für Lebesgue-Integrierbarkeit mehr Freiheiten hat, weil man eine gegebene Funktion nicht nur durch Treppenfunktionen approximieren kann, sondern durch beliebige Funktion in \mathcal{H}^\uparrow bzw. \mathcal{H}^\downarrow . Das folgende Lemma gibt ein Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, welche nicht Riemann-integrierbar ist.

Lemma 6.7. *Die Funktion*

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

ist Lebesgue-integrierbar aber nicht Riemann-integrierbar.

Wir sehen also, dass selbst ‘ziemlich wilde’ Funktionen Lebesgue-integrierbar sind. Es stellt sich die Frage, ob jede beschränkte Funktion, welche auf einer kompakten Menge definiert ist, Lebesgue-integrierbar ist. Wir werden auf diese Frage später noch einmal zurück kommen.

⁵⁹Die Funktionen φ und ψ können jeweils als Summe von Funktionen in \mathcal{H}^\uparrow und \mathcal{H}^\downarrow geschrieben werden. Welche von den Summanden von φ und ψ liegen in \mathcal{H}^\uparrow , und welche in \mathcal{H}^\downarrow ?

Beweis. Wir haben schon in Analysis I gesehen, dass diese Funktion nicht Riemann-integrierbar ist. Der Grund ist, dass jede Obersumme mindestens den Wert Eins annimmt, während jede Untersumme genau Null ist.

Wir werden jetzt zeigen, dass g Lebesgue-integrierbar ist. Wir wollen wiederum das Kriterium von Lemma 6.4 anwenden, um zu zeigen, dass g Lebesgue-integrierbar ist. Die Schwierigkeit dabei ist geeignete Funktionen in \mathcal{H}^\uparrow zu finden.

- (1) Es sei z_0, z_1, z_2, \dots eine Abzählung der abzählbaren Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Für jedes $\rho > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$g_{\rho,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in (z_n - 2^{-n}\rho, z_n + 2^{-n}\rho), \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Diese Funktionen ist also eine charakteristische Funktion von einem endlichen offenen Intervall. Nach Satz 4.11 liegt diese Funktion in \mathcal{H}^\uparrow .

- (2) Wir setzen

$$g_\rho := \sum_{n=0}^{\infty} g_{\rho,n}.$$

Dann ist $g_\rho \geq f$, denn für jedes $z \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $z_n = z$, und daher $g_\rho(z) \geq g_{\rho,n}(z_n) = 1 = f(z)$.

- (3) Nach Satz 4.6 liegt $g_\rho \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\rho dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_{\rho,n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2\rho \cdot \frac{1}{2^n} = 2\rho \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4\rho.$$

- (4) Wir wenden nun das Kriterium von Lemma 6.4 an, um zu zeigen, dass g Lebesgue-integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann haben $\psi := g_{\varepsilon/8} \in \mathcal{H}^\uparrow$ und $\varphi := 0 \in \mathcal{H}^\downarrow$ die gewünschten Eigenschaften.

□

6.4. Das uneigentliche Riemann-Integral und das Lebesgue-Integral.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0, \\ \frac{(-1)^k}{k}, & \text{wenn } x \in (k, k+1] \text{ für } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

In der *-Aufgabe von Übungsblatt 5 werden wir sehen, dass

- (1) das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existiert, aber

- (2) dass f nicht Riemann–integrierbar ist, und in der Tat
 (3) sogar nicht Lebesgue–integrierbar ist.

Es ist eine gute Übung sich davon zu überzeugen, dass dies *nicht* im Widerspruch zu den Aussagen in Kapitel 4.4 und Kapitel 6.2 ist.

6.5. Zusammenfassung der Definition des Lebesgue–Integrals.

Wir wollen kurz innehalten, und uns noch einmal die drei Schritte in der Definition von Lebesgue–integrierbarkeit in Erinnerung bringen.

Stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Sei zunächst $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, d.h. f ist eine stetige Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dann gibt es einen achsenparallelen Quader von der Form

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \quad \text{wobei } I_k = [a_k, b_k], k = 1, \dots, n,$$

so dass $\text{Supp}(f) \subset Q$. Wir definieren dann das Lebesgue–Integral von f über \mathbb{R}^n iterativ durch n Riemann–Integrale in einer Variablen wie folgt:

$$\int_Q f(x) dx := \int_{x_n=a_n}^{x_n=b_n} \cdots \int_{x_2=a_2}^{x_2=b_2} \int_{x_1=a_1}^{x_1=b_1} \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{\substack{x_2, \dots, x_n \text{ konst.} \\ \text{d.h. Funktion in } x_1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{x_3, \dots, x_n \text{ konst.} \\ \text{d.h. Funktion in } x_2}}$$

Man beachte, dass die jeweiligen Riemann–Integrale in einer Variablen existieren, nachdem die jeweiligen Funktionen stetig sind und auf einem kompakten Intervall definiert sind.

Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$. Wir haben $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ definiert als die Menge aller Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_k \uparrow f$.

Es sei nun $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_k \uparrow f$. Dann haben wir das Lebesgue–Integral von f definiert als der Grenzwert der Integrale von den Funktionen f_k , d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \in \mathbb{R} \cup \infty$$

In Satz 4.2 haben wir bewiesen, dass diese Definition von $\int f dx$ nicht von der Wahl der Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abhängt. Ganz analog haben wir $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ eingeführt.

Lebesgue-integrierbare Funktionen. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, falls das Oberintegral und das Unterintegral übereinstimmen, und beide einen endlichen Wert annehmen. Die Definition vom Oberintegral und Unterintegral ist dabei wie folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* f(x) dx := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{H}^\uparrow, \varphi \geq f \right\} \quad (\text{Oberintegral}),$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n*}} f(x) dx := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \mid \psi \in \mathcal{H}^\downarrow, \psi \leq f \right\} \quad (\text{Unterintegral}).$$

6.6. Eigenschaften des Lebesgue-Integrals. Unser Ziel ist es nun weitere Eigenschaften von Lebesgue-integrierbaren Funktionen zu studieren. Dazu bietet es sich allerdings an, zuerst eine alternative Formulierung von Lebesgue-Integrierbarkeit einzuführen. Wir werden dabei folgende Notation verwenden:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) = \text{Alle Funktionen } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

$$\mathfrak{F}_+(\mathbb{R}^n) = \text{Alle Funktionen } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Für $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\|f\|_{L_1} := \int_{\mathbb{R}^n}^* |f(x)| dx \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Wir nennen $\|f\|_{L_1}$ die *L_1 -Pseudonorm von f* .⁶⁰ Diese wird im weiteren Verlauf der Vorlesung eine wichtige Rolle spielen.

Folgender Satz folgt nun leicht aus Lemma 6.1:

Satz 6.8. *Die Funktion $\| \cdot \|_{L_1}$ ist eine Pseudonorm auf $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$, d.h. es gilt*

$$\|\lambda f\|_{L_1} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L_1}, \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\|f + g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}, \quad \text{für alle } f, g \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n).$$

Zudem gilt

$$|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_1}.$$

Aus Satz 6.2 folgt zudem, dass für $f \geq 0$ mit $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ oder $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $\|f\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}^n} f dx$.

⁶⁰Eine Norm auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$,
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

Eine *Pseudonorm* ist eine Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche die Eigenschaften (2) und (3), aber nicht notwendigerweise (1) erfüllt.

Satz 6.9. Es sei $f_k \in \mathfrak{F}_+(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen, so gilt ⁶¹

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_{L_1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L_1}.$$

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n}^* f_k \, dx.$$

Es genügt dabei zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in \mathcal{H}^\uparrow$ gibt, so dass

- (1) $\varphi \geq \sum_{k=0}^{\infty} f_k$,
- (2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n}^* f_k \, dx + \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir finden das gewünschte φ wie folgt. Aus der Definition des Oberintegrals folgt, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\varphi_k \in \mathcal{H}^\uparrow$ gibt, mit $\varphi_k \geq f_k$, und so dass ⁶²

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}^* f_k(x) \, dx + 2^{-k} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus Satz 4.6, folgt, dass

$$\varphi := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \in \mathcal{H}^\uparrow.$$

⁶¹Hier verwenden wir folgende Konvention: Es sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, so dass $x_k = \infty$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, dann definieren wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k := \infty.$$

Wenn hingegen alle x_k in \mathbb{R}_+ liegen, dann definieren wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

wie in Analysis I.

⁶²Zur Erinnerung: Es gilt $s = \sup(A)$ genau dann, wenn s eine obere Schranke für A ist, und wenn es zu jedem $\eta > 0$ ein $a \in A$ gibt, mit $a < s + \eta$.

Zudem gilt $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, und wiederum aus Satz 4.6, folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \, dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n}^* f_k(x) \, dx + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\varepsilon}{2}}_{=\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n}^* f_k \, dx + \varepsilon.$$

□

Wir können jetzt folgendes Kriterium für Lebesgue-Integrierbarkeit formulieren und beweisen:

Satz 6.10. *Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Dann gilt*

$$\begin{array}{l} f \text{ ist Lebesgue} \\ \text{integrierbar} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \\ \text{mit } \|f - g\|_{L_1} < \varepsilon. \end{array}$$

Anders ausgedrückt, eine Funktion f ist Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn f beliebig nahe, bezüglich der $\| \cdot \|_{L_1}$ -Pseudonorm, durch Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ approximiert werden kann.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass f integrierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren Funktionen $\psi \in \mathcal{H}^\downarrow$ und $\varphi \in \mathcal{H}^\uparrow$ mit

- (1) $\psi \leq f \leq \varphi$, und
- (2) $\int \varphi - \psi \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nachdem $0 \leq \varphi - f \leq \varphi - \psi$ folgt aus Satz 6.8, dass ⁶³

$$\|\varphi - f\|_{L_1} \leq \|\varphi - \psi\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi - \psi \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits folgt aus der Definition des Integrales für Funktionen aus \mathcal{H}^\uparrow die Existenz einer Funktion $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $g \leq \varphi$ und

$$\|\varphi - g\|_{L_1} = \int \varphi - g \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus der Dreiecksungleichung für $\| \cdot \|_{L_1}$ folgt also, dass

$$\|f - g\|_{L_1} \leq \|f - \varphi\|_{L_1} + \|\varphi - g\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nehmen wir nun, dass es zu jedem $\eta > 0$ ein $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gibt, mit $\|f - g\|_{L_1} < \eta$. Wir wollen mithilfe von Lemma 6.4 zeigen, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es zwei Funktionen $\varphi \in \mathcal{H}^\uparrow$ und $\psi \in \mathcal{H}^\downarrow$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$ gibt, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi - \psi \, dx < \varepsilon.$$

⁶³Hier verwenden wir, dass für eine Funktion $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$ gilt, dass $\int f \, dx = \|f\|_{L_1}$.

Nach Voraussetzung existiert ein $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\|f - g\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dies wiederum heißt, dass es ein $h \in \mathcal{H}^\uparrow$ gibt, so dass

$$|f - g| \leq h \text{ und } \int h \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen nun

$$\psi := g - h \text{ und } \varphi := g + h.$$

Nachdem $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathcal{H}^\uparrow$ folgt, dass $\psi \in \mathcal{H}^\downarrow$ und $\varphi \in \mathcal{H}^\uparrow$. Aus $|f - g| \leq h$ folgt zudem, dass $\psi \leq f \leq \varphi$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi - \psi \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \, dx < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Satz 6.11. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion und es sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L_1} = 0 \Rightarrow \int f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, dx.$$

Beweis. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion und es sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L_1} = 0.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\int f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, dx.$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\|f - f_k\|_{L_1} < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Sei nun $k \geq K$. Wir wollen zeigen, dass

$$\left| \int f \, dx - \int f_k \, dx \right| < \varepsilon.$$

Per Definition von der Pseudonorm $\| \cdot \|_{L_1}$ existiert ein $h_k \in \mathcal{H}^\uparrow$, mit

$$|f - f_k| \leq h_k \text{ und } \int h_k \, dx < \varepsilon.$$

Aus $f_k - h_k \leq f \leq f_k + h_k$ folgt, dass

$$\int f_k - h_k \, dx \leq \int f \, dx \leq \int f_k + h_k \, dx.$$

Nachdem $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ können wir Satz ⁶⁴ 4.5 anwenden und erhalten, dass

$$-\int h_k dx \leq \int f dx - \int f_k dx \leq \int h_k dx,$$

d.h.

$$\left| \int f dx - \int f_k dx \right| \leq \int h_k dx < \varepsilon.$$

□

Wir definieren nun

$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) :=$ Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 6.12. *Es seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt*

(1) $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int \lambda \cdot f dx = \lambda \cdot \int f dx,$$

(2) $f + g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f + g dx = \int f dx + \int g dx.$$

Der Satz besagt also insbesondere, dass $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ einen reellen Vektorraum bildet.

Beweis. Die Aussage des Satzes folgt sofort aus Lemma 6.5. Alternativ kann man den Satz auch mithilfe von Satz 6.10 leicht wie folgt beweisen. Nach Satz 6.10 existieren Funktionenfolgen $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L_1} = 0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \|g - g_k\|_{L_1} = 0.$$

Es folgt aus Satz 6.8, dass

$$\|(f + g) - (f_k + g_k)\|_{L_1} \leq \|f - f_k\|_{L_1} + \|g - g_k\|_{L_1}.$$

Insbesondere folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(f + g) - (f_k + g_k)\|_{L_1} = 0,$$

⁶⁴In Satz 4.5 haben wir bewiesen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx + \int_{\mathbb{R}^n} g dx \text{ wenn } f, g \in \mathcal{H}^\uparrow.$$

Wir haben diese Aussage noch *nicht* für beliebige Lebesgue-integrierbare Funktionen bewiesen.

insbesondere folgt wiederum aus Satz 6.10, dass $f + g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 6.11 und Satz 2.1 folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \int f + g \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k + g_k \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int f_k \, dx + \int g_k \, dx \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \, dx \\ &= \int f \, dx + \int g \, dx. \end{aligned}$$

Die Aussage für $\lambda \cdot f$ wird ganz ähnlich bewiesen. \square

Satz 6.13. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Wir betrachten*

$$\begin{aligned} f_+ : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_- : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt

- (1) f ist integrierbar $\Leftrightarrow f_+$ und f_- sind integrierbar
- (2) f ist integrierbar $\Rightarrow |f|$ ist integrierbar.

Beweis. Wir beweisen zuerst die erste Aussage. Wir verwenden wiederum das Integrabilitätskriterium von Satz 6.10.⁶⁵ Nehmen wir zuerst an, dass f integrierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_{L_1} < \varepsilon$. Wir definieren g_+ analog zu f_+ . Es gilt $g_+ \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und durch eine einfache Fallunterscheidung zeigt man, dass

$$|g_+(x) - f_+(x)| \leq |g(x) - f(x)| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aus der Monotonie des Integrals folgt, dass $\|g_+ - f_+\|_{L_1} \leq \|g - f\|_{L_1} < \varepsilon$. Dies zeigt, dass f_+ integrierbar ist. Ganz analog zeigt man, dass f_- integrierbar ist.

Nehmen wir nun an, dass f_+ und f_- integrierbar sind.⁶⁷ Es existieren dann Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\|f_+ - \varphi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \|f_- - \psi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

⁶⁵Zur Erinnerung, wir hatten definiert $\infty > x$ und $x > -\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

⁶⁶Die Aussage des Satzes kann man auch direkt mithilfe der Definitionen beweisen, ohne Satz 6.10 zu verwenden. Dies ist die 1. Übungsaufgabe vom 6. Übungsblatt.

⁶⁷Es ist $f = f_+ - f_-$, wir können aber nicht sofort aus Lemma 6.5 schliessen, dass f integrierbar ist, weil wir in Lemma 6.5 nur Funktionen betrachtet haben, welche nicht die Werte $\pm\infty$ annehmen.

dann folgt aber mithilfe von Satz 6.8, dass

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_{L_1} = \|f_+ - f_- - \varphi + \psi\|_{L_1} < \|f_+ - \varphi\|_{L_1} + \|f_- - \psi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt aus Satz 6.10 und aus $\varphi - \psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, dass f integrierbar ist.

Wir wenden uns nun dem Beweis der zweiten Aussage zu. Wenn f integrierbar ist, dann folgt aus (1), dass auch f_- und f_+ integrierbar sind. Den obigen Beweis kann man nun leicht modifizieren, und zeigen, dass auch $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar ist.⁶⁸ \square

Korollar 6.14. *Es seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt*

$$\max(f, g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \text{ und } \min(f, g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 6.12 und aus Satz 6.13 zusammen mit der Tatsache, dass

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und } \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

\square

Während die Summe zweier integrierbarer Funktionen wiederum integrierbar ist, ist im Allgemeinen das Produkt zweier integrierbarer Funktionen nicht integrierbar. Beispielsweise ist

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{wenn } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

integrierbar, aber das Quadrat f^2 ist nicht integrierbar.⁶⁹ Unter gewissen Voraussetzungen ist das Produkt zweier Funktionen allerdings weiterhin integrierbar:

Satz 6.15. *Es seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ zwei Funktionen. Wenn g beschränkt ist, dann ist auch das Produkt fg integrierbar.*

Beweis. Wir wollen mithilfe von Satz 6.10 zeigen, dass fg integrierbar ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem g beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wir beginnen mit einer kleiner Nebenrechnung. Es seien nun erstmal φ, ψ beliebige Funktionen, wobei $|\varphi|$ durch ein $N \in \mathbb{R}$ beschränkt ist.

⁶⁸Nachdem f_+ und f_- auch den Wert \pm annehmen können, können wir an dieser Stelle *nicht* Satz 6.12 anwenden.

⁶⁹Es ist eine Übungsaufgabe diese Aussage zu verifizieren. Man kann beispielsweise zeigen, dass $f \in \mathcal{H}^\uparrow$, und dass $\int_{\mathbb{R}^n_*} f^2 dx = \infty$.

Dann gilt, dass⁷⁰

$$|fg - \varphi\psi| = |(f - \varphi)g + \varphi(g - \psi)| \leq M|f - \varphi| + N|g - \psi|,$$

also folgt, dass

$$\|fg - \varphi\psi\|_{L_1} \leq M\|f - \varphi\|_{L_1} + N\|g - \psi\|_{L_1}.$$

Wir müssen nun also geeignete Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ finden, so dass die rechte Seite kleiner ε ist. Beispielsweise so, dass beide Summanden jeweils kleiner $\varepsilon/2$ sind.

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Beweis des Satzes zu. Sei also $\varepsilon > 0$. Da $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ existiert ein $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\|f - \varphi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Wir setzen nun

$$N := \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

nachdem $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass $N < \infty$. Weil g integrierbar ist, existiert nun ein $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|g - \psi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Aus den obigen allgemeinen Abschätzungen erhalten wir nun, dass

$$\|fg - \varphi\psi\|_{L_1} \leq M\|f - \varphi\|_{L_1} + N\|g - \psi\|_{L_1} < M\frac{\varepsilon}{2M} + N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

Nachdem $\varphi\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ folgt nun aus Satz 6.10, dass fg integrierbar ist. \square

Wir beschließen mit folgendem Satz, welchen man mithilfe von Satz 4.7 leicht beweisen kann.

Satz 6.16. *Es sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrierbar, dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(Ax + b)$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) dx = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Wir werden später auch den Transformationssatz für beliebige \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildungen beweisen (d.h. die Verallgemeinerung von Satz 3.1 auf Lebesgue-integrierbare Funktionen). Der Beweis von diesem Satz ist allerdings deutlich aufwändiger.

⁷⁰Diesen Trick hatten wir schon mehrmals angewandt, siehe z.B. den Beweis in Analysis I, dass wenn a_n und b_n konvergente Folgen sind, dann ist auch $a_n b_n$ eine konvergente Folge.

6.7. Erweiterungen des Lebesgue–Integrals. Wir beschließen dieses Kapitel mit zwei einfachen Erweiterungen des Lebesgue–Integrals.

Zuerst sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Wir betrachten die Fortsetzung von f auf \mathbb{R}^n , welche wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir sagen f ist *Lebesgue–integrierbar über M* , wenn \tilde{f} Lebesgue–integrierbar ist, und wir definieren das Lebesgue–Integral von f wie folgt:

$$\int_M f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx.$$

Lemma 6.17. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist f integrierbar über K .*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass $f \geq 0$. Dann ist die oben definierte Fortsetzung \tilde{f} von oben halbstetig und liegt daher in $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$, insbesondere ist \tilde{f} integrierbar.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Nachdem f stetig ist und nachdem K kompakt, ist f insbesondere nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) \geq C$ für alle $x \in K$. Aus der obigen Betrachtung folgt nun, dass

$$\begin{aligned} K &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - C \cdot \chi_K(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \notin K, \\ f(x) - C, & \text{wenn } x \in K. \end{cases} \end{aligned}$$

integrierbar ist. Nachdem χ_K integrierbar ist, folgt aus Satz 6.12 dann auch, dass f integrierbar ist. \square

Ganz ähnlich beweist man auch folgendes Lemma:

Lemma 6.18. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist jede stetige und beschränkte Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über U .*

Zum Schluß sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $f = u + iv$ ihre Zerlegung in Real– und Imaginärteil. Wir sagen f ist *integrierbar*, wenn die (reellwertigen!) Funktionen u und v integrierbar sind und wir setzen

$$\int f dx = \int u dx + i \cdot \int v dx.$$

Es folgt leicht aus Satz 6.12, dass die Menge aller integrierbarer Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ einen komplexen Vektorraum bildet, diesen bezeichnen wir mir $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

7. MESSBARE MENGEN

7.1. Definition von messbaren Mengen. Wir können jetzt den Begriff von Volumen, welchen wir in Kapitel 5 für kompakte Mengen eingeführt hatten, auf weitere Mengen verallgemeinern:

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *messbar* (oder *integrierbar*), falls ihre charakteristische Funktion χ_M integrierbar ist. In diesem Fall bezeichnen wir mit

$$\text{Vol}(M) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M dx \in \mathbb{R}_+$$

das *Volumen* (oder auch *Lebesgue-Maß*) von M .

Beispiel. (1) In Kapitel 5 haben wir schon gesehen, dass jede kompakte Menge messbar ist.

(2) Aus Satz 4.11 folgt, dass jede beschränkte offene Menge messbar ist.

(3) In Lemma 6.7 haben wir gesehen, dass die Menge

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \text{alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1}$$

messbar ist, und dass das Lebesgue-Maß dieser Menge 0 beträgt.

Wir fassen jetzt mehrere Eigenschaften von messbaren Mengen in einem Satz zusammen:

Satz 7.1. (1) *Der Würfel $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar und es gilt*

$$\text{Vol}([0, 1]^n) = 1.$$

(2) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$x + M := \{x + m \mid m \in M\}$$

ebenfalls messbar, und es gilt

$$\text{Vol}(x + M) = \text{Vol}(M).$$

(3) *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen. Dann sind auch $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ messbar, und es gilt*

$$\text{Vol}(A \cup B) = \text{Vol}(A) + \text{Vol}(B) - \text{Vol}(A \cap B),$$

$$\text{Vol}(A \setminus B) = \text{Vol}(A) - \text{Vol}(A \cap B).$$

Insbesondere, wenn A und B disjunkt sind, dann gilt

$$\text{Vol}(A \cup B) = \text{Vol}(A) + \text{Vol}(B).$$

(4) *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen, dann gilt*

$$A \subset B \Rightarrow \text{Vol}(A) \leq \text{Vol}(B).$$

Beweis. Die erste Aussage haben wir schon in Kapitel 5 bewiesen. Aus der Translationsinvarianz des Integrals⁷¹ folgt die zweite Aussage des Satzes.

Wir wenden uns nun dem Beweis der dritten Aussage zu. Es folgt direkt aus den Definitionen, dass für die charakteristischen Funktionen die folgenden Gleichungen gelten:

- (1) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$,
- (2) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$,
- (3) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$.

Es folgt aus Satz 6.15, dass $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ integrierbar ist. Es folgt aus Satz 6.12, dass $\chi_{A \cup B}$ und $\chi_{A \setminus B}$ ebenfalls integrierbar sind. Die dritte Aussage des Satzes folgt nun aus den Definitionen und Lemma 6.5.

Schlussendlich wollen wir noch die letzte Aussage beweisen. Es seien also $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen, so dass $A \subset B$. Dann gilt

$$\text{Vol}(B) = \text{Vol}(A \cup (B \setminus A)) = \text{Vol}(A) + \text{Vol}(B \setminus A) \geq \text{Vol}(A).$$

□

Unter gewissen Voraussetzungen ist auch die Vereinigung von abzählbar vielen messbaren Mengen wieder messbar. Genauer gesagt, es gilt folgender Satz, welchen wir später beweisen werden (siehe auch Forster, Analysis III Seite 83):

Satz 7.2. *Es seien $A_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$, messbare Mengen, welche paarweise disjunkt sind⁷². Wenn*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(A_k) < \infty,$$

dann ist die Vereinigung $\cup A_k$ messbar, und es gilt

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(A_k).$$

Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass eine beschränkte Menge, welche entweder offen oder kompakt ist, messbar ist. Zudem haben wir in Satz 7.1 gesehen, dass Translationen, sowie endliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte von messbaren Mengen wieder messbar sind.

Bei dieser Fülle von Beispielen von messbaren Mengen, stellt sich folgende Frage:

⁷¹D.h. aus Satz 6.16 angewandt auf $A = \text{id}$ und $b = x$.

⁷²D.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Frage. Ist jede beschränkte Menge in \mathbb{R}^n messbar?

Wir werden diese Frage mit ‘Nein’ beantworten, allerdings müssen wir dazu eine etwas ungewöhnliche Menge konstruieren. Für die Konstruktion werden wir eine Äquivalenzrelation verwenden. Wir erinnern im Folgenden an die relevanten Definitionen.

Einschub: Äquivalenzrelationen. Es sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf X ist eine Teilmenge $M \subset X \times X$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} & (x, x) \in M, \\ (x, y) \in M & \Rightarrow (y, x) \in M, \quad (\text{Symmetrie}) \\ (x, y) \in M \text{ und } (y, z) \in M & \Rightarrow (x, z) \in M \quad (\text{Transitivität}). \end{aligned}$$

Wir schreiben im Folgenden

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x, y) \in M,$$

und wir sagen x und y sind *äquivalent*. Mithilfe dieser Notation können wir die obigen definierenden Eigenschaften wie folgt umformulieren: \sim ist eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$\begin{aligned} & x \sim x \\ x \sim y & \Rightarrow y \sim x \\ x \sim y \text{ und } y \sim z & \Rightarrow x \sim z. \end{aligned}$$

Beispiel. (1) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x - y) \in 5\mathbb{Z}.$$

Man kann nun leicht nachprüfen, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} ist.

(2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Q},$$

dies ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} .

(3) Es sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Für $x, y \in X$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Q},$$

dies ist eine Äquivalenzrelation auf X .

(4) Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G . Dann ist

$$x \sim y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G .

Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Eine *Äquivalenzklasse* ist eine Teilmenge $Y \subset X$, so dass gilt

- (1) wenn $z \sim y$ für ein $y \in Y$, dann gilt $z \in Y$,
- (2) für alle $y, y' \in Y$ gilt: $y \sim y'$.

In den Übungen werden wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 7.3. *Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist, d.h.*

- (i) jedes $x \in X$ liegt in einer Äquivalenzklasse,
- (ii) wenn A und B Äquivalenzklassen sind, dann gilt entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.

Im Folgenden sagen wir, dass $y \in X$ ein *Repräsentant* der Äquivalenzklasse Y ist, wenn gilt $y \in Y$. Wenn y ein Repräsentant ist, dann sieht man leicht, dass

$$Y = \{z \in X \mid y \sim z\}.$$

Definition. Wir sagen A ist ein *vollständiges Repräsentantensystem*, wenn es für jede Äquivalenzklasse Y genau ein $a \in A$ gibt mit $a \in Y$.

Ein vollständiges Repräsentantensystem erhält man dadurch, dass man aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element wählt.⁷³

Beispiel. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ betrachten wir wieder die Äquivalenzrelation, welche wie folgt definiert ist:

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x - y) \in 5\mathbb{Z}.$$

Dann sind

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{7, -4, 20, -2, 19\}, \dots$$

vollständige Repräsentantensysteme.

7.2. Nichtmessbare Mengen. Wir haben nun das Werkzeug um die obige Frage mit ‘Nein’ beantworten zu können. Genauer gesagt, wir können jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz 7.4. *Für jedes $n \geq 1$ existiert eine nicht messbare beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n .*

Beweis. Wir werden den Satz nur für den Fall $n = 1$ beweisen. Den allgemeinen Fall beweist man dadurch, dass man bei allen unten genannten Mengen das Produkt mit $[0, 1]^{n-1}$ betrachtet.

Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation auf $[0, 1]$:

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{es existiert ein } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = y + q.$$

Es sei nun $A \subset [0, 1]$ ein vollständiges Repräsentantensystem. Aus der obigen Diskussion folgt, dass die Menge A folgende Eigenschaft besitzt:

⁷³Für die spitzfindigen Studenten/Studentinnen verweise ich auf:
<http://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom>

(*) für jedes $x \in [0, 1]$ existiert genau ein $a \in A$, so dass $x = a + q$ für eine rationale Zahl q .⁷⁴

Nachdem $A \subset [0, 1]$ beschränkt ist, folgt der Satz nun aus folgender Behauptung:

Behauptung. Die Menge A ist nicht messbar.

Nehmen wir an, dass A messbar ist. Wir wählen eine Abzählung q_1, q_2, \dots von den rationalen Zahlen im Intervall $[-1, 1]$. Aus Satz 7.1 folgt, dass $\text{Vol}(q_i + A) = \text{Vol}(A)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus (*) folgt, dass⁷⁵

$$(q_i + A) \cap (q_j + A) = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ folgt nun aus Satz 7.1 (2), (3) und (4), dass

$$k \cdot \text{Vol}(A) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(q_i + A) = \text{Vol}\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^k (q_i + A)}_{\subset [-1, 2]}\right) \leq \text{Vol}([-1, 2]).$$

Es folgt also, dass $\text{Vol}(A) \leq \frac{1}{k} \text{Vol}([-1, 2]) = \frac{3}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist nur möglich, wenn $\text{Vol}(A) = 0$.

Nachdem $\text{Vol}(q_i + A) = \text{Vol}(A) = 0$ und nachdem die Mengen $q_i + A, i \in \mathbb{N}$ disjunkt sind, folgt nun aus Satz 7.2, dass

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i + A)$$

messbar ist, mit Volumen 0. Andererseits folgt aus (*), dass

$$[0, 1] \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i + A).$$

Aus Satz 7.1 (4) und aus der obigen Diskussion folgt, dass

$$1 = \text{Vol}([0, 1]) \leq \text{Vol}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i + A)\right) = 0.$$

Wir haben damit einen Widerspruch herbeigeführt. \square

7.3. Weitere Eigenschaften von messbaren Mengen. Der vollständigkeit halber erwähnen wir noch folgenden Satz:

Satz 7.5. *Es sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Dann ist die Einschränkung $f|_M$ von f auf M ebenfalls integrierbar.*

Beweis. Die Fortsetzung \tilde{f} von f auf \mathbb{R}^n ist gegeben durch $f \cdot \chi_M$, und diese Funktion ist nach Satz 6.15 integrierbar. \square

⁷⁴Nachdem $x \in [0, 1]$ und $A \subset [0, 1]$ folgt, dass $|q| = |x - a| \leq 1$, d.h. q ist notwendigerweise eine rationale Zahl im Intervall $[-1, 1]$.

⁷⁵In der Tat, nehmen wir an es gibt ein $y \in (q_i + A) \cap (q_j + A)$, $i \neq j$, dann gibt es $a_i, a_j \in A$, so dass $y = q_i + a_i$ und $y = q_j + a_j$. Es gibt eine rationale Zahl r , so dass $y - r \in [0, 1]$. Es folgt, dass $y - r = (q_i - r) + a_i$ und $y - r = (q_j - r) + a_j$. Dies ist im Widerspruch zu (*) für $x = y - r$.

Aus Satz 6.16 folgt auch sofort folgendes Lemma:⁷⁶

Lemma 7.6. *Es sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Wir bezeichnen mit $\Phi(x) := Ax + b$ die dazugehörige affin-lineare Abbildung. Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist, dann ist auch $\Phi(M)$ messbar und es gilt*

$$\text{Vol}(\Phi(M)) = |\det(A)| \cdot \text{Vol}(M).$$

7.4. Nullmengen.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn M messbar ist und wenn $\text{Vol}(M) = 0$.

Folgendes Lemma erlaubt es uns die Sätze über die Pseudonorm $\| \cdot \|_{L_1}$ auf das Studium von Nullmengen anzuwenden.

Lemma 7.7. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge genau dann, wenn*

$$\|\chi_M\|_{L_1} = 0.$$

Beweis. Zur Erinnerung, es ist

$$\|\chi_M\|_{L_1} := \int_{\mathbb{R}^n}^* |\chi_M(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n}^* \chi_M(x) dx.$$

Andererseits ist es offensichtlich, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x) dx = 0.$$

Das Lemma folgt nun aus den Definitionen. □

Mithilfe dieses Lemma können wir jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz 7.8. (1) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist wiederum eine Nullmenge.*⁷⁷
 (2) *Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.*

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $N \subset M$. Dann gilt $\chi_N \leq \chi_M$. Es folgt nun aus Satz 6.8 und Lemma 7.7, dass $\text{Vol}(N) = 0$.

Wir wenden uns dem Beweis der zweiten Aussage zu. Sei also $M_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Familie von Nullmengen. Wir wollen zeigen, dass

$$M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$$

⁷⁶Genau genommen ist Satz 7.1 (2) ein Spezialfall von Lemma 7.6.

⁷⁷Warum folgt dies nicht sofort aus Satz 7.1?

ebenfalls eine Nullmenge ist. Es gilt offensichtlich, dass

$$\chi_M \leq \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{M_k},$$

und es folgt nun aus Satz 6.9 und Lemma 7.7, dass $\text{Vol}(M) = 0$. \square

Wir erhalten folgendes Korollar:

Korollar 7.9. *Jede Teilmenge einer Hyperebene in \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge.*

Beweis. Wir sagen ein achsenparalleler Quader ist *dünn*, wenn eine Seitenlänge Null ist.

- (i) Wir wissen aus Kapitel 5, dass das Volumen eines dünnen Quaders Null ist.
- (ii) Die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ kann durch abzählbare viele dünne Quader überdeckt werden können, es folgt also aus (i) und Satz 7.8 (2), dass die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.
- (iii) Sei nun $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, dann existiert eine Matrix A , so dass $A(\mathbb{R}^{n-1} \times 0) = V$ (warum?). Es folgt nun aus Lemma 7.6, dass V eine Nullmenge ist.
- (iv) Es folgt nun aus Satz 7.8 (1), dass jede Teilmenge einer Hyperebene in \mathbb{R}^n wiederum eine Nullmenge ist.

\square

Das Korollar kann wie folgt verallgemeinert werden:

Satz 7.10. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit $\dim(M) \leq n - 1$. Dann jede Teilmenge von M eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .*

Beispielsweise folgt aus dem Satz, dass die $(n - 1)$ -Sphäre

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

eine Nullmenge in \mathbb{R}^n ist.

Beweisskizze. Wir skizzieren den Beweis, dass jede Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ eine Nullmenge ist.

- (1) Es sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten den Graphen von f , d.h. die Menge

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in K \text{ und } y = f(x)\}.$$

Die Menge Γ ist kompakt⁷⁸, es folgt, dass $\chi_\Gamma \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ (siehe Kapitel 4.6). Mithilfe des Satzes von Fubini für Funktionen in

⁷⁸Warum?

$\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ (siehe Satz 4.9) folgt nun, dass

$$\text{Vol}(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Gamma(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\chi_\Gamma(x, y)}_{=0 \text{ für } y \neq f(x)} dy dx = 0.$$

- (2) Wenn $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Matrix ist und N eine Nullmenge, dann folgt aus Lemma 7.6, dass

$$A \cdot N := \{Ax \mid x \in N\}$$

ebenfalls eine Nullmenge.

- (3) Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ der Graph einer Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, K kompakt und $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann folgt aus (1) und (2), dass $A \cdot \Gamma$ eine Nullmenge ist.
- (4) Jede Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ist die Vereinigung von abzählbar vielen Teilmengen vom Typ (3). In der Tat, dies kann man beispielsweise mithilfe von Forster, Analysis II, §9, Satz 2 beweisen⁷⁹.
- (5) Der Satz folgt nun aus Satz 7.8 (2).

□

Bemerkung. In den Übungen werden wir sehen, dass wenn M eine messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, welche eine offene Menge enthält, dann gilt $\text{Vol}(M) > 0$. Anders ausgedrückt, Nullmengen können keine offene Mengen enthalten.

Folgender Satz gibt ein manchmal sehr nützliches Kriterium dafür, dass eine Teilmenge von \mathbb{R}^n eine Nullmenge ist.

Satz 7.11. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann gilt, A ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Quadern (oder Würfeln) gibt, so dass*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(Q_i) < \varepsilon.$$

Wir verweisen auf Forster, Analysis III Seite 72 für den Beweis. Wir erhalten folgendes Korollar:

Korollar 7.12. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist das Bild einer Nullmenge unter der Abbildung F wieder eine Nullmenge.*

⁷⁹Allerdings nicht ohne einen gewissen Aufwand.

Bemerkung. (1) Man beachte, dass die stetige Differenzierbarkeit von F in der Tat eine notwendige Voraussetzung ist. Beispielsweise gibt es eine surjektive stetige Abbildung⁸⁰ $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ('space filling curve'). Betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto F(x),\end{aligned}$$

dann ist Φ stetig, und das Bild der x -Achse in \mathbb{R}^2 (einer Nullmenge) ist ganz \mathbb{R}^2 (also keine Nullmenge).

(2) Mithilfe von Korollar 7.12 kann man auch einen alternativen Beweis für Satz 7.10 geben.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass $U = \mathbb{R}^n$. Es sei also $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Wir wollen zeigen, dass $F(N)$ wieder eine Nullmenge ist.

Für $l \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$K_l := \overline{B(0, l)}.$$

Dann gilt

$$F(N) = F\left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}} N \cap K_l\right) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} F(N \cap K_l).$$

Nachdem die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen wiederum eine Nullmenge ist, genügt es zu zeigen, dass $F(N \cap K_l)$ eine Nullmenge ist für alle l .

Sei nun $l \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $K := K_l$. Wir wollen Satz 7.11 anwenden, um zu zeigen, dass $F(N \cap K)$ eine Nullmenge ist. Dazu müssen wir zuerst eine Abschätzung für das Volumen von Bildern von Würfeln in K unter der Abbildung F beweisen.

Da K kompakt ist und da F eine stetig differenzierbare Abbildung ist, sind die partiellen Ableitungen von F auf K beschränkt. Es folgt aus Analysis II, Korollar 6.10, dass es ein $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$(7.1) \quad \|F(x) - F(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in K.$$

Sei nun $W \subset K$ ein Würfel der Seitenlänge a . Die maximale Differenz zweier Punkte in W ist $\sqrt{n}a$. Es folgt aus (7.1), dass $F(W)$ in einem Würfel W' der Seitenlänge $\sqrt{n}Ca$ enthalten ist. Insbesondere gilt

$$\text{Vol}(F(W)) \leq \underbrace{(\sqrt{n}C)^n}_{=: D} \text{Vol}(W).$$

⁸⁰Siehe:

http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve

Nachdem D nicht von der Wahl der Würfels in K abhängt, folgt das Korollar sofort ⁸¹ aus Satz 7.11, angewandt auf $N \cap K$ und $F(N \cap K)$. \square

7.5. Funktionen, welche fast überall gleich sind. Im Folgenden sagen wir, dass zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *fast überall gleich* sind, wenn die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Satz 7.13. *Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zwei Funktionen, welche fast überall gleich sind. Wenn f integrierbar ist, dann ist auch g integrierbar, und es gilt*

$$\int f(x) dx = \int g(x) dx$$

Es folgt also, dass die Abänderung der Werte einer integrierbaren Funktionen auf einer Nullmenge das Integral nicht ändert.

Beweis. Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zwei Funktionen, so dass

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge ist. Wir nehmen an, dass f integrierbar ist. Nach Satz 6.10 existiert dann eine Funktionenfolge $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L_1} = 0.$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned} u_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \cup \infty \\ x &\mapsto \begin{cases} \infty, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases} \end{aligned}$$

Behauptung. Die Funktion u_A ist integrierbar und es gilt $\int u_A(x) dx = 0$.

Wir setzen $g_k := \chi_A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$u_A = \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Es folgt aus Satz 6.9, dass

$$\int^* u_A(x) dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int^* g_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int \chi_A(x) dx = 0.$$

⁸¹Es ist eine gute Übung sich zu überlegen, warum dies ‘sofort’ folgt.

Andererseits gilt trivialerweise, dass

$$0 \leq \int_* u_A(x) dx.$$

Kombinieren wir die beiden Ungleichungen erhalten wir sofort, dass das Unterintegral und das Oberintegral identisch sein müssen und den Wert Null annehmen. Dies beweist die Behauptung.

Aus der Definition von u_A folgt⁸²

$$|g - f_k| \leq |f - f_k| + u_A,$$

es folgt aus Satz 6.8, dass

$$\|g - f_k\|_{L_1} \leq \|f - f_k\|_{L_1} + \|u_A\|_{L_1} = \|f - f_k\|_{L_1}.$$

Insbesondere ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - f_k\|_{L_1} = 0$, d.h. g ist nach Satz 6.10 integrierbar, und es folgt aus Satz 6.11, dass

$$\int g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx.$$

□

Wir beweisen noch zwei weitere Lemmata, welche später nützlich sein werden.

Lemma 7.14. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Dann gilt*

$$\|f\|_{L_1} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall.}$$

Beweis. Wir setzen

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}.$$

Wir nehmen zuerst an, dass A eine Nullmenge ist. Wir definieren die Funktion $u_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wie im Beweis von Satz 7.13. Dann gilt $|f| \leq u_A$, und wir erhalten, dass

$$\|f\|_{L_1} \leq \|u_A\|_{L_1} = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass $\|f\|_{L_1} = 0$. Wir setzen $f_k := f, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\chi_A \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|.$$

⁸²D.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|g(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + u_A(x).$$

Dies sieht man durch die Fallunterscheidung $x \in A$ und $x \notin A$.

Es folgt nun aus Satz 6.9, dass

$$\|\chi_A\|_{L_1} \leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \right\|_{L_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L_1} = 0.$$

Aus Lemma 7.7 folgt nun, dass A eine Nullmenge ist. \square

Lemma 7.15. *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion mit $\|f\|_{L_1} < \infty$, dann ist die Menge*

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \pm\infty\}$$

eine Nullmenge.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\chi_A \leq \varepsilon|f|$, also folgt, dass

$$\|\chi_A\|_{L_1} \leq \|\varepsilon f\|_{L_1} = \varepsilon \cdot \|f\|_{L_1}.$$

Nachdem dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt, dass $\|\chi_A\|_{L_1} = 0$. Es folgt nun aus Lemma 7.7, dass A eine Nullmenge ist. \square

Wir beschließen das Kapitel mit einer Definition. Es sei nun $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und

$$f: \mathbb{R}^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

eine Funktion. Wir sagen, dass f integrierbar ist, wenn eine beliebige Fortsetzung \tilde{f} von f auf $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrierbar ist, und wir setzen dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx.$$

Es folgt aus Satz 7.13, dass diese Definition nicht von der Wahl der Fortsetzung \tilde{f} abhängt.

7.6. Der Satz von Fubini. Der Satz von Fubini folgt für Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ aus Korollar 2.4 angewandt auf eine Permutationsmatrix. Für Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ haben wir den Satz in Satz 4.9 bewiesen. Wir können den Satz von Fubini jetzt in seiner größten Allgemeinheit formulieren und beweisen.

Satz 7.16. (Fubini) *Es sei*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

eine integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ x &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

integrierbar ist, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \, dx}_{\text{definiert für } y \in \mathbb{R}^m \setminus N} \, dy.$$

Man beachte, dass das Integral über \mathbb{R}^m auf der rechten Seite definiert ist über die Konvention, welche wir am Ende von Kapitel 7.5 eingeführt hatten.

Beweis. Die Grundidee des Beweises, wie so oft, ist den Satz für Lebesgue-integrierbare Funktionen auf den Satz für Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^m)$ bzw. in $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^m)$ zurück zu führen (siehe Satz 4.9). Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} F_* : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} & F_* : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ y &\mapsto \int_{\mathbb{R}^k}^* f(x, y) \, dx & \text{und} & & y &\mapsto \int_{\mathbb{R}^k_*} f(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

Wir wollen folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. (A) Die Funktionen F_* und F^* sind integrierbar,
(B) und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} F_*(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} F^*(y) \, dy.$$

(A) Wir wollen mithilfe von Lemma 6.4 zeigen, dass F_* und F^* integrierbar sind. Sei also $\varepsilon > 0$. Nachdem $f: \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist folgt aus Lemma 6.4, dass es Funktionen $h_* \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^{k+m})$ und $h^* \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^{k+m})$ mit $h_* \leq f \leq h^*$ gibt, so dass

$$(7.2) \quad \int h^*(x, y) \, dx \, dy - \int h_*(x, y) \, dx \, dy < \varepsilon.$$

Wir setzen

$$H^*(y) := \int_{\mathbb{R}^k} h^*(x, y) \, dx \quad \text{und} \quad H_*(y) := \int_{\mathbb{R}^k} h_*(x, y) \, dx.$$

Aus dem Satz von Fubini für Funktionen in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^m)$ (siehe Satz 4.9) folgt, dass $H^* \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^m)$, und dass

$$(7.3) \quad \int_{\mathbb{R}^{k+m}} h^*(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} h^*(x, y) \, dx}_{=H^*(y)} \, dy.$$

Eine analoge Aussage gilt für H_* und h_* .

Aus $h_* \leq f \leq h^*$ folgt ⁸³ $H_* \leq F_* \leq F^* \leq H^*$. Es folgt aus (7.2) und (7.3), dass

$$(7.4) \quad \int_{\mathbb{R}^m} H^*(y) - H_*(y) dy = \int h^*(x, y) dx dy - \int h_*(x, y) dx dy < \varepsilon.$$

Da $H^* \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^m)$ und $H_* \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^m)$ folgt nun aus Lemma 6.4, dass F_* und F^* Lebesgue-integrierbar sind.

(B) Aus $h_* \leq f \leq h^*$, und aus (7.2) sowie (7.4) folgt, dass

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^m} F^*(y) dy - \int f(x, y) dx dy \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{R}^m} F^*(y) dy - \int H^*(y) dy \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^m} H^*(y) dy - \int f(x, y) dx dy \right| \\ & \leq \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^m} H^*(y) - \int H^*(y) dy \right|}_{< \varepsilon} + \left| \int h^*(x, y) - f(x, y) dx dy \right| \\ & < \varepsilon + \underbrace{\left| \int h^*(x, y) - h_*(x, y) dx dy \right|}_{< \varepsilon} \\ & < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Nachdem diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Aussage. Ganz analog beweist man die Aussage für F_* . Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Nachdem F_* und F^* integrierbar sind, gibt es eine Nullmenge $N_1 \subset \mathbb{R}^m$, so dass

$$F_*(y) \in \mathbb{R} \text{ und } F^*(y) \in \mathbb{R} \text{ für alle } y \notin N_1.$$

Nachdem $F^* - F_* \geq 0$, und nachdem $\int F^*(y) - F_*(y) dy = 0$, folgt, dass

$$\|f\|_{L_1} = \int^* |F^* - F_*| dy = \int F^* - F_* dy = 0.$$

Aus Lemma 7.14 folgt nun, dass es eine Nullmenge $N_2 \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$F_*(y) = F^*(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^m \setminus N_2.$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus (N_1 \cup N_2)$ stimmen also die Ober- und Unterintegrale von $x \mapsto f(x, y)$ überein. Es folgt nun, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} F_*(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y) dx dy.$$

⁸³Hier verwenden wir, dass für Funktionen $H \in \mathcal{H}^\uparrow$ bzw. $H \in \mathcal{H}^\downarrow$ gilt

$$\int H dy = \int^* H dy = \int_* H dy.$$

In der Tat, die erste Gleichheit folgt aus der Definition von F_* und aus Satz 7.13, die zweite Gleichheit folgt aus der obigen Behauptung. \square

Es verbleibt nun noch ein ‘offensichtlicher Satz’, welchen wir beweisen müssen, nämlich den Transformationssatz für Lebesgue-integrierbare Funktionen. Dieser ist allerdings technisch deutlich schwieriger als der Satz von Fubini. Wir werden daher erst mehrere Vorbereitungen treffen müssen.

8. DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM

Wir haben schon folgende Eigenschaften von Nullmengen bewiesen:

- (1) jede Teilmenge von \mathbb{R} , welche aus abzählbar vielen Punkten besteht, ist eine Nullmenge,
- (2) eine Nullmenge in \mathbb{R} enthält kein offenes Intervall.

Eine Nullmenge von \mathbb{R} ist also in einem gewissen Sinne ‘klein’, und man kann sich die Frage stellen, ob vielleicht eine Nullmenge in \mathbb{R} immer abzählbar ist. Überraschenderweise ist die Antwort zu dieser Frage allerdings ‘Nein’:

Satz 8.1. *Es gibt beschränkte Nullmengen von \mathbb{R} , welche überabzählbar viele Punkte enthalten.*

Wir werden im Folgenden eine Menge C konstruieren, von der wir dann später zeigen werden, dass sie die geforderte Eigenschaft besitzt. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a \in [0, 1]$. Wir sagen

$$0.a_1a_2a_3\dots$$

ist eine n -adige Darstellung für a , wenn gilt

- (1) $a_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ für alle i ,
- (2)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i n^{-i} = a.$$

Beispielsweise gilt in der 3-adigen Darstellung, dass

$$0.1111111111\dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Die 3-adige Darstellung ist nicht eindeutig, beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.1000000000\dots \text{ aber auch} \\ \frac{1}{3} &= 0.0222222222\dots \end{aligned}$$

In gewisser Weise ist dieses Beispiel die ‘einzige Quelle’ von nicht eindeutigen n -adigen Darstellungen, die genaue Aussage ist Übungsaufgabe 1 von Übungsblatt 8. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$C_k := \begin{array}{l} \text{alle reellen Zahlen } a \text{ in } [0, 1], \\ \text{so dass } a \text{ eine 3-adige Darstellung besitzt,} \\ \text{in welcher in den ersten } k\text{-Stellen} \\ \text{nur die Ziffern 0 und 2 verwendet werden.} \end{array}$$

Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ C_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, jede Menge C_k ist die Vereinigung von 2^k abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^k}$, und man erhält C_{k+1} indem man in allen 2^k Intervallen von C_k ‘das mittlere Drittel’ entfernt.

Nachdem C_k die Vereinigung von 2^k abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^k}$ folgt, dass

$$\text{Vol}(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Wir definieren nun

$$C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Diese Menge wird die *Cantormenge* oder das *Cantorsche Diskontinuum* genannt. Es folgt direkt aus den Definitionen, dass

$$C_k := \begin{array}{l} \text{alle reellen Zahlen } a \text{ in } [0, 1], \\ \text{so dass } a \text{ eine 3-adige Darstellung besitzt,} \\ \text{in welcher nur die Ziffern 0 und 2 verwendet werden.} \end{array}$$

Die Menge C hat die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften:

Satz 8.2. *Es bezeichne C das Cantorsche Diskontinuum. Dann gilt:*

- (1) C ist kompakt,
- (2) C ist messbar und $\text{Vol}(C) = 0$,
- (3) C ist überabzählbar.

Beweis. Die Mengen C_k sind offensichtlich abgeschlossen. Nachdem der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen wiederum abgeschlossen ist, folgt, dass C ebenfalls abgeschlossen ist. Da C zudem beschränkt ist, folgt aus dem Satz von Heine–Borel, dass C kompakt

ist, insbesondere ist C messbar. Aus $C \subset C_k$ für alle k folgt zudem, dass

$$\text{Vol}(C) \leq \text{Vol}(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

für alle k . Wir erhalten also, dass $\text{Vol}(C) = 0$. Es verbleibt zu zeigen, dass C überabzählbar ist.

Wir definieren dazu eine Abbildung $\Phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Sei $x \in [0, 1]$.

1. Fall. $x \in [0, 1]$ besitzt eine 3-adige Darstellung $0.a_1a_2a_3\dots$, so dass $a_k = 1$ für mindestens ein k . Es sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $a_k = 1$. Wir definieren dann

$$\Phi(a_k) = 0.\underbrace{\frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \dots \frac{a_{k-1}}{2}}_{2\text{-adige Darstellung}} 1000\dots$$

2. Fall. Andernfalls definieren wir

$$\Phi\left(\underbrace{0.a_1a_2a_3\dots}_{3\text{-adige Darstellung}}\right) = 0.\underbrace{\frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \frac{a_3}{2} \dots}_{2\text{-adige Darstellung}}$$

Diese Funktion heißt *Cantorfunktion* oder auch *Teufelstreppe*.⁸⁴ Die Funktion Φ ist konstant auf den Intervallen, welche man jeweils vom Übergang von C_k zu C_{k+1} herausgenommen hat. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \text{ d.h. } x = 0.1a_2a_3\dots & \text{ gilt } \Phi(x) = 0.1000\dots = \frac{1}{2}, \\ \text{für } x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \text{ d.h. } x = 0.01a_3a_4\dots & \text{ gilt } \Phi(x) = 0.0100\dots = \frac{1}{4}, \\ \text{für } x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], \text{ d.h. } x = \underbrace{0.21a_3a_4\dots}_{3\text{-adig}} & \text{ gilt } \Phi(x) = \underbrace{0.1100\dots}_{2\text{-adig}} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

Die erste Aussage der folgenden Behauptung impliziert insbesondere, dass C überabzählbar ist.

Behauptung. Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften:

- (1) Φ ist surjektiv und für jedes $x \in [0, 1]$ gibt es ein $c \in C$, so dass $\Phi(c) = x$.
- (2) Φ ist monoton steigend und stetig.

Sei also $x \in [0, 1]$. Es sei

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

⁸⁴Siehe

http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function
für ein Bild des Graphen.

eine 2-adige Darstellung von x . Dann gilt

$$\Phi(\underbrace{0.(2a_1)(2a_2)(2a_3)\dots}_{3\text{-adige Darstellung}}) = \underbrace{0.a_1a_2a_3\dots}_{2\text{-adige Darstellung}} = x.$$

Nachdem $0.(2a_1)(2a_2)(2a_3)\dots$ in C liegt, folgt die erste Aussage.

Die beiden anderen Aussagen kann man leicht zeigen, nachdem diese für den Beweis des Satzes nicht notwendig sind, überlassen wir den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe. \square

9. KONVERGENZSÄTZE

Es sei $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, welche punktweise gegen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvergiert. Eine der grundlegenden Fragen ist, unter welchen Voraussetzungen an die Funktionenfolge kann man ‘Integral und Grenzwert vertauschen’?, d.h. wann gilt

$$\int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx?$$

Wir haben schon gesehen, dass dies i.A. nicht gilt, aber in diesem Kapitel werden wir mit dem Satz von Levi und dem Satz von Lebesgue zwei Kriterien für die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert beweisen.

Satz 9.1. (Satz von der monotonen Konvergenz von Levi) *Es sei $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$ eine monotone Folge integrierbarer Funktionen. Falls*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \in \mathbb{R},$$

dann ist die Grenzfunktion $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ integrierbar, und es gilt

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx.$$

Man kann diesen Satz insbesondere als Verallgemeinerung von Satz 4.2 auffassen.

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$ eine monoton steigende Folge integrierbarer Funktionen ist. Der Fall, dass f_k monoton fallend ist, kann man dann durch Betrachtung der Folge $-f_k$ auf den ersten Fall zurückführen.

(A) Wir nehmen zuerst an, dass die Funktionen f_k nur Werte in \mathbb{R} annehmen.

Wir wollen Satz 6.10 anwenden, um zu zeigen, dass f integrierbar ist.

Sei also $\varepsilon > 0$. Die Idee ist nun, f durch ein geeignetes f_m zu approximieren, und das integrierbare f_m wiederum durch eine geeignete Funktion $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Dazu müssen wir allerdings erst einmal $\|f - f_m\|_{L_1}$ abschätzen.

Es sei dazu erst einmal $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Aus Satz 6.9 folgt, dass

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_{L_1} &= \|\lim_{k \rightarrow \infty} f_k - f_m\|_{L_1} = \|\sum_{k=m}^{\infty} (f_{k+1} - f_k)\|_{L_1} \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_{L_1} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \int^* |f_{k+1} - f_k| \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \int (f_{k+1} - f_k) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_{k+1} - f_m dx \\ &= \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx}_{=: I} - \int f_m(x) dx. \end{aligned}$$

(Hier haben wir u.a. mehrmals verwendet, dass f_m eine monoton steigende Folge ist, d.h. dass $f_{k+1} - f_k \geq 0$ für alle k .) Aus der Definition des Grenzwertes von reellen Folgen folgt, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\left| I - \int f_m dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wählen zudem ein $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_m - g\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt nun aus der obigen Abschätzung, dass

$$\|f - g\|_{L_1} \leq \|f - f_m\|_{L_1} + \|f_m - g\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt also aus Satz 6.10, dass f integrierbar ist.

Zudem folgt aus der obigen Abschätzung, dass

$$\begin{aligned} |I - \int f dx| &\leq \underbrace{\left| I - \int f_m dx \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \left| \int f_m dx - \int f dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int f_m - f dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int |f_m - f| dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \|f_m - f\|_{L_1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nachdem dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die gewünschte Aussage.

(B) Wir betrachten nun den Fall, dass die Funktionen f_k auch die Werte $\pm\infty$ annehmen können. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ folgt aus Lemma 7.15, dass

$$N_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x) = \pm\infty\}$$

eine Nullmenge ist. Aus Satz 7.8 folgt, dass $N := \cup_k N_k$ ebenfalls eine Nullmenge ist. Nachdem die Abänderung einer Funktion auf einer Nullmenge weder die Integrierbarkeit noch das Integral verändert (siehe Satz 7.13), folgt die Aussage über die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus der oben bewiesenen Aussage über

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f_k(x), & \text{wenn } x \notin N, \\ 0, & \text{wenn } x \in N. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Wir haben in Satz 7.1 gesehen, dass Vereinigungen und Durchschnitte von *endlich* vielen messbaren Mengen wiederum messbar sind. Mithilfe des Satzes von Levi können wir jetzt auch verschiedene Aussagen über die Messbarkeit von Vereinigungen und Schnittmengen von *abzählbar* vielen messbaren Mengen beweisen.

Korollar 9.2. *Es sei $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge von messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n , so dass*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(A_k) < \infty,$$

dann ist

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \text{ messbar mit } \text{Vol} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(A_k).$$

Beweis. Wir betrachten

$$f_k := \chi_{A_k}.$$

Dies ist eine monoton wachsende Funktionenfolge integrierbarer Funktionen, welche gegen die charakteristische Funktion der Vereinigungsmenge konvergiert. Zudem gilt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(A_k) < \infty.$$

Die Aussage des Korollars folgt nun sofort aus Satz 9.1. □

Korollar 9.3. *Es sei $A_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ eine Folge von messbaren Teilmengen, so dass für $i \neq j$ gilt: $\text{Vol}(A_i \cap A_j) = 0$.⁸⁵ Wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Vol}(A_k) < \infty,$$

⁸⁵Insbesondere gilt das Korollar also wenn die A_k disjunkt sind.

dann ist

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \text{ messbar mit } \text{Vol} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Vol}(A_k).$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Korollar 9.2 angewandt auf die Folge

$$B_k := \bigcup_{i=1}^k A_i$$

nachdem dies eine aufsteigende Folge von messbaren ist, mit ⁸⁶

$$\text{Vol}(B_k) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i).$$

□

Korollar 9.4. *Es sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ eine absteigende Folge von messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann ist*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \text{ messbar mit } \text{Vol} \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(A_k).$$

Beweis. Wir betrachten

$$f_k := \chi_{A_k}.$$

Dies ist eine monoton fallende Funktionenfolge integrierbarer Funktionen, welche gegen die charakteristische Funktion der Schnittmenge der A_i konvergiert. Die Aussage des Korollars folgt nun sofort aus Satz 9.1. □

Satz 9.5. (Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue) *Es sei $f_k \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen, welche punktweise gegen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn es eine Funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ mit $\|F\|_{L_1} < \infty$ gibt, so dass*

$$|f_k| \leq F \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) \, dx.$$

Beweis. Die Idee des Beweises ist die Aussage auf geschickt gewählte monoton fallende bzw. monoton steigende Funktionenfolgen zurück zu führen, für welche man den Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 9.1) anwenden kann.

⁸⁶Das folgt aus Satz 7.1: dies ist offensichtlich wenn $k = 2$, wenn $k > 2$ muss man sich allerdings darüber allerdings etwas Gedanken machen (siehe Übungsblatt 8).

Wir setzen

$$g_k := \sup\{f_j \mid j \geq k\}.$$

Behauptung. Die Funktionen $g_k, k \in \mathbb{N}$ und f sind integrierbar und es gilt

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k(x) dx.$$

(A) Für $i \geq k$ setzen wir

$$g_{ki} := \sup\{f_j \mid j \in \{k, \dots, i\}\}.$$

Die Funktionen g_{ki} sind nach Korollar 6.14 integrierbar. Für festes k ist die Funktionenfolge

$$g_{kk}, g_{k,k+1}, g_{k,k+2}, \dots$$

eine monoton wachsende Folge, welche punktweise gegen g_k konvergiert. Es gilt für alle $i \geq k$, dass

$$\int g_{ki}(x) dx = \int^* g_{ki}(x) dx \leq \int^* F(x) dx = \|F\|_{L_1} < \infty.$$

Es folgt nun aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass die Funktion g_k integrierbar.

(B) Die Funktionenfolge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist offensichtlich monoton fallend und sie konvergiert gegen f . Nachdem

$$\int g_k(x) dx \geq - \int^* F(x) dx$$

folgt wiederum aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass f integrierbar ist, und dass

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k(x) dx.$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Ganz analog kann man zeigen, dass die Funktionen

$$h_k := \inf\{f_j \mid j \geq k\}$$

integrierbar sind, und dass

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k(x) dx.$$

Nachdem $h_k \leq f_k \leq g_k$ für alle k folgt, dass

$$\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx.$$

□

Anstatt das Integral einer Grenzfunktion $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ zu betrachten, wollen wir nun studieren, wie sich das Integral verhält, wenn wir den Integrationsbereich ‘als Grenzwert’ von Mengen ansehen.

Satz 9.6. *Es sei $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \supset \dots$ eine aufsteigende Folge von messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n . Wir setzen $A := \cup_{k=0}^{\infty} A_k$. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f|_{A_k}$ integrierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Wenn*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} |f(x)| dx < \infty,$$

dann ist f integrierbar über A , und es gilt

$$\int_A f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx.$$

Beweis. (A) Wir setzen f unter Beibehaltung der Bezeichnung durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fort. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} f_k: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in A_k, \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus A_k. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge f_k punktweise gegen f . Wir setzen $F := |f|$ und $F_k := |f_k|$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $F_k \uparrow F$. Nach Voraussetzung ist die Folge der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) dx = \int_{A_k} |f(x)| dx$$

beschränkt, es folgt also aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass F integrierbar ist.

(B) Nachdem $|f_k| = F_k \leq F = |f|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden, und erhalten, dass f integrierbar ist. Zudem gilt

$$\int_A f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx.$$

□

Definition. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx := \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d |f(x)| dx + \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^0 |f(x)| dx$$

existiert, dann sagen wir, dass f *uneigentlich absolut Riemann-Integrierbar* ist.

Mithilfe von Satz 9.6 kann man nun folgendes Korollar zeigen:

Korollar 9.7. *Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f uneigentlich absolut Riemann-Integrierbar ist, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

10. DIE L_p -RÄUME

10.1. Banachräume. Wir erinnern an folgende Definition aus Analysis II:

- Definition.*
- (1) Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.
 - (2) Ein normierter Vektorraum heißt *vollständig*, wenn der dazugehörige metrische Raum⁸⁷ vollständig ist.
 - (3) Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt *Banachraum*.

- Beispiel.*
- (1) Der Vektorraum \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm ist vollständig.
 - (2) In Analysis II hatten wir gesehen, dass der normierte Vektorraum

$$\begin{aligned} C([-1, 1], \mathbb{R}) &:= \text{alle stetigen Funktionen } [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \|f\| &:= \int_{-1}^1 |f(x)| dx \text{ (Integralnorm)} \end{aligned}$$

nicht vollständig ist. In der Tat, wenn wir die Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} f_n : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in [-1, 0), \\ nx, & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 1, & \text{wenn } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

betrachten, dann gilt für $n \geq m$, dass

$$\|f_n - f_m\| = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \frac{1}{m}.$$

Es folgt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, aber diese konvergiert nicht in $C([-1, 1], \mathbb{R})$. In der Tat, man kann zeigen, dass wenn f_n gegen eine Funktion $g \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ konvergieren würde, dann müsste g die Eigenschaft haben, dass $g(x) = 0$ für $x \in [-1, 0)$ und $g(x) = 1$ für $x \in (0, 1]$, aber solch eine Funktion existiert in $C([-1, 1], \mathbb{R})$ nicht.

⁸⁷Zur Erinnerung: Wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist, dann definiert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V .

Der folgende Satz gibt ein wichtiges Beispiel für einen unendlich dimensionalen Banachraum:

Satz 10.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir betrachten den Vektorraum*

$$C_b(U, \mathbb{R}^m) := \text{Vektorraum aller beschränkten stetigen Abbildungen } f: U \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

mit der Supremumsnorm, d.h.

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\| \mid x \in U\}.$$

Dann ist $(C_b(U, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Der Satz haben wir für $n = 1$ in Analysis I bewiesen. Den allgemeinen Fall für beliebiges m zeigt man fast genauso.

10.2. Die L^p -Pseudonorm von Funktionen. Zur Erinnerung, es ist

$$\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) := \text{Alle Funktionen } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Sei im Folgenden $p \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir definieren ⁸⁸

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n}^* |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Für $p = 1$ hatten wir diese Definition schon in Kapitel 6.6 eingeführt. Wir hatten dabei gesehen, dass $\|\cdot\|_{L_1}$ eine Pseudonorm definiert. In der Tat gilt dies für alle $p \geq 1$, d.h. folgender Satz gilt:

Satz 10.2. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{L_p} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L_p}, & \text{für alle } f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \|f + g\|_{L_p} &\leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}, & \text{für alle } f, g \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Die erste Aussage folgt leicht aus der Definition. Die zweite Aussage ist nicht trivial, und wird auch als ‘Minkowskische Ungleichung’ bezeichnet. Wir verweisen auf Forster, Analysis III Kapitel 10 für einen Beweis.

Definition. (1) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion $f|_K$ integrierbar ist.

(2) Wir definieren

$$\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) := \text{Menge aller lokal integrierbaren Funktionen } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \|f\|_{L_p} < \infty.$$

⁸⁸Hier definieren wir $\infty^r := \infty$ für alle $r > 0$.

Bemerkung. Es folgt leicht aus Satz 9.6, dass für $p = 1$ die obige Definition von $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ mit der Definition in Kapitel 6.6 übereinstimmt. Wir verweisen auf Forster, Analysis III Kapitel 10, Satz 4 für Details.

Folgender Satz wird in Forster, Analysis III auf Seite 96 bewiesen:

Satz 10.3. *Es sei $p \geq 1$ und $f_k \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, eine L_p -Cauchy-Folge⁸⁹. Dann gilt:*

- (1) *es existiert eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ und eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\{f_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert,⁹⁰*
- (2) *die Funktion f liegt in $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L_p} = 0.$$

10.3. Einschub: Quotientenvektorräume. Es sei im Folgenden \mathbb{K} ein Körper, V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Für $v, w \in V$ schreiben wir

$$v \sim w :\Leftrightarrow v - w \in U.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass dies eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Jede Äquivalenzklasse ist von der Form

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

für ein $v \in V$. Äquivalenzklassen werden oft auch *Restklassen* genannt. Wir bezeichnen nun mit V/U die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir nennen V/U auch '*V modulo U*'.

Das folgende Lemma ist elementar, aber überaus wichtig.

Lemma 10.4. *Es ist*

$$v + U = w + U \Leftrightarrow v - w \in U.$$

Dieses Lemma wird in Übungsblatt 9 bewiesen.

Wir wollen jetzt eine Addition auf V/U definieren. Seien also $x, y \in V/U$. Dann gibt es $a, b \in V$, so dass $x = a + U$ und $y = b + U$. Wir definieren

$$x + y := a + b + U.$$

Wir müssen natürlich zeigen, dass dies nicht von der Wahl von a und b abhängt. Nehmen wir also an, wir haben a', b' mit $x = a' + U$ und

⁸⁹D.h. f_k ist eine Cauchy-Folge bzgl. der Pseudonorm $\| \cdot \|_{L_p}$.

⁹⁰D.h. es gibt eine Nullmenge N , so dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = f(x) \text{ für alle } x \notin N.$$

$y = b' + U$. Dann gilt

$$a' + b' + U = a + b + \underbrace{a' - a + b' - b}_{\in U} + U = a + b + U.$$

Ganz analog können wir eine Skalarmultiplikation auf V/U einführen. In der Tat, sei $x \in V/U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gibt es ein $a \in V$, so dass $x = a + U$. Wir definieren

$$\lambda \cdot x := \lambda \cdot a + U.$$

Wie oben kann man zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl von a abhängt.

Man kann nun leicht nachweisen, dass mit dieser Addition und dieser Skalarmultiplikation V/U wiederum ein \mathbb{K} -Vektorraum ist. Die 'Null' des Vektorraums V/U ist dabei die Äquivalenzklasse $0 + U = U$. Dieser Vektorraum wird auch *Quotientenvektorraum* genannt.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V/U \\ v &\mapsto v + U \end{aligned}$$

ist surjektiv und ein Homomorphismus. Diese Abbildung wird die *kanonische Projektion* von V auf V/U genannt. Der Kern dieser Abbildung ist U . Wenn V endlich dimensional ist, dann gilt

$$\dim(U) + \dim(V/U) = \dim(V).$$

Diese Aussagen folgen leicht aus den Definitionen, werden aber auch in Übungsblatt 9 behandelt.

10.4. Der Banachraum $L_p(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L_p} = 0\}.$$

Es folgt aus Satz 10.2, dass $\mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ ein Unterraum des reellen Vektorraums $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ ist. Wir definieren nun

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N}_p(\mathbb{R}^n).$$

Man beachte, dass $L_p(\mathbb{R}^n)$ wiederum ein Vektorraum ist. Es sei nun $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, wir können f durch ein $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ darstellen, und wir definieren

$$\|f\|_{L_p} := \|g\|_{L_p}.$$

Man sieht leicht, dass diese Definition nicht von der Wahl von g abhängt, und dass $\|\cdot\|_{L_p}$ eine Norm auf $L_p(\mathbb{R}^n)$ definiert. (Siehe auch Übungsblatt 9.) Anders ausgedrückt, $(L_p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L_p})$ ist ein normierter Vektorraum.

Wir können nun folgenden Satz formulieren:

Satz 10.5. *Für alle $p \in \mathbb{R}^n$ ist $(L_p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L_p})$ ein Banachraum.*

Beweis. Der Satz folgt direkt aus Satz 10.3 und den Definitionen. In der Tat, sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L_p(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir einen Repräsentanten $g_k \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ von f_k . Dann ist für alle k, l die Funktion $g_k - g_l$ ein Repräsentant von $f_k - f_l$, und es folgt aus den Definitionen, dass

$$\|f_k - f_l\|_{L_p} = \|g_k - g_l\|_{L_p}.$$

Die Funktionenfolge $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist also auch eine Cauchyfolge bzgl. der $\|\cdot\|_{L_p}$ -Pseudonorm. Aus Satz 10.3 folgt nun, dass es ein $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\|g - g_k\|_{L_p} \rightarrow 0.$$

Es sei nun $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ die Äquivalenzklasse von g , dann folgt wiederum aus den Definitionen, dass

$$\|f - f_k\|_{L_p} = \|g - g_k\|_{L_p},$$

also konvergiert die Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ im normierten Vektorraum $(\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L_p})$ gegen f . \square

Wir werden diesen Satz für $p = 1$ im nächsten Kapitel anwenden. Dieser Satz spielt aber auch eine wichtige Rolle in höheren Analysisvorlesungen und in der Quantenphysik für den Fall $p = 2$.

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, welchen wir nicht beweisen werden:

Satz 10.6. *Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p} = \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

11. DIE TRANSFORMATIONSFORMEL FÜR LEBESGUE-INTEGRIERBARE FUNKTIONEN

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$\mathcal{L}_1(U) :=$ Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$,

und für $f \in \mathcal{L}_1(U)$ definieren wir

$$\|f\|_{L_1} := \int_U |f(x)| dx.$$

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 11.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{L}_1(U)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in \mathcal{C}_c(U)$, so dass*

$$\|f - \varphi\|_{L_1} < \varepsilon.$$

Beweis. Wir betrachten die Fortsetzung von f auf \mathbb{R}^n , welche wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in U, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Per Definition der Integrierbarkeit von f ist die Funktion \tilde{f} integrierbar. Nach Satz 6.10 gibt es daher ein $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, mit

$$\|\tilde{f} - g\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Funktion g liegt in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, aber leider nicht in $\mathcal{C}_c(U)$ wie wir es uns eigentlich wünschen würden. Die Idee ist jetzt g mit einer Funktion h zu multiplizieren, welche stetig ist mit $\text{Supp}(h) \in \mathcal{C}_c(U)$, und so dass $\|\tilde{f} - gh\|_{L_1} < \varepsilon$.

Da U offen ist, folgt, dass $\chi_U \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, d.h. es gibt eine Folge von Funktionen $h_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $h_k \uparrow \chi_U$. Man kann zudem die Funktionen so wählen, so dass für alle k gilt:⁹¹

- (1) $h_k \geq 0$, und
- (2) $\text{Supp}(h_k)$ ist eine kompakte Teilmenge von U .

Die Folge $(gh_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $g\chi_U$. Nachdem $|gh_k| \leq |g|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int gh_k dx = \int g\chi_U,$$

d.h.

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g\chi_U - gh_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int |g\chi_U - gh_k| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g\chi_U - gh_k\|_{L_1}.$$

Es gibt insbesondere ein k , so dass $\|g\chi_U - gh_k\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - gh_k\|_{L_1} &< \|\tilde{f} - g\chi_U\|_{L_1} + \|g\chi_U - gh_k\|_{L_1} \\ &\leq \|\tilde{f} - g\|_{L_1} + \|g\chi_U - gh_k\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nachdem $gh_k \in \mathcal{C}_c(U)$ haben wir das Lemma bewiesen. \square

⁹¹In der Tat, wenn $h_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen ist, so dass $h_k \uparrow \chi_U$, dann hat die Folge von Funktion

$$\begin{aligned} g_k : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \max\{h_k(x), 0\}, & \text{wenn } \|x\| \leq k, \\ \max\{h_k(x) \cdot (\|x\| - (k+1)), 0\}, & \text{wenn } \|x\| \in (k, k+1), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ebenfalls die Eigenschaft, dass $g_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ und dass $g_k \uparrow \chi_U$, aber zudem auch noch die Eigenschaften, dass $g_k \geq 0$, und dass $\text{Supp}(g_k)$ eine kompakte Teilmenge von U ist.

Wir sind nun endlich in der Lage, den Transformationssatz für Lebesgue-integrierbare Funktionen zu beweisen.

Satz 11.2. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\Phi: U \rightarrow V$ eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung. Es sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist*

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(\Phi(y)) \cdot |\det D\Phi(y)| \end{aligned}$$

integrierbar, und es gilt

$$\int_U f(\Phi(y)) \cdot |\det D\Phi(y)| dy = \int_V f(x) dx.$$

Beweis. Die Grundidee des Beweises besteht darin, $f \in \mathcal{L}_1(V)$ durch Funktionen in $\mathcal{C}_c(V)$ zu approximieren, denn für Funktionen in $\mathcal{C}_c(V)$ haben wir den Transformationssatz schon bewiesen (siehe Satz 3.1). Die Schwierigkeit besteht darin, diese einfache Grundidee sorgfältig umzusetzen.

Sei also $f \in \mathcal{L}_1(V)$. Nach Lemma 11.1 gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{C}_c(V)$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$(11.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L_1} = 0.$$

Aus Satz 6.11 folgt dann auch, dass

$$(11.2) \quad \int_V f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V f_k(x) dx.$$

Aus Satz 10.3 folgt zudem, dass es, nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge, eine Nullmenge $N \subset V$ gibt, so dass

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ für alle } x \in V \setminus N.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} g &:= (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|, \\ g_k &:= (f_k \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.1 gilt die Transformationsformel für Funktionen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$(11.3) \quad \int_U g_k(x) dx = \int_V f_k(x) dx \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen zeigen, dass $g \in \mathcal{L}_1(U)$, und dass

$$\int_U g(x) dx = \int_V f(x) dx.$$

Aus (11.2) und (11.3) folgt, dass es nun genügt folgende Aussage zu beweisen:

Behauptung. Die Funktion g ist integrierbar, und es gilt

$$\int_U g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U g_k(x) dx.$$

Es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \text{ für alle } x \notin \Phi^{-1}(N).$$

Nach Korollar 7.12 ist zudem $\Phi^{-1}(N)$ eine Nullmenge. Allerdings können wir aus punktweise Konvergenz von integrierbaren Funktionen keineswegs auf die Integrierbarkeit der Grenzfunktion schließen.

Wir gehen deshalb einen anderen Weg, um eine integrierbare Grenzfunktion zu finden. Seien nun $k, l \in \mathbb{N}$. Aus dem Transformationssatz angewandt auf die stetigen Funktionen $|f_k - f_l|$ folgt, dass

$$(11.4) \quad \|g_k - g_l\|_{L_1} = \|f_k - f_l\|_{L_1}.$$

Aus (11.1) folgt nun, dass $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}_1(U)$ bildet. Zudem folgt aus Satz 10.3, dass es, nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge, eine Nullmenge $M \subset V$ sowie eine Funktion $h \in \mathcal{L}_1(U)$ gibt, so dass

$$h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \text{ für alle } x \in U \setminus M,$$

und $\lim_{k \rightarrow \infty} \|h - g_k\|_{L_1} = 0$. Aus Satz 6.11 folgt dann auch, dass

$$(11.5) \quad \int h dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k dx.$$

Vergleichen wir nun die Funktionen g und h . Die beiden Funktionen stimmen außerhalb der Nullmenge $\Phi^{-1}(N) \cup M$ überein. Nachdem h integrierbar ist, folgt nun aus Satz 7.13, dass g ebenfalls integrierbar ist, und dass g und h das gleiche Integral besitzen. Die Behauptung folgt nun aus (11.5). \square

Die wohl wichtigsten Anwendungen des Satzes sind wiederum auf

- (1) ebene Polarkoordinaten,
- (2) zylindrische Koordinaten, und
- (3) sphärische Polarkoordinaten.

Wir formulieren die Aussage für ebene Polarkoordinaten, die anderen Fälle kann man leicht selber ausformulieren.

Satz 11.3. *Eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \varphi) &\mapsto f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \end{aligned}$$

integrierbar ist, und es gilt dann, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{[0, \infty) \times [0, 2\pi]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

Es sei zudem

$$U := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \text{ und } V := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times 0).$$

In Kapitel 3.4.1 haben wir schon bewiesen, dass die Einschränkung von Φ auf die offene Teilmenge U eine C^1 -invertierbare Abbildung $\Psi: U \rightarrow V$ definiert. Zudem haben wir dort gesehen, dass

$$|\det(D\Phi(r, \varphi))| = r \text{ f\u00fcr alle } (r, \varphi).$$

Es folgt also aus Satz 11.2, dass

$$\int_V f(x, y) dx dy = \int_U f(\Phi(r, \varphi)) \cdot r dr d\varphi.$$

Nachdem $\mathbb{R}^2 \setminus V = \mathbb{R}_{\geq 0} \times 0$ eine Nullmenge ist, gilt nach Satz 7.13, dass

$$\int_V f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy.$$

Nachdem

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \setminus U = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0, 2\pi\} \cup 0 \times [0, 2\pi]$$

ebenfalls eine Nullmenge ist, folgt wiederum aus Satz 7.13, dass

$$\int_U f(\Phi(r, \varphi)) \cdot r dr d\varphi = \int_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}} f(\Phi(r, \varphi)) r dr d\varphi.$$

□

Satz 11.4. (Ebene Polarkoordinaten) *Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche au\u00dfershalb einer beschr\u00e4nkten Menge nicht negativ ist. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \varphi) &\mapsto r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

integrierbar ist, und es gilt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Bemerkung. (1) Die Reihenfolge der Integration bzgl. der verschiedenen Variablen kann natürlich vertauscht werden, d.h. es gilt auch, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

(2) Die Grenzen für das ‘ φ -Integral’ können beliebig gewählt werden, so lange die Differenz 2π beträgt. In manchen Fällen bietet es sich beispielsweise an, das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

zu betrachten.

Beweis. Aus Satz 11.3 folgt, dass es genügt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi] \times [0, \infty)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi, \\ \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Dies ist jedoch eine Konsequenz aus Satz 7.16 und Korollar 9.7. \square

Ganz analog kann man mit den Ergebnissen aus Kapitel 3.4.2 und 3.4.3 folgende Sätze beweisen:

Satz 11.5. (Zylindrische Koordinaten) *Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche außerhalb einer beschränkten Menge nicht negativ ist. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn*

$$\begin{aligned} [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \varphi, z) &\mapsto r \cdot f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \end{aligned}$$

integrierbar ist, und es gilt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dz dr d\varphi.$$

Beispiel. Wir betrachten

$$M := \{(x, y, z) \mid |y| \leq x, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z \in [0, x^2]\}.$$

Wir wollen das Volumen von M bestimmen. Die Schnittmenge von M mit der xy -Ebene ist ein ‘Tortenstück’ mit Radius 1 mit Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Wir können M mithilfe der Zylinderkoordinaten wie folgt beschreiben

$$M := \text{Punkte in } \mathbb{R}^3 \text{ mit Zylinderkoordinaten } (r, \varphi, z), \text{ wobei} \\ r \in [0, 1], \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ und } z \in [0, (r \cos \varphi)^2].$$

Mithilfe der Zylinderkoordinaten können wir nun das Volumen von M wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_M(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi_M(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{(r \cos \varphi)^2} 1 \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^3 \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \varphi \right]_0^1 d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann man nun leicht mit der Gleichung

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))$$

bestimmen.

Satz 11.6. (Sphärische Koordinaten) *Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche außerhalb einer beschränkten Menge nicht negativ ist. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn*

$$[0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \varphi, \theta) \mapsto r^2 \cos \theta \cdot f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ r \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

integrierbar ist, und es gilt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ r \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \, d\theta \, dr \, d\varphi.$$

Wir können jetzt folgenden Satz von Gauss⁹² beweisen:

⁹²http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0d/10.DM_Serie4_Vorderseite.jpg

Satz 11.7. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Satz ist verblüffend, nachdem man keine explizite Stammfunktion von e^{-x^2} angeben kann (weder Substitution noch partielle Integration führen zum Erfolg), insbesondere kann man daher das uneigentliche Integral nicht ‘einfach per Hand’ bestimmen. Es ist zudem auch überraschend, dass das Ergebnis die Kreiszahl π enthält.

Beweis. Mithilfe des Majoranten-Kriteriums für uneigentliche Integrale (siehe Satz 15.9 in Analysis I) kann man leicht zeigen, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

konvergiert (siehe Übungsblatt 10). Wir setzen also

$$C := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Dann folgt aus Satz 11.6, dass

$$\begin{aligned} C^2 &= C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot C dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{=C} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{-y^2}}_{\substack{\text{Konstante} \\ \text{bzgl. } x}} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2)} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr. \end{aligned}$$

(Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass das Integrand in φ konstant ist.) Wir verwenden jetzt die Substitution $u = -r^2$ und erhalten, dass

$$\begin{aligned} C^2 = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr &= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{-1}{2} e^{-r^2} (-2r) dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{-\infty} \frac{-1}{2} e^u du \\ &= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^u \right]_0^{-\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Wir erhalten also, dass $C = \sqrt{\pi}$. \square

12. INTEGRATION UND UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

12.1. Erinnerung an Untermannigfaltigkeiten. Zur Erinnerung, eine Abbildung $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Mengen in \mathbb{R}^n heißt *Diffeomorphismus*, wenn Φ eine bijektive C^∞ Abbildung ist, so dass die Umkehrfunktion ebenfalls eine C^∞ -Abbildung ist.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine *Karte um a* gibt, d.h. eine Abbildung $\Phi: U \rightarrow V$ wobei gilt:

- (1) $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene Umgebung von a ,
- (2) $V \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge,
- (3) Φ ist ein Diffeomorphismus, so dass

$$\Phi(M \cap U) = V \cap E_k,$$

wobei

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}.$$

Bemerkung. (1) Nach Satz 8.3 aus Analysis II ist diese Definition (fast) äquivalent zur Definition von Untermannigfaltigkeiten, welche wir in Analysis II gegeben haben. Der einzige Unterschied ist, dass wir von nun an verlangen, dass die Karten Φ Diffeomorphismen sind, und nicht nur C^1 -invertierbare Abbildungen. In der ‘Praxis’ macht das allerdings keinen großen Unterschied.

- (2) Die leere Menge ist eine Untermannigfaltigkeit jeder Dimension von \mathbb{R}^n .

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Familie $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von Karten von M heißt *Atlas von M*, wenn $\cup_{i \in I} U_i = M$.

Jede Untermannigfaltigkeit besitzt per Definition einen Atlas, und jede kompakte Untermannigfaltigkeit besitzt einen endlichen Atlas, d.h. einen Atlas, welcher aus endlich vielen Karten besteht ⁹³.

Beispiel. Wir betrachten

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

mit den Punkten

$$N = (0, 0, 1) \text{ ‘Nordpol’ und } S = (0, 0, -1) \text{ ‘Südpol’}.$$

⁹³Warum?

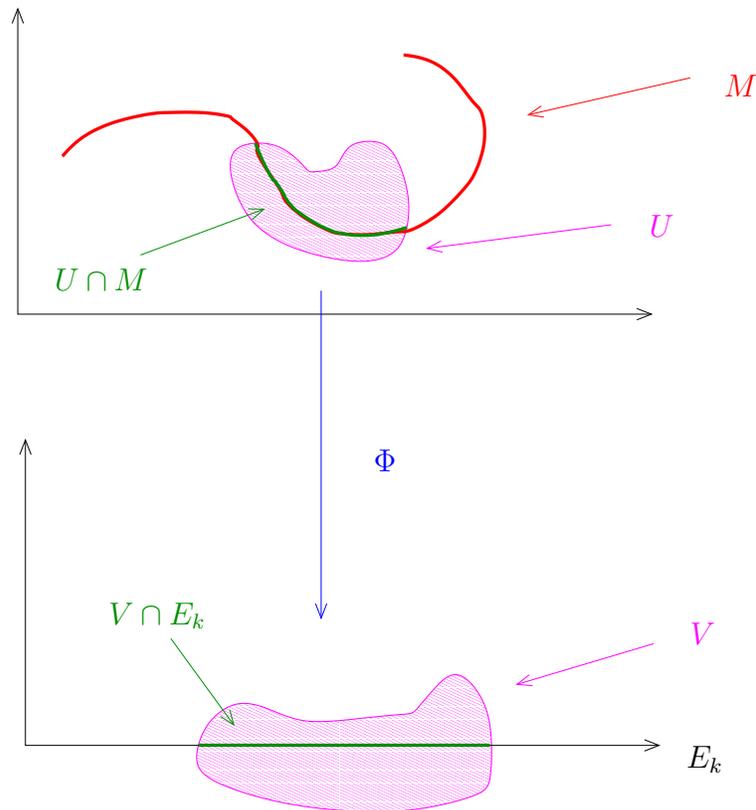


ABBILDUNG 1. Schematisches Bild einer Karte.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: \{(x, y, z) \mid z < 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 1 - x^2 - y^2 - z^2\right). \end{aligned}$$

Eingeschränkt auf $S^2 \setminus N$ ist dies die stereographische Projektion bzgl. des Nordpols N . Wir betrachten auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: \{(x, y, z) \mid z > -1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 1 - x^2 - y^2 - z^2\right). \end{aligned}$$

Eingeschränkt auf $S^2 \setminus S$ ist dies die stereographische Projektion bzgl. des Südpols S . Man kann nun leicht überprüfen, dass Einschränkungen von Φ und Ψ auf geeignet gewählte offene Mengen Karten für S^2 sind, welche S^2 überdecken. Nachdem die Definitionsbereiche ganz S^2 abdecken bilden diese Einschränkungen von Φ und Ψ einen Atlas für S^2 .

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$.

- (1) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt a , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

gibt, so dass $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$.

- (2) Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt a wird mit $T_a M$ bezeichnet. Wir nennen $T_a M$ den *Tangentialraum* am Punkt a . Wir haben in Analysis II gesehen, dass $T_a M$ ein k -dimensionaler Vektorraum ist.
- (3) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* von M in a , wenn v orthogonal ist zu allen Vektoren in $T_a M$.

Zur Erinnerung, wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^∞ -Abbildung ist, dann haben wir in Analysis II folgende Definitionen eingeführt:

- (1) ein Punkt $x \in U$ heißt *regulärer Punkt* von f , wenn das Differential $Df(x)$ den Rank k besitzt.
- (2) ein $z \in \mathbb{R}$ heißt *regulärer Wert* von f , wenn alle Punkte in $f^{-1}(z)$ regulär sind.

Ein Punkt (bzw. Wert), welcher nicht regulär ist, wird *singulär* genannt. Ein $z \in \mathbb{R}$ ist also ein regulärer Wert wenn z *nicht* das Bild eines singulären Punktes ist. Wir zitieren zum Abschluß noch Satz 8.5 aus der Analysis II.

Satz 12.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Abbildung und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist $M := f^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und für jedes $a \in M$ gilt:*

$$T_a M := \text{grad } f(a)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ orthogonal zu } \text{grad } f(a)\}.$$

Beispielsweise ist für die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

das Differential gegeben durch

$$D_{(x,y,z)} f = (2x, 2y, 2z).$$

Diese hat den Rang ein für alle Punkte in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ist regulärer Punkt. Es folgt, dass jeder Wert in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein regulärer Wert ist. Insbesondere erhalten wir dadurch einen alternativen Beweis dafür, dass

$$f^{-1}(1) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = S^2$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist.

12.2. Differenzierbare Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten M als topologischen Raum bezüglich der Teilraumtopologie, d.h. $U \subset M$ ist offen genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, mit $U = M \cap V$. Es sei nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Nachdem wir M als topologischen Raum auffassen, haben wir schon einen Stetigkeitsbegriff für Funktionen auf M . In der Tat, wie in Analysis II sagen wir $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wenn für jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}$, das Urbild $f^{-1}(X)$ eine offene Teilmenge von M ist.

Andererseits ist es a priori nicht klar, was es heißen soll, dass f differenzierbar ist.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f ist *differenzierbar* (stetig differenzierbar, C^k , C^∞ etc.) im Punkt P wenn für jede Karte $\Phi: U \rightarrow V$ von M mit $P \in U$ die Funktion

$$V \cap E_k \xrightarrow{\Phi^{-1}} U \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

im Punkt $\Phi(P)$ differenzierbar (stetig differenzierbar, C^k , C^∞ etc.) ist.

Lemma 12.2. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $P \in M$ ein Punkt. Es seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\Psi: X \rightarrow Y$ beliebige Karten, welche beide P enthalten. Dann gilt*

$$V \cap E_k \xrightarrow{\Phi^{-1}} U \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad Y \cap E_k \xrightarrow{\Psi^{-1}} X \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

ist differenzierbar im Punkt $\Phi(P)$ ist differenzierbar im Punkt $\Psi(P)$

Die analoge Aussage gilt auch für stetig differenzierbar, C^k , C^∞ etc.

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zudem sei $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte von M mit $P \in U$, so dass die Funktion

$$V \cap E_k \xrightarrow{\Phi^{-1}} U \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

⁹⁴Wir fassen hierbei $V \cap E_k$ auf offensichtliche Weise als Teilmenge des \mathbb{R}^k auf. Die Definition der Differenzierbarkeit macht nun in der Tat Sinn, nachdem

$$V \cap E_k \xrightarrow{\Phi^{-1}} U \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

eine Funktion von einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^k , nämlich $V \cap E_k$, nach \mathbb{R} ist. Wir können darauf nun die Definition der Differenzierbarkeit aus der Analysis II anwenden.

im Punkt $\Phi(P)$ differenzierbar ist. Es sei $\Psi: X \rightarrow Y$ eine beliebige Karte für M mit $P \in X$. Wir müssen zeigen, dass die Funktion

$$Y \cap E_k \xrightarrow{\Psi^{-1}} X \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

im Punkt $\Psi(P)$ differenzierbar ist. Nach Einschränkung des Definitionsbereichs können wir o.B.d.A. annehmen, dass $U = X$. Dann gilt, eingeschränkt auf $Y \cap E_k$, dass

$$f \circ \Psi^{-1} = \underbrace{f \circ \Phi^{-1}}_{\substack{\text{differenzierbar} \\ \text{nach Voraussetzung}}} \circ \underbrace{\Phi \circ \Psi^{-1}}_{\substack{\text{differenzierbar} \\ \text{weil } \Psi \text{ und } \Phi \\ \text{Diffeomorphismen sind}}}$$

differenzierbar ist. Die analoge Aussage für stetig differenzierbar, C^k , C^∞ etc. wird ganz analog bewiesen. \square

Aus der Definition und aus Lemma 12.2 folgt sofort folgendes Korollar. Es besagt, dass es zur Überprüfung der Differenzierbarkeit einer Funktion genügt die Karten in einem Atlas zu betrachten.

Korollar 12.3. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas von M . dass*

$$f \text{ ist differenzierbar} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{für jede Karte } \Phi_i: U_i \rightarrow V_i \text{ von } M \text{ im Atlas} \\ \text{ist } V \cap E_k \xrightarrow{\Phi_i^{-1}} U \cap M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ differenzierbar.} \end{array}$$

12.3. Einschub: Lineare Algebra. Es sei $k \leq n$. Im Folgenden identifizieren wir \mathbb{R}^k mit

$$E_k := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Wir fassen also \mathbb{R}^k als Teilraum von \mathbb{R}^n auf.

Es seien v_1, \dots, v_k linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^n . Dann spannen die Vektoren das Parallelotop

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1] \right\}$$

auf. Ähnlich wie in Übungsaufgabe 4 von Übungsblatt 4 kann man nun zeigen, dass es eine orthogonale Matrix A gibt, so dass $Av_1, \dots, Av_k \in E_k = \mathbb{R}^k$. Wir definieren nun das k -dimensionale Volumen von P als

$$\text{Vol}_k(P) := \text{Vol}_k \left(\underbrace{AP}_{\subset E_k = \mathbb{R}^k} \right).$$

In Übungsblatt 11 werden wir sehen, dass diese Definition nicht von der Wahl der orthogonalen Matrix A abhängt. Zudem folgt aus Korollar 5.2, dass

$$\text{Vol}_k(P) = |\det (Av_1 \ \dots \ Av_k)|.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob man das Volumen von P auch ‘direkt’ von den Vektoren v_1, \dots, v_k ablesen kann, ohne zuerst eine orthogonale Matrix A wie oben finden zu müssen. Wir bezeichnen im Folgenden wie üblich für zwei Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n)$ mit

$$v \cdot w := \langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbb{R}$$

das Skalarprodukt. Für Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ definieren wir nun die *Gramsche Determinante* wie folgt:

$$\text{Gram}(\underbrace{v_1 \ \dots \ v_k}_{n \times k\text{-Matrix}}) := \det(\underbrace{(v_i \cdot v_j)_{i,j=1,\dots,k}}_{k \times k\text{-Matrix}}).$$

Lemma 12.4. *Es seien v_1, \dots, v_k linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^n . Wir betrachten das Parallelotop*

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1] \right\}$$

Dann gilt

$$\text{Vol}_k(P) = \sqrt{\text{Gram}(v_1 \ \dots \ v_k)}.$$

Beweis. Wir wählen eine orthogonale Matrix A , so dass

$$w_1 := Av_1, \dots, w_k := Av_k \in E_k = \mathbb{R}^k.$$

Nachdem A eine orthogonale Matrix ist gilt

$$v_i \cdot v_j = Av_i \cdot Av_j = w_i \cdot w_j \text{ für alle } i, j.$$

Wir erhalten also, dass

$$\text{Gram}(v_1 \ \dots \ v_k) = \text{Gram}(Av_1 \ \dots \ Av_k) = \text{Gram}(w_1 \ \dots \ w_k).$$

Das Lemma folgt also nun aus den Definitionen und folgender Behauptung:

Behauptung. Es seien $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$ beliebig. Dann gilt

$$|\det(u_1 \ \dots \ u_k)| = \sqrt{\det((u_i \cdot u_j)_{i,j=1,\dots,k})}.$$

Wir schreiben $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{ik})$ und wir bezeichnen mit U die $k \times k$ -Matrix $U = (u_1 \dots u_k)$. Dann folgt aus den Definitionen, dass

$$((u_i \cdot u_j)_{i,j=1,\dots,k}) = \left(\left(\sum_{l=1}^k u_{il} \cdot u_{jl} \right)_{i,j=1,\dots,k} \right) = U \cdot U^t.$$

Inbesondere gilt, dass

$$\det((u_i \cdot u_j)_{i,j=1,\dots,k}) = \det(U \cdot U^t) = \det(U) \cdot \det(U^t) = \det(U)^2.$$

□

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 11 bewiesen:

Lemma 12.5. *Es seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und es sei $A = (a_{ij})$ eine $k \times k$ -Matrix. Dann gilt*

$$\text{Gram}\left(\sum_{i=1}^k a_{i1}v_i \dots \sum_{i=1}^k a_{ik}v_i\right) = \det(A)^2 \cdot \text{Gram}(v_1 \dots v_k).$$

Wenn wir die Vektoren v_1, \dots, v_k als Spalten einer Matrix V auffassen, dann gilt also, dass

$$\text{Gram}(V \cdot A) = \det(A)^2 \cdot \text{Gram}(V).$$

Wenn $n = k$ dann folgt das Lemma leicht aus der Behauptung, welche im Beweis von Lemma 12.4 bewiesen wird, und der Multiplikativität der Determinante. Der Fall $n > k$ ist etwas schwieriger. Der Beweis ist dann ähnlich zum Beweis der Multiplikativität der Determinante.

12.4. Integration auf Untermannigfaltigkeiten I. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty$ eine Funktion. In diesem Kapitel nehmen wir an, dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt mit $\text{Supp}(f) \subset U$.

Eine erste naive Definition des Integrals wäre jetzt das Integral von f auf M als

$$\int_{V \cap E_k} f \circ \Phi^{-1} dx$$

zu definieren. Diese Definition macht allerdings wenig Sinn, nachdem man sich leicht davon überzeugen kann, dass i.A. verschiedene Karten zu verschiedenen Ergebnissen führen.⁹⁵ Dieses Phänomen folgt sofort aus dem Auftreten der Determinante des Differentials in der Transformationsformel (siehe Satz 11.2).

⁹⁵Beispielsweise könnte man $M = \mathbb{R}$ und die Karten $\Phi(x) := x$ und $\Psi(x) := 2x$ betrachten, selbst in diesem einfachen Fall erhält man verschiedene Ergebnisse.

Die Idee ist nun obige ‘Definition’ abzuändern indem wir noch einen Extrafaktor in das Integral einführen. Es sei $Q \in V$. Wir bezeichnen mit

$$\text{Gram}_\Phi(Q) := \text{Gram}((D_Q\Phi^{-1})(e_1) \ \dots \ (D_Q\Phi^{-1})(e_k))$$

die *Gramsche Determinante von M bezüglich der Karte Φ* .

Bemerkung. Das von e_1, \dots, e_k aufgespannte Parallelotop ist natürlich der Würfel mit Volumen eins. Andererseits gilt nach Lemma 12.4 für das von

$$v_1 = (D_Q\Phi^{-1})(e_1), \dots, v_k = (D_Q\Phi^{-1})(e_k)$$

aufgespannte Parallelotop P , dass

$$\text{Vol}_k(P) = \text{Gram}(v_1 \ \dots \ v_k) = \sqrt{\text{Gram}_\Phi(Q)}.$$

Wir können also die Wurzel der Gramsche Determinante als den Faktor betrachten mit dem Φ am Punkt Q das k -dimensionale Volumen verändert.

Es gilt folgendes Lemma:

Lemma 12.6. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty$ eine Funktion. Zudem seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ Karten mit $\text{Supp}(f) \subset U \cap \tilde{U}$. Dann gilt⁹⁶*

$$\int_V f(\Phi^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(x)} \, dx = \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\Phi}^{-1}(y)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_{\tilde{\Phi}}(y)} \, dy.$$

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $U = \tilde{U}$.⁹⁷ Nehmen wir an, dass die Funktion

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ x &\mapsto g(x) := f(\Phi^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(x)} \end{aligned}$$

integrierbar ist. Wir bezeichnen mit Ψ den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{V} \cap E_k &\rightarrow V \cap E_k \\ x &\mapsto \Phi(\tilde{\Phi}^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Aus dem Transformationssatz für Lebesgue integrierbare Funktionen (d.h. Satz 11.2) folgt, dass

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto g(\Psi(y)) \cdot |\det D\Psi(y)| \end{aligned}$$

⁹⁶Genau gesprochen ist die Aussage, dass wenn das eine Integral existiert, dann existiert auch das andere, und die Integrale stimmen überein.

⁹⁷In der Tat, wir können zu $U \cap \tilde{U}$, $\Phi(U \cap \tilde{U})$ und $\tilde{\Phi}(U \cap \tilde{U})$ übergehen, ohne dass sich die Aussagen verändern.

integrierbar ist, und, dass

$$\int_V g(x) dx = \int_{\tilde{V}} g(\Psi(y)) \cdot |\det D\Psi(y)| dy.$$

In unserem Fall erhalten wir also, dass

$$\begin{aligned} & \int_V f(\Phi^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(x)} dx \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\Phi^{-1}(\Psi(y))) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(\Psi(y))} \cdot |\det D\Psi(y)| dy \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\Phi}^{-1}(y)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(\Psi(y))} \cdot |\det D\Psi(y)| dy. \end{aligned}$$

Es verbleibt also folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für alle $y \in \tilde{V}$ gilt

$$\text{Gram}_{\tilde{\Phi}}(y) = \text{Gram}_\Phi(\Psi(y)) \cdot |\det D\Psi(y)|^2.$$

Sei also $y \in \tilde{V}$. Aus der Kettenregel folgt, dass

$$D_y \tilde{\Phi}^{-1} = D_y(\Phi^{-1} \circ \Psi) = D_{\Psi(y)} \Phi^{-1} \cdot D_y \Psi.$$

Es folgt nun aus den Definitionen und aus Lemma 12.5, dass

$$\begin{aligned} \text{Gram}_{\tilde{\Phi}}(y) &= \text{Gram}(D_y \tilde{\Phi}^{-1}(e_1) \dots D_y \tilde{\Phi}^{-1}(e_k)) \\ &= \text{Gram}((D_{\Psi(y)} \Phi^{-1} \cdot D_y \Psi)(e_1) \dots (D_{\Psi(y)} \Phi^{-1} \cdot D_y \Psi)(e_k)) \\ &= \det(D_y \Psi)^2 \cdot \text{Gram}(D_{\Psi(y)} \Phi^{-1}(e_1) \dots D_{\Psi(y)} \Phi^{-1}(e_k)) \\ &= |\det D\Psi(y)|^2 \cdot \text{Gram}_\Phi(\Psi(y)). \end{aligned}$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen. \square

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir wollen jetzt den Begriff der Lebesgue-Integrierbarkeit und des Lebesgue-Integrals einführen. Sei nun $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion, so dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt mit $\text{Supp}(f) \subset U$. Dann sagen wir f ist Lebesgue-integrierbar, wenn

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ x &\mapsto f(\Phi^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(x)} \end{aligned}$$

integrierbar ist, und wir definieren ⁹⁸

$$\int_M f := \int_V f(\Phi^{-1}(x)) \cdot \sqrt{\text{Gram}_\Phi(x)} dx.$$

Es folgt aus Lemma 12.6, dass diese Definitionen nicht von der Wahl der Karte Φ abhängt.

Wir wollen nun die Integration von beliebigen Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit auf den oben betrachteten Fall zurückführen,

⁹⁸Die Notation $\int_M f$ 'ohne ein dx ' ist kein Tippfehler, sondern beabsichtigt.

d.h. den Fall, dass der Träger einer Funktion im Definitionsbereich einer Karte enthalten ist.

12.5. Die Zerlegung der Eins.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $U_i, i \in I$ eine Familie von offenen Teilmengen von M , welche ganz M überdecken, d.h. $\cup_{i \in I} U_i = M$. Eine stetige (differenzierbare, C^k etc.) *Zerlegung der Eins*⁹⁹ bzgl. der offenen Überdeckung ist eine Familie $z_j: M \rightarrow [0, 1], j \in J$, von stetigen (differenzierbaren, C^k etc.) Funktionen, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) jedes $x \in M$ besitzt eine offene Umgebung, in der nur endlich viele der Funktionen z_j einen von 0 verschiedenen Wert annehmen,
- (2) es gilt¹⁰⁰

$$\sum_{j \in J} z_j(x) = 1 \text{ für alle } x \in M,$$

- (3) für jedes $j \in J$ ist der Träger $\text{Supp}(z_j)$ kompakt und in einer der Mengen U_i enthalten.

Für den Beweis des folgenden Satzes verweise ich auf Seite 362

Königsberger: Analysis 2 (Springer–Verlag)

und Kapitel 9.4 von

Jänich: Vektoranalysis (Springer–Verlag).

Satz 12.7. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von M , welche ganz M überdecken. Dann existiert eine C^∞ -Zerlegung der Eins bzgl. dieser Überdeckung.*

In Übungsblatt 11 werden wir folgendes Korollar beweisen:

Korollar 12.8. *Es sei M eine kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Dann gilt:*

- (1) *es gibt einen endlichen Atlas für M , d.h. einen Atlas für M , welcher aus endlich vielen Karten besteht,*
- (2) *wenn U_1, \dots, U_l eine endliche offene Überdeckung von M ist, dann gibt es eine endliche Zerlegung der Eins für M bezüglich dieser offenen Überdeckung.*

⁹⁹In Forster, Analysis III wird der Begriff *Teilung der Eins* verwendet.

¹⁰⁰Nach (1) ist dies für jedes x eine endliche Summe.

12.6. Integration auf Untermannigfaltigkeiten II. Es sei nun M wiederum eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine beliebige Funktion. Wir wählen einen Atlas $\{\Phi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ von M und eine stetige Zerlegung $z_j: M \rightarrow [0, 1]$, $j \in J$ der Eins bzgl. der offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$. Wir sagen f ist Lebesgue-integrierbar, wenn für alle $j \in J$ die Funktion $z_j \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrierbar ist, und wenn

$$\sum_{j \in J} \left| \int_M z_j \cdot f \right| < \infty.$$

Wenn f Lebesgue-integrierbar ist, dann definieren wir das Lebesgue-Integral von $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ als

$$\int_M f := \sum_{j \in J} \int_M z_j \cdot f.$$

Wenn man M durch endlich viele Funktionen z_j abdecken kann, dann kann man nun ohne größere Probleme (siehe Forster, Analysis III Seite 139f) zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Zerlegung der Eins abhängt. Die Aussage gilt auch für beliebige Zerlegungen der Eins, der Beweis erfordert aber einen größeren Aufwand.

Für das Integral von Funktionen auf k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten gelten die ‘üblichen’ Aussagen. Beispielsweise, wenn $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen sind, dann ist auch $f + g$ integrierbar, und es gilt

$$\int_M f + g = \int_M f + \int_M g.$$

13. WEIHNACHTSVORLESUNG: DAS GEFANGENENPROBLEM

13.1. Das Gefangenenproblem I: Endlich viele Gefangene. Ein Gefängnis enthält n Gefangene. Kurz vor Weihnachten schlägt der Gefängnisdirektor folgendes Verfahren vor, damit zumindestens einige Gefangene rechtzeitig zu Weihnachten freikommen: Die Gefangenen müssen sich in einer Reihe aufstellen, so dass jeder Gefangene die Rücken der vor ihm stehenden Gefangenen sieht. Jedem Gefangenen wird nun eine ‘Null’ oder ‘Eins’ an den Rücken geheftet. Die Gefangenen werden nun aufgefordert, der Reihe nach von hinten nach vorne gehend laut und deutlich entweder ‘Null’ oder ‘Eins’ zu sagen. Wenn der Gefangene seine Ziffer errät kommt er frei, wenn nicht, muss der Gefangene Weihnachten im Gefängnis verbringen.

Als Zugeständnis an die Gefangenen dürfen sich die Gefangenen zuvor beratschlagen und sich auf einen Algorithmus einigen. Wieviele Gefangene kommen mit dem optimalen Algorithmus frei?

Beispielsweise könnten die Gefangenen folgenden Algorithmus vereinbaren: der erste (und dritte, fünfte etc.) Gefangene liest die Ziffer vom Vordermann vor, welcher sich dann retten kann. Auf diese Weise kommen bei $2k$ Gefangenen mindestens k Gefangene frei, und die anderen k Gefangenen kommen mit 50% Wahrscheinlichkeit frei (wenn ihre Ziffer zufällig mit der des Vordermanns übereinstimmt). Es stellt sich die Fragen, ob man diesen Algorithmus überbieten kann.

Es ist klar, dass der erste Gefangene nur mit Zufall seine Ziffer erraten kann, es können also höchstens $n - 1$ Gefangene definitiv gerettet werden. Es stellt sich heraus, dass man dies in der Tat erreichen kann:

Satz 13.1. *Es gibt einen Algorithmus, so dass höchstens ein Gefangener nicht frei kommt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$ die Ziffern der Gefangenen. Der i -te Gefangene sieht also a_{i+1}, \dots, a_n und hat selber die Ziffer a_i auf dem Rücken.

Der erste Gefangene gibt nun als Antwort folgende Ziffer:

$$\sum_{i=2}^n a_i \text{ modulo } 2.$$

Der zweite Gefangene kennt die Ziffern a_3, \dots, a_n und berechnet nun (modulo zwei)

$$\underbrace{\sum_{i=2}^n a_i}_{\text{Information vom ersten Gefangenen}} - \underbrace{\sum_{i=3}^n a_i}_{\text{Information welcher der zweite Gefangene sieht}} \equiv a_2 \text{ modulo } 2.$$

Der dritte Gefangene kennt die Ziffern a_4, \dots, a_n und hat die bisherigen Antworten gehört. Er berechnet nun (modulo zwei)

$$\underbrace{\sum_{i=2}^n a_i}_{\text{Information vom ersten Gefangenen}} - \underbrace{\sum_{i=4}^n a_i}_{\text{Information welcher der dritte Gefangene sieht}} - \underbrace{a_2}_{\text{Information vom zweiten Gefangenen}} \equiv a_3 \text{ modulo } 2.$$

Es ist nun offensichtlich, dass sich auch die verbleibenden Gefangenen retten können. \square

13.2. Das Gefangenenproblem II: Abzählbar viele Gefangene.

Nun nehmen wir an, dass Gefängnis besitzt unendlich viele (jedoch abzählbar viele) Gefangene, welche wieder in einer Reihe aufgestellt werden sollen. Wieviele Gefangene können dieses mal gerettet werden? Der obige Algorithmus kann natürlich nicht mehr direkt angewendet werden, nachdem der Ausdruck

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i \text{ modulo } 2$$

keinen Sinn ergibt. Genauer gesagt, dieser Ausdruck ergibt keinen Sinn, wenn es unendlich viele a_i 's gibt, welche den Wert '1' annehmen.

Eine erste Idee möglich viele Gefangene zu retten wäre wie folgt: Man wähle ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Die Gefangenen können dann die unendlich vielen Gefangene in Blöcke von N Gefangenen unterteilen, und dann den obigen Algorithmus auf jeweils diese Blöcke anwenden. Dadurch werden alle Gefangenen gerettet, welche nicht an der $k \cdot N + 1$ -ten Stelle für ein $k \in \mathbb{N}$ stehen. Etwas salopp gesprochen, ein 'beliebig großer Prozentsatz' der Gefangenen kann gerettet werden. Allerdings gibt es immer unendlich viele Gefangene, die nicht frei kommen werden.

Es stellt sich nun folgende Frage:

Frage. Gibt es einen Algorithmus, bei dem nur endlich viele Gefangene nicht frei kommen?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir etwas ausholen. Sei erstmal

$$X := \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1\}\}$$

die Menge aller Folgen von Ziffern 0 und 1. Man kann den Beweis, dass die Menge aller reellen Zahlen überabzählbar ist, leicht adaptieren und zeigen, dass X eine überabzählbare Menge ist.

Wir führen jetzt folgende Äquivalenzrelation auf X ein:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ und } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{stimmen bis auf endlich} \\ \text{viele Folgenglieder über ein.} \end{array}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen nun mit $Y := X / \sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen, d.h. $Y = X / \sim$ ist insbesondere eine Menge von Teilmengen von X , welche paarweise disjunkt sind.

Wir erinnern jetzt an das Auswahlaxiom der Mengenlehre:

Auswahlaxiom der Mengenlehre. *Es sei A eine Menge und $B = \{B_i\}_{i \in I}$ eine Menge von Teilmengen von A , welche paarweise disjunkt sind. Dann gibt es eine Menge $C \subset A$, so dass jede Teilmenge in B genau ein Element in A enthält.*

Etwas salopp gesprochen besagt das Auswahlaxiom, dass man aus jeder Teilmenge B_i genau ein Element herausnehmen (oder auswählen) kann.

Beispiel. Es sei

$$A = \mathbb{Z} \text{ und } B = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}.$$

Die Elemente der Menge B sind also paarweise disjunkte Teilmengen von A . Dann hat z.B.

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

die gewünschte Eigenschaft. Es gibt aber viele andere Teilmengen von \mathbb{Z} , welche die gewünschte Eigenschaft besitzen, z.B.

$$C' = \{-3, 11, 25, 19, -22\} \text{ oder } C'' = \{13, -4, 12, -100, 4\}.$$

Das Auswahlaxiom besagt nun, dass solch ein C für beliebige A und B existiert, nicht nur für endliche Mengen.¹⁰¹

Wir haben nun alles Handwerkzeug um folgenden Satz zu beweisen:

Satz 13.2. *Es gibt einen Algorithmus, so dass höchstens ein Gefangener nicht frei kommt.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$X := \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \mid b_i \in \{0, 1\}\}$$

und die Menge aller Äquivalenzklassen, d.h. $Y = X/\sim$. Wir wenden darauf das Auswahlaxiom der Mengenlehre an und erhalten eine Menge $C \subset X$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Jeder Gefangene merkt sich jetzt die Menge C , d.h. die Gefangenen merken sich für jede Äquivalenzklasse von Folgen genau das gleiche eine Element.

¹⁰¹Das Auswahlaxiom ist nicht unumstritten und besitzt eine lange Geschichte. Wer sich für die Grundlagen der Mathematik und für Geschichte interessiert, demjenigen oder derjenigen sei

Nach dieser Vorbereitung stellen sich die Gefangenen in einer Reihe auf. Wir bezeichnen wieder mit

$$a_1, a_2, a_3, \dots \text{ mit } a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1\}$$

die Ziffern der Gefangenen.

Der erste Gefangene sieht also die Folge

$$F_1 := a_2, a_3, a_4, \dots,$$

dies ist insbesondere eine Folge in X . Er wählt sich nun den vereinbarten Repräsentanten

$$B := b_2, b_3, b_4, \dots$$

dieser Äquivalenzklasse. Er betrachtet nun die Folge

$$a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4, \dots$$

nachdem die Folgen F_1 und B in der gleichen Äquivalenzklasse liegen sind nur endlich viele Folgenglieder der Differenzfolgen $F_1 - B$ ungleich Null. Der erste Gefangene gibt nun also Antwort:

$$\text{sum}_{i=2}^{\infty} (a_i - b_i) \text{ modulo } 2.$$

Der zweite Gefangene sieht die Folge

$$a_3, a_4, a_5, \dots$$

er kennt seine eigene Ziffer nicht, und betrachtet deswegen die Folge

$$F_2 := 0, a_3, a_4, a_5, \dots$$

dies ist insbesondere eine Folge in X , *welche in der gleichen Äquivalenzklasse wie F_1 liegt*, er wählt sich nun den gleichen vereinbarten Repräsentanten B dieser Äquivalenzklasse. Die eigene Ziffer bestimmt der zweite Gefangene nun durch

$$\underbrace{\sum_{i=2}^n (a_i - b_i)}_{\substack{\text{Information} \\ \text{vom ersten} \\ \text{Gefangenen}}} - \underbrace{\sum_{i=3}^n (a_i - b_i) - b_2}_{\substack{\text{Information} \\ \text{welcher der zweite} \\ \text{Gefangene sieht}}} \equiv a_2 \text{ modulo } 2.$$

Der dritte Gefangene sieht die Folge

$$a_4, a_5, a_6, \dots$$

und betrachtet deswegen die Folge

$$F_3 := 0, 0, a_4, a_5, a_6, \dots$$

dies ist insbesondere eine Folge in X , welche in der gleichen Äquivalenzklasse wie F_1 und F_2 liegt, er wählt sich nun den gleichen vereinbarten Repräsentanten B dieser Äquivalenzklasse. Die eigene Ziffer bestimmt der dritte Gefangene nun durch

$$\underbrace{\sum_{i=2}^n (a_i - b_i)}_{\substack{\text{Information} \\ \text{vom ersten} \\ \text{Gefangenen}}} - b_2 - b_3 - \underbrace{\sum_{i=4}^n (a_i - b_i)}_{\substack{\text{Information} \\ \text{welcher der dritte} \\ \text{Gefangene sieht}}} - \underbrace{a_2}_{\substack{\text{Information} \\ \text{vom zweiten} \\ \text{Gefangenen}}} \equiv a_3 \text{ modulo } 2.$$

Es ist nun offensichtlich, dass sich auch die verbleibenden Gefangenen retten können. \square

Nachdem die Menge C überabzählbar ist, jede Äquivalenzklasse jedoch abzählbar ist, folgt, dass C eine überabzählbare Menge ist. Die Lösung des Problems beruht also auf den nicht immer ganz praktikablen Annahmen, dass

- (1) das Auswahlaxiom der Mengenlehre gültig ist,
- (2) jedem Gefangenen ein überabzählbarer Speicher zur Verfügung steht,
- (3) jeder Gefangene unendlich viele Rechenschritte (Differenz der Folgen) durchführen kann.

14. DER GAUSSSCHE INTEGRALSATZ

14.1. Untermannigfaltigkeiten mit Rand. Wir erweitern jetzt den Begriff von Untermannigfaltigkeiten etwas:

Definition. (1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn ¹⁰² es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Karte um a gibt, d.h. einen Diffeomorphismus $\Phi: U \rightarrow V$ zwischen einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\Phi(M \cap U) = H_k \cap V,$$

wobei

$$H_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \text{ und } x_k \geq 0\},$$

¹⁰²Hinweis: in der Vorlesung hatten wir solche Objekte ‘Untermannigfaltigkeiten mit Rand’ genannt. Dies hatte zur Konsequenz, dass M eine ‘Untermannigfaltigkeit mit Rand’ sein konnte, obwohl die Menge der Randpunkte $\partial M = \emptyset$. Wir verwenden hier im Skript deswegen den Begriff ‘Untermannigfaltigkeit mit Rand’ nur für Untermannigfaltigkeiten, für welche $\partial M \neq \emptyset$.

d.h. H_k ist eine k -dimensionale Halbebene.

- (2) Wir bezeichnen mit ∂M die Menge aller Punkte a in M , so dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt mit

$$\Phi(a) \in E_{k-1} \subset H_k.$$

Die Menge ∂M nennen wir den *Rand von M* .

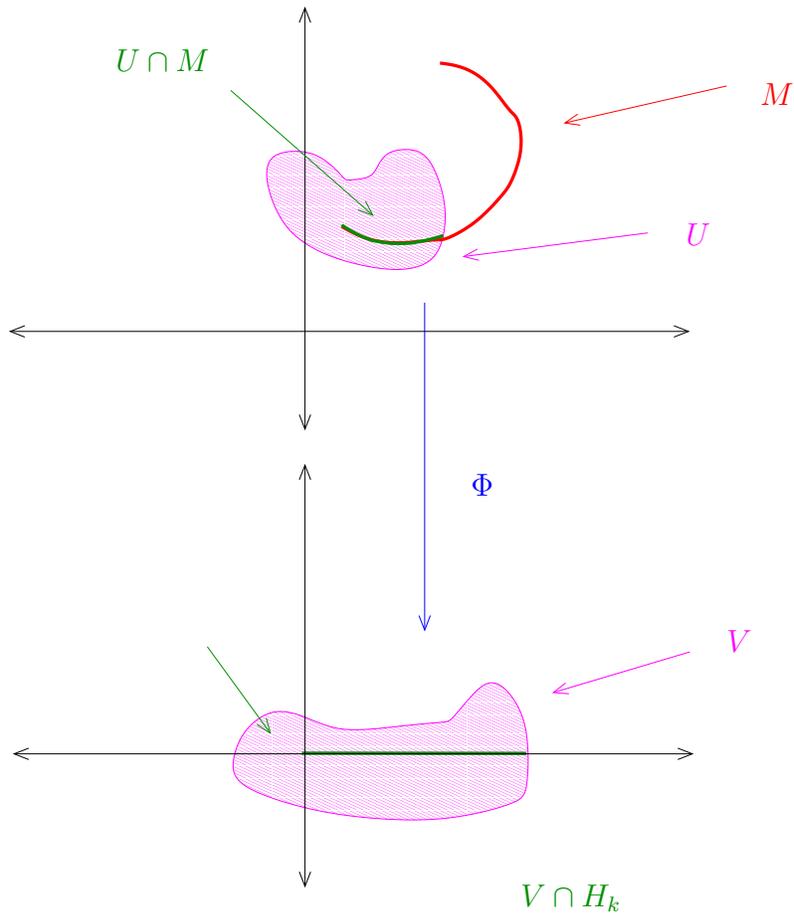


ABBILDUNG 2. Schematisches Bild einer Untermannigfaltigkeit.

Beispiel. (1) Der Zylinder

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z \in (-1, 1]\}$$

ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 1\}.$$

(Siehe Übungsaufgabe 1 von Übungsblatt 12.)

(2) Die Menge

$$H_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \text{ und } x_k \geq 0\},$$

ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial H_k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \text{ und } x_k = 0\}.$$

(3) Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit im Sinne von Kapitel 12.1. Dann M erfüllt auch die obige Definition einer ‘ k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand’, wobei dann $\partial M = \emptyset$. Beispielsweise ist

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit mit $\partial X = \emptyset$. Es gibt also keine Punkte auf X , welche die Bedingung (2) in der obigen Definition erfüllen.

Bemerkung. Unglücklicherweise gibt es nun zwei verschiedene Definitionen von ‘Rand’. Zur Erinnerung, in Analysis II hatten wir folgende Definition: Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, dann hatten wir den ‘topologischen’ Rand von A in \mathbb{R}^n definiert als

$$\partial A := \left\{ x \in A \mid \begin{array}{l} \text{jede offene Umgebung von } x \text{ enthält einen Punkt in } A \\ \text{und einen Punkt außerhalb von } A. \end{array} \right\}.$$

Der topologische Rand von

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

ist also die Einheitsphäre, der Rand von X aufgefasst als Untermannigfaltigkeit ist hingegen die leere Menge. Ein noch extremeres Beispiel ist gegeben durch

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

dann ist der topologische Rand von $Y \subset \mathbb{R}^2$ ganz Y , aber der Rand von Y aufgefasst als Untermannigfaltigkeit ist wiederum die leere Menge. Wenn wir ab jetzt von ‘Rand’ reden, meinen wir immer den ‘Untermannigfaltigkeitsrand’.

Man kann Satz 8.5 aus der Analysis II ohne größere Probleme verallgemeinern, und folgenden Satz beweisen:

Satz 14.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ reguläre Werte. Dann ist $M := f^{-1}([z_1, z_2]) \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit*

$$\partial M = f^{-1}(z_1) \cup f^{-1}(z_2).$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2. \end{aligned}$$

Dann sind 1 und -1 reguläre Werte¹⁰³. Es folgt aus Satz 14.1, dass

$$f^{-1}([-1, 1]) \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \in [-1, 1]\} = B^n$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit Rand

$$f^{-1}(-1) \cup f^{-1}(1) = \emptyset \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}$$

ist.

Satz 14.2. *Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ∂M eine $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

Beweisskizze. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Die Einschränkungen der Karten von M auf den Rand ∂M definieren Karten für ∂M .¹⁰⁴ \square

Im Folgenden verwenden wir folgende Sprechweisen:

- (1) ‘Untermannigfaltigkeit’ kann heißen $\partial M = \emptyset$ oder $\partial M \neq \emptyset$,
- (2) ‘Untermannigfaltigkeit mit Rand’ bedeutet eine Untermannigfaltigkeit M mit $\partial M \neq \emptyset$,
- (3) ‘geschlossene Untermannigfaltigkeit’ bedeutet eine kompakte Untermannigfaltigkeit M mit $\partial M = \emptyset$.

Beispielsweise ist

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit mit $\partial X = \emptyset$, aber X ist keine geschlossene Untermannigfaltigkeit.

Wir werden im Folgenden auch noch folgende Definitionen verwenden:

Definition. Eine *Hyperfläche* in \mathbb{R}^n ist eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Kodimension 1, d.h. eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ in \mathbb{R}^n .

Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen A ist *zusammenhängend*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} M = U \cup V \text{ wobei } U, V \text{ offene} \\ \text{disjunkte Teilmengen von } A \end{aligned} \Rightarrow U = A \text{ oder } V = A.$$

¹⁰³Warum ist -1 ein regulärer Wert?

¹⁰⁴Diese ‘Beweisskizze’ klingt sehr überzeugend und ist auch richtig, allerdings ist der Beweis, dass die Einschränkungen der Karten von M auf den Rand ∂M in der Tat Karten für ∂M definieren nicht ganz trivial.

Bemerkung. (1) Eine Teilmenge A ist also *nicht zusammenhängend*, wenn es disjunkte offene Teilmengen $U, V \subset M$ mit $M = U \cup V$ gibt, so dass $U \neq M$ und $V \neq M$.

(2) Man kann leicht zeigen, dass A *zusammenhängend* ist, genau dann, wenn gilt:

$$M = U \cup V \text{ wobei } U, V \text{ abgeschlossene disjunkte Teilmengen von } A \Rightarrow U = \emptyset \text{ oder } V = \emptyset.$$

Beispiel. Betrachten wir

$$A = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R},$$

dann ist A nicht zusammenhängend. In der Tat, betrachten wir zuerst $U = [0, 1] \subset A$. Dann ist U offen in A , nachdem ¹⁰⁵

$$U = [0, 1] = \underbrace{\left(-1, \frac{3}{2}\right)}_{\text{offen in } \mathbb{R}} \cap A.$$

Genauso zeigt man, dass $V = [2, 3]$ offen in A ist. Wir können also A schreiben als die Vereinigung der disjunkten offenen Mengen U und V .

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und es seien $x, y \in A$. Ein *Weg in A von x nach y* ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wir sagen A ist *wegzusammenhängend*, wenn gilt: Der folgende Satz wird in Übungsblatt 12 bewiesen. Man beachte, dass die Aussage des Satzes *nicht* für beliebige Teilmengen von \mathbb{R}^n gilt.

Satz 14.3. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$M \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow M \text{ ist wegzusammenhängend.}$$

14.2. Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Ein *Vektorfeld* auf M ist eine Abbildung $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir sagen v ist stetig (stetig differenzierbar, C^k , etc.) wenn die Koordinatenfunktionen von v stetig (stetig differenzierbar, C^k , etc.) sind. ¹⁰⁶

Etwas salopp gesprochen ordnet ein Vektorfeld jedem Punkt in M einen Vektor zu. Vektorfelder (z.B. das magnetische Feld, Gravitationsfeld, aber auch Windrichtung etc.) spielen eine wichtige Rolle in der Physik.

¹⁰⁵Zur Erinnerung, wenn $A \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt eine Teilmenge $U \subset A$ offen, wenn es eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ (im üblichen Sinne) gibt, so dass $U = A \cap V$.

¹⁰⁶Wir haben in Kapitel 12.2 definiert, was es heißt, dass eine reellwertige Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit stetig, differenzierbar etc. ist.

Definition. Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf M .

- (1) F heißt *Tangentialvektorfeld*, wenn $F(P) \in T_P M$ für alle $P \in M$,
- (2) F heißt *Normalenfeld*, wenn $F(P) \perp T_P M$ für alle $P \in M$,
- (3) F heißt *normiert*, wenn $\|F(P)\| = 1$ für alle $P \in M$.

Satz 14.4. *Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine geschlossene Hyperfläche. Dann gilt:*

- (1) N besitzt ein normiertes stetiges Normalenfeld,
- (2) jedes normierte stetige Normalenfeld auf N ist ein C^∞ -Vektorfeld,
- (3) wenn N zudem zusammenhängend ist, dann besitzt N genau zwei normierte Normalenfelder v und w , wobei $v = -w$.

Beweisskizze. (1) Man kann zeigen, dass es eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\partial M = N$.¹⁰⁷ Zu jedem Punkt $P \in \partial M$ gibt es nun genau einen Vektor $\nu(P) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $\nu(P) \perp T_P(\partial M)$,
- (b) $\|\nu(P)\| = 1$,
- (c) es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $P + t \cdot \nu(P) \notin M$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$.

(Ein Beweis dieser Aussage wird in Forster, Analysis III Seite 151 gegeben.) Wir nennen dann ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M .

- (2) Diese Aussage kann man z.B. dadurch zeigen, dass man N lokal als Graph einer Funktion (siehe Forster, Analysis II) schreibt. Wir unterlassen die Ausführung des Beweises aus Zeitgründen.
- (3) Wenn N zusammenhängend sind, dann kann man zeigen, dass die Vektorfelder ν und $-\nu$ die einzigen normierten Normalenfelder auf N sind.

□

Bemerkung. Es sei $N \subset \mathbb{R}^3$ das Möbiusband, dann ist N eine Hyperfläche, aber N besitzt kein normiertes stetiges Normalenfeld. Dies ist bildlich klar, ein sauberer Beweis ist allerdings etwas aufwändig. Wir

¹⁰⁷Die Idee des Beweises ist wie folgt: Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine geschlossene zusammenhängende Hyperfläche. Für $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ schreiben wir

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{es gibt einen Weg in } \mathbb{R}^n \setminus N \text{ von } x \text{ nach } y.$$

Nachdem N eine geschlossene zusammenhängende Hyperfläche ist, kann man nun zeigen, dass es genau zwei Äquivalenzklassen A und B gibt. Eine Äquivalenzklasse (o.B.d.A. A) ist beschränkt, die andere ist unbeschränkt. Dann ist $M = A \cup N$ die gewünschte kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

¹⁰⁸Diese Eigenschaft ist die mathematische Formalisierung der Aussage ‘ $\nu(P)$ zeigt nach außen’.

sehen also, dass die Voraussetzung, dass N geschlossen ist, i.a. eine notwendige Voraussetzung ist.

Definition. Eine *orientierte Hyperfläche* ist ein Paar (N, ν) wobei N eine Hyperfläche ist und ν ein normiertes stetiges Normalenfeld auf N ist. Jede geschlossene zusammenhängende Hyperfläche besitzt nach Satz 14.4 genau zwei Orientierungen, d.h. genau zwei normierte stetige Normalenfelder.

Beispiel. Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $N = \partial M$ eine geschlossene Hyperfläche und wir nennen das im Beweis von Satz 14.4 konstruierte Einheitsnormalenfeld auf N das *äußere Einheitsnormalenfeld*.

Beispiel. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ reguläre Werte. Nach Satz 14.1 ist $M := f^{-1}([z_1, z_2]) \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$\partial M = f^{-1}(z_1) \cup f^{-1}(z_2).$$

Aus Satz 8.5 aus der Analysis II folgt zudem, dass der äußere Einheitsnormalenvektor gegeben ist durch

$$\nu(P) = \frac{1}{\|\text{grad } f(P)\|} \text{grad } f(P) \text{ für } P \in f^{-1}(z_2)$$

und¹⁰⁹

$$\nu(P) = - \frac{1}{\|\text{grad } f(P)\|} \text{grad } f(P) \text{ für } P \in f^{-1}(z_1).$$

Insbesondere ist für $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} = \partial D^n$ der äußere Einheitsnormalenvektor gegeben durch $\nu(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

14.3. Formulierung des Gaußschen Integralsatzes. Bevor wir den Gaußschen Integralsatz formulieren können benötigen wir noch zwei weitere Definitionen:

Definition. Es sei (N, ν) eine orientierte kompakte Hyperfläche in \mathbb{R}^n und es sei $F: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Die Funktion

$$\begin{array}{l} N \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \underbrace{F(P) \cdot \nu(P)}_{\text{Skalarprodukt}} \end{array}$$

¹⁰⁹Das Minuszeichen rührt daher, dass das Normalenfeld ‘nach außen’ zeigen soll.

ist dann eine stetige Funktion auf der kompakten Untermannigfaltigkeit N , insbesondere integrierbar. Das Integral

$$\int_N F \cdot \nu$$

wird der *Fluss des Vektorfeldes F durch die orientierte Hyperfläche N* genannt.

Definition. Es sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und

$$F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren dann die *Divergenz von F* als

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \operatorname{div} F(P) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(P). \end{aligned}$$

Wir können nun den Gaußschen Integralsatz formulieren:

Satz 14.5. (Gaußscher Integralsatz) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Es sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$

In Worten ausgedrückt besagt der Gaußsche Integralsatz folgendes: für eine kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Kodimension Null gilt

$$\begin{array}{l} \text{Integral der Divergenz eines} \\ \text{Vektorfeldes } F \text{ auf } M \end{array} = \begin{array}{l} \text{Der Fluß von } F \text{ durch die} \\ \text{'Oberfläche' von } M. \end{array}$$

Beispiel. Wir wollen die Aussage des Gaußschen Integralsatz im Spezialfall $n = 1$ nachvollziehen. Dann gilt:

- (1) eine kompakte 1-dimensionale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R} ist ein kompaktes Intervall $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, wobei $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$,
- (2) ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf M ist eine stetig differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow \mathbb{R}$,
- (3) die Divergenz von F ist die Ableitung F' von F ,
- (4) der äußere Einheitsnormalenvektor in a ist -1 und der äußere Einheitsnormalenvektor in b ist 1 .

Der Gaußsche Integralsatz besagt also, dass ¹¹⁰

$$\begin{aligned} \int_a^b F' dx &= \int_{[a,b]} \operatorname{div} F \\ &= \int_{\partial[a,b]} F \cdot \nu = \int_{\{a\}} F \cdot \nu + \int_{\{b\}} F \cdot \nu = F(a) \cdot (-1) + F(b) \cdot 1 = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Im Falle $n = 1$ ist der Gaußsche Integralsatz also äquivalent zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis I.

14.4. Beweis des Gaußschen Integralsatzes I: Quader. Die Aussage des Gaußschen Integralsatzes gilt unter bestimmten Voraussetzungen auch für Vektorfelder auf ‘ n -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten mit Rand und Kanten’. Wir wollen das jetzt nicht präzise formulieren, aber wir wollen dies für einen Quader formulieren und beweisen.

Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \text{ wobei } a_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

ein Quader. Wir bezeichnen mit S_1, \dots, S_{2n} die Seitenflächen des Würfels (jeweils ohne Rand). Wir bezeichnen mit ν_1, \dots, ν_{2n} die äußeren Einheitsnormalenfelder auf S_1, \dots, S_{2n} . Für ein Vektorfeld $F: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir dann

$$\int_{\partial Q} F \cdot \nu := \sum_{i=1}^{2n} \int_{S_i} F \cdot \nu_i.$$

Wir können jetzt folgenden Satz formulieren und beweisen:

Satz 14.6. *Es sei*

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

ein Quader und es sei $F: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_Q \operatorname{div} F = \int_{\partial Q} F \cdot \nu.$$

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen beweisen wir den Satz für den Fall $n = 2$. Wir betrachten den Quader $[a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$ und es

¹¹⁰Hierbei benützen wir folgende Aussage: Es sei $N = \{P_1, \dots, P_l\}$ eine null-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann folgt aus der Definition des Integrales einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit, dass

$$\int_N f = f(P_1) + \cdots + f(P_l).$$

sei $F = (F_x, F_y) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir wollen also

$$(14.1) \quad \int_Q \operatorname{div} F = \int_Q \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)$$

bestimmen. Wir betrachten die beiden Summanden getrennt. Aus dem Satz von Fubini und aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass

$$(14.2) \quad \begin{aligned} \int_Q \frac{\partial F_x}{\partial x} &= \int_{[a_x, b_x] \times [a_y, b_y]} \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ &= \int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{a_y}^{b_y} [F_x(x, y)]_{x=a_x}^{x=b_x} \, dy \\ &= \int_{a_y}^{b_y} F_x(b_x, y) - F_x(a_x, y) \, dy \\ &= \int_{a_y}^{b_y} F_x(b_x, y) \, dy + \int_{a_y}^{b_y} F_x(a_x, y) \cdot (-1) \, dy. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Beitrag der Seite $b_x \times (a_y, b_y)$ zu $\int_{\partial Q} F \cdot \nu$. Dieser beträgt

$$\int_{a_y}^{b_y} \underbrace{(F_x(b_x, y), F_y(b_x, y))}_{=F(b_x, y)} \cdot \underbrace{(1, 0)}_{=\nu(b_x, y)} \, dy = \int_{a_y}^{b_y} F_x(b_x, y) \, dy.$$

Zudem ist der Beitrag der Seite $a_x \times (a_y, b_y)$ zu $\int_{\partial Q} F \cdot \nu$ wie folgt:

$$\int_{a_y}^{b_y} \underbrace{(F_x(a_x, y), F_y(a_x, y))}_{=F(a_x, y)} \cdot \underbrace{(-1, 0)}_{=\nu(b_x, y)} \, dy = \int_{a_y}^{b_y} -F_x(a_x, y) \, dy.$$

Wir sehen also, dass die beiden Summanden in (14.2) genau den Beiträgen der Seiten $b_x \times (a_y, b_y)$ und $a_x \times (a_y, b_y)$ zu $\int_{\partial Q} F \cdot \nu$ entsprechen.

Mit der gleichen Argumentation zeigt man, dass der zweite Summand von 14.1 genau den Beiträgen der anderen beiden Seiten von ∂Q entspricht. \square

Wir sagen im Folgenden, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ ein *offener Quader* ist, wenn es einen Quader Q gibt, so dass $U = Q \setminus \partial Q$. Wir erhalten jetzt folgendes Korollar zu Satz 14.6:

Korollar 14.7. *Es U ein offener Quader und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{Supp}(F) \subset U$. Dann gilt*

$$\int_U \operatorname{div} F = 0.$$

Beweis. Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ein Quader mit $U = Q \setminus \partial Q$. Dann gilt nach Satz 14.6, dass

$$\int_Q \operatorname{div} F = \int_{\partial Q} F \cdot \nu.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist aber trivialerweise Null, nachdem F auf den Seitenflächen von Q verschwindet. \square

14.5. Beweis des Gaußschen Integralsatzes II: Stempel. Wir wollen jetzt die Aussagen aus dem vorherigen Kapitel erweitern. Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

ein Quader und $g: Q \rightarrow (0, \infty)$ eine C^∞ -Funktion. Wir nennen

$$S := \{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } y \in [0, g(x)]\}$$

einen *Stempel*. Wir nennen

$$\partial_0 S := \{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } y = g(x)\}$$

die Stempelfläche. Wir bezeichnen mit

$$\partial_1 S := \partial S \setminus \partial_0 S$$

den Rest des Randes von S . Wie üblich bezeichnen wir mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂S (außerhalb der Kanten).

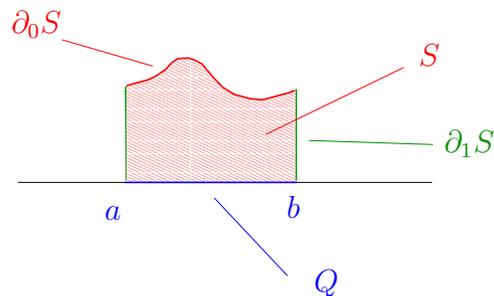


ABBILDUNG 3. Schematisches Bild eines Stempels.

Der folgende Satz entspricht (mit anderen Formulierungen), dem Lemma auf Seite 152 von Forster, Analysis III.

Satz 14.8. *Es sei S ein Stempel und $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so dass F in einer offenen Umgebung von $\partial_1 S$ verschwindet. Dann gilt*

$$\int_S \operatorname{div} F = \int_{\partial S} F \cdot \nu.$$

Der Beweis besteht aus einer heroischen Rechnung und beruht wiederum darauf, die Aussage des Satzes auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis I zurückzuführen.

Beweis. Es sei S ein Stempel und

$$F = (F_1, \dots, F_n) :: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so dass F in einer offenen Umgebung von $\partial_1 S$ verschwindet. Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

ein Quader und $g: Q \rightarrow (0, \infty)$ eine C^∞ -Funktion, welche den Stempel S beschreiben. Das äußere Einheitsnormalenfeld auf $\partial_0 S$ ist dann wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) : \partial_0 S &\mapsto \mathbb{R}^n \\ (x, g(x)) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g(x)\|^2}} (-\text{grad}(x), 1). \end{aligned}$$

Nachdem F in einer offenen Umgebung von $\partial_1 S$ verschwindet, folgt, dass

$$\int_{\partial S} F \cdot \nu = \int_{\partial_0 S} F \cdot \nu.$$

Es genügt also folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\int_S \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \int_{\partial_0 S} F_i \cdot \nu_i.$$

Wir betrachten zuerst die Untermannigfaltigkeit $\partial_0 S$. Eine Karte Φ für $\partial_0 S$ ist gegeben durch die Umkehrung der Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: Q \times \mathbb{R} &\rightarrow Q \times \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n). \end{aligned}$$

Für $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ erhalten wir also, dass

$$\begin{aligned} \text{Gram}_\Phi(x') &= \text{Gram}((D_{x'}\Phi^{-1})(e_1) \dots (D_{x'}\Phi^{-1})(e_{n-1})) \\ &= \text{Gram} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= 1 + \|\text{grad } g(x)\|^2 \end{aligned}$$

(Siehe Forster, Analysis III Seite 142 für die letzte Gleichheit.) Für eine Funktion f auf $\partial_0 S$ gilt dann also nach Definition, dass

$$\int_{\partial_0 S} f = \int_Q f(\Psi(x')) \cdot \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(x)\|^2} dx'.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle im Beweis der Behauptung:

(A) Sei zuerst $i = n$. Dann folgt aus dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung¹¹¹, dass

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial F_n}{\partial x_n} &= \int_Q \left(\int_0^{g(x')} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n \right) dx' \\ &= \int_Q F_n(x', g(x')) dx' \\ &= \int_Q F_n(\Psi(x')) dx' \\ &= \int_Q F_n(\Psi(x')) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(x)\|^2}} \cdot \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(x)\|^2} dx' \\ &= \int_{\partial_0 S} F_n \cdot \nu_n. \end{aligned}$$

(B) Sei nun $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Dieser Fall folgt wie der Fall (A) aus den Definitionen, dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe Forster, Analysis III Seite 153). \square

Es sei nun S ein Stempel und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, wir nennen dann

$$P + S := \{P + Q \mid Q \in S\}$$

einen *verschobenen Stempel*. Es ist leicht zu sehen, dass die Aussage von Satz 14.8 auch für verschobene Stempel gilt.

14.6. Beweis des Gaußschen Integralsatzes III: Der allgemeine Fall. Wir wollen jetzt endgültig den Gaußschen Integralsatz beweisen:

Satz 14.9. (Gaußscher Integralsatz) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$

Beweisskizze. Wir wollen zuerst folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es gibt einen Atlas $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i=1, \dots, k}$ und $l \in \{1, \dots, k\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für alle i ist Φ_i die Identitätsabbildung,
- (2) für $i = 1, \dots, l$ ist U_i ein offener Quader und $U_i \subset M \setminus \partial M$,

¹¹¹Angewandt auf $x_n \mapsto F_n(x', x_n)$ (für fest gewähltes $x' \in Q$)

- (3) für $i = l + 1, \dots, k$ gibt es eine Permutationsabbildung ¹¹² P_i , so dass $P_i(U_i) \cap M$ ein verschobener Stempel mit Stempelfläche $P_i(U_i) \cap \partial M$ ist.

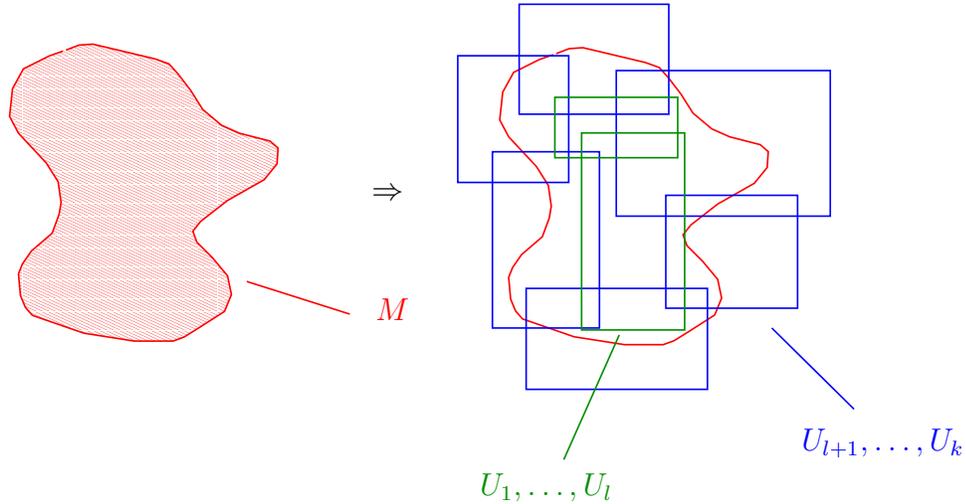


ABBILDUNG 4. Schematisches Bild der Quader U_1, \dots, U_k .

Sei $X \in M$ beliebig.

(A) Wenn $X \in M \setminus \partial M$ liegt, dann gibt es einen Quader ¹¹³ Q_X , welcher X enthält, und so dass $Q_X \cap \partial M = \emptyset$. Wir bezeichnen nun mit U_X den zu Q gehörigen offenen Quader.

(B) Sei nun $X \in \partial M$. Die Untermannigfaltigkeit ∂M ist nach Forster, Analysis II, Seite 105 ‘lokal ein Graph’. D.h. es gibt eine Permutationsabbildung P_X , einen Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

ein Intervall $[c, d]$ und $g: Q \rightarrow [c, d]$ eine C^∞ -Funktion, so dass

$$M \cap Q \times [c, d] = \text{Graph von } g = \{(x, y) \mid x \in Q \text{ und } y \in [0, g(x)]\}.$$

¹¹²D.h. es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$, so dass

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

¹¹³Hier bezeichnen wir als Quader jede Teilmenge von \mathbb{R}^n von der Form:

$$Q = X + [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \text{ wobei } X \in \mathbb{R}^n \text{ und } a_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Es ist offensichtlich, dass Satz 14.6 auch für solche ‘verschobenen’ Quader gilt.

Wir bezeichnen nun mit U_X den zu $Q \times [c, d]$ gehörigen offenen Quader. Nach eventueller Einschränkung des Quaders können wir annehmen, dass $U_X \cap M$ ein verschobener Stempel ist.

Nachdem die offene Menge $\{U_X\}_{X \in M}$ die Untermannigfaltigkeit M überdecken, und nachdem M kompakt ist, gibt es endliche viele $X_1, \dots, X_k \in M$, so dass $M \subset U_{X_1} \cup \dots \cup U_{X_k}$. Die dazugehörigen Karten bilden nun (möglicherweise nach einer Umnummerierung) den gewünschten Atlas. Wir haben damit die Behauptung bewiesen.

Nach Satz 12.7 existiert nun eine C^∞ Zerlegung $\{z_i : M \rightarrow [0, 1]\}_{i=1, \dots, r}$ der Eins bzgl. der offenen Überdeckung U_1, \dots, U_k , d.h. es gibt C^∞ -Funktionen $z_1, \dots, z_r : M \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $z_1 + \dots + z_r = 1$,
- (2) für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$, so dass $\text{Supp}(z_i) \subset U_j$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M \text{div} F &= \int_M \text{div}(\sum_{i=1}^r z_i F) = \sum_{i=1}^r \int_M \text{div}(z_i F), \text{ und} \\ \int_{\partial M} F \cdot \nu &= \int_{\partial M} (\sum_{i=1}^r z_i F) \cdot \nu = \sum_{i=1}^r \int_{\partial M} (z_i F) \cdot \nu. \end{aligned}$$

Es genügt also den Satz für die Vektorfelder $z_i F$, $i = 1, \dots, r$ zu beweisen.

Es sei also $i \in \{1, \dots, r\}$. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$, so dass $\text{Supp}(z_i) \subset U_j$. Wenn $j \in \{1, \dots, l\}$, dann folgt die Aussage aber aus Korollar 14.7, und wenn $j \in \{l+1, \dots, r\}$ dann folgt die Aussage aus Satz 14.8. \square

15. PFAFFSCHE FORMEN

15.1. Duale Vektorräume. Es sei V ein reeller Vektorraum. Wir bezeichnen dann mit

$$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

den zu V dualen Vektorraum. Es sei nun v_1, \dots, v_k eine Basis von V . Jeder Vektor $w \in V$ kann also eindeutig als Linearkombination

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

geschrieben werden. Für $i = 1, \dots, k$ betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} v_i^* : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto v_i^*(w) := \begin{array}{l} \text{Koeffizient von } v_i \text{ in der eindeutigen Darstellung} \\ \text{von } w \text{ als Linearkombination von } v_1, \dots, v_k. \end{array} \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, die Abbildungen $v_1^*, \dots, v_k^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ sind die eindeutig bestimmten Abbildungen, welche die Eigenschaft besitzen,

dass

$$w = v_1^*(w)v_1 + \cdots + v_k^*(w)v_k \text{ für alle } w \in V.$$

Man kann nun leicht zeigen, dass v_1^*, \dots, v_k^* lineare Abbildungen sind, und dass v_1^*, \dots, v_k^* eine Basis von V^* bilden. Insbesondere bildet V^* einen reellen Vektorraum der Dimension $k = \dim(V)$. Wir nennen $v_1^*, \dots, v_k^* \in V^*$ die zu v_1, \dots, v_k duale Basis.

Wenn V endlich dimensional ist, dann gibt es zu jeder *Basis* von V eine eindeutig bestimmte duale *Basis* von V^* . Man beachte allerdings, dass man nicht jedem *Vektor* in V einen eindeutig bestimmten *Vektor* in V^* zuordnen kann.

15.2. Definition und Integrierbarkeit von Pfaffschen Formen.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zur Erinnerung: Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt P , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

gibt, so dass $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt P wird mit $T_P M$ bezeichnet. Wir nennen $T_P M$ den *Tangentenraum* am Punkt P . Wir haben in Analysis II gesehen, dass $T_P M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist.

Wir definieren nun

$$T_P^* M := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_P M, \mathbb{R})$$

den zu $T_P M$ dualen Vektorraum. Dies ist ebenfalls ein k -dimensionaler Vektorraum. Wir nennen Elemente in $T_P^* M$ *Kotangentialvektoren*.

Eine *Pfaffsche Form auf M* (oder auch *Differentialform 1. Ordnung auf M* , oder kürzer *1-Form auf M*) ist eine Abbildung, welche jedem Punkt P in M einen Kotangentialvektor in $T_P^* M$ zuordnet.¹¹⁴

Beispiel. (1) Es sei F ein Vektorfeld auf M , d.h. eine Abbildung, welche jedem Punkt P in M einen Tangentialvektor in $T_P M$ zuordnet. Dann ist die Abbildung, welche jedem Punkt P in M den Kotangentialvektor

$$\begin{aligned} T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \underbrace{v \cdot F(P)}_{\text{Skalarprodukt}} \end{aligned}$$

¹¹⁴Genauer gesagt ist eine Pfaffsche Form ω eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \bigcup_{P \in M} T_P^* M$$

so dass für $P \in M$ gilt, dass $\omega(P) \in T_P^* M$.

zuordnet eine Pfaffsche Form auf M .

- (2) Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Abbildung, welche jedem Punkt P in M den Kotangentenvektor

$$\begin{aligned} df : T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto d_P f(v) \end{aligned}$$

zuordnet eine Pfaffsche Form auf M . Hierbei ist $d_P f(v)$ wie folgt definiert: $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(s) = P$ und $\gamma'(s) = v$, dann definieren wir ¹¹⁵

$$d_P f(v) := (f \circ \gamma)'(s).$$

Diese Form heißt das *totale Differential von f* und wird mit df bezeichnet.

Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. In Analysis II hatten wir gesehen, dass es zu jedem $P \in U$ eine eindeutig bestimmte $m \times n$ -Matrix $D_P f$ (oder auch manchmal $d_P f$ geschrieben) gibt, so dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(P+v) - f(P) - d_P f(v)}{\|v\|} = 0.$$

Aus der Kettenregel der Analysis II folgt nun folgende Aussage: wenn $v \in \mathbb{R}^n$ und wenn $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = v$ ist, dann gilt

$$(15.1) \quad d_P f(v) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Für stetig differenzierbare Abbildungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (oder allgemeiner für stetig differenzierbare Abbildungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$) können wir also die rechte Seite von (15.1) als Definition von $d_P f$ verwenden.

Bemerkung. Es ist möglich eine sinnvolle Definition von Stetigkeit, Differenzierbarkeit etc. von Pfaffschen Differentialformen einzuführen (siehe z.B. Forster, Analysis III Seite 194). Wir unterlassen dies im Moment aus Zeitgründen, werden dies aber später bei der Diskussion von ‘Differentialformen’ nachholen.

Es sei nun $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine stetig differenzierbare Kurve auf M und ω eine stetige Pfaffsche Form auf M . Wir definieren das *Integral der Pfaffschen Form ω über die Kurve γ* wie folgt:

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

¹¹⁵Man kann leicht zeigen, dass $d_P f(v)$ nicht von der Wahl von der Kurve γ abhängt.

Wir integrieren auf der rechten Seite also die Funktion

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \underbrace{\omega_{\gamma(t)} \left(\underbrace{\gamma'(t)} \right)}_{\in T_{\gamma(t)}^* M \in T_{\gamma(t)} M} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, eine Kurve γ definiert für jedes $t \in [a, b]$ einen Vektor $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, eine Pfaffsche Form ordnet solch einem Vektor eine reelle Zahl zu.¹¹⁶ Wir integrieren dann diese Funktion über $[a, b]$.

Der folgende Satz kann als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aufgefasst werden:

Satz 15.1. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zudem sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine stetig differenzierbare Kurve auf M , dann gilt*

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Insbesondere wenn γ eine geschlossene Kurve¹¹⁷ ist, dann gilt

$$\int_{\gamma} df = 0.$$

Beweis. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine stetig differenzierbare Kurve auf M , dann gilt

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \underbrace{(df_{\gamma(t)})(\gamma'(t))}_{=(f \circ \gamma)'(t)} dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Wenn γ geschlossen ist, dann gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$ und es folgt sofort, dass

$$\int_{\gamma} df = 0.$$

□

¹¹⁶Die 'korrekte' Definition der Stetigkeit einer Pfaffschen Form impliziert, dass für jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ die Abbildung

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\omega_{\gamma(t)})(\gamma'(t)). \end{aligned}$$

stetig ist, insbesondere also integrierbar ist.

¹¹⁷Eine Kurve heißt *geschlossen*, wenn der Anfangs- und der Endpunkt übereinstimmen.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine stetige Pfaffsche Form auf M . Wir sagen, ω ist *exakt* (oder *integrierbar*), wenn es eine differenzierbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\omega = df$.

Allerdings ist nicht jede stetige Pfaffsche Form exakt. Wir betrachten

$$M := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Zur Erinnerung, für $(x, y) \in M$ gilt

$$T_{(x,y)}M = (x, y)^\perp = \{\lambda \cdot (-y, x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir betrachten die Pfaffsche Form ω , welche $(x, y) \in M$ den Kotangententialvektor

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}M &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \cdot (-y, x) &\mapsto \lambda \end{aligned}$$

zuordnet. Wir betrachten die geschlossene Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow M \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \omega_{(\cos(t), \sin(t))}(-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Es folgt also aus Satz 15.1, dass ω nicht exakt ist.

15.3. Umparametrisierungen und Integration auf eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -invertierbare Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma \circ \varphi: [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(\varphi(t)) \end{aligned}$$

ebenfalls eine Kurve, welche genau die gleichen Punkte annimmt wie γ . Wir sagen, diese Kurve geht aus der Kurve γ durch *Parametertransformation* φ hervor.

Wir nennen die Parametertransformation φ *orientierungserhaltend*, wenn $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ und wir nennen sie *orientierungsumkehrend*, wenn $\varphi(c) = b$ und $\varphi(d) = a$.

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

d.h. γ durchläuft den Einheitskreis ‘in der Zeit 2π ’ ‘gegen den Uhrzeigersinn’. Die Kurve

$$\begin{aligned}\alpha : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(2t), \sin(2t)),\end{aligned}$$

ist eine Umparametrisierung von γ , wobei die Parametertransformation orientierungserhaltend ist. Die Kurve α durchläuft den Einheitskreis ‘in der Zeit π ’ weiterhin ‘gegen den Uhrzeigersinn’. Die Kurve

$$\begin{aligned}\beta : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - 2t))\end{aligned}$$

ist eine Umparametrisierung von γ , wobei die Parametertransformation orientierungsumkehrend ist. Die Kurve β durchläuft den Einheitskreis ‘in der Zeit π ’ nun aber ‘im Uhrzeigersinn’.

Wir können nun folgenden Satz formulieren und beweisen:

Satz 15.2. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei ω eine stetige Pfaffsche Form auf M . Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stetig differenzierbare Kurve auf M und $\delta : [c, d] \rightarrow M$ eine stetig differenzierbare Kurve, welche aus γ durch eine Parametertransformation $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ hervorgeht. Dann gilt*

$$\int_{\delta} \omega = \begin{cases} \int_{\gamma} \omega, & \text{wenn } \varphi \text{ orientierungserhaltend,} \\ -\int_{\gamma} \omega, & \text{wenn } \varphi \text{ orientierungsumkehrend.} \end{cases}$$

Der Satz besagt also, dass das Integral einer Pfaffschen Form über eine Kurve nicht davon abhängt, ‘wie schnell wir die Punkte auf der Kurve durchlaufen’, so lange wir die Kurve ‘in der gleichen Richtung’, d.h. vom Endpunkt $\gamma(a) = \delta(c)$ zum Endpunkt $\gamma(b) = \delta(d)$ durchlaufen. Wenn wir die Kurve in der ‘entgegen gesetzten Richtung’ durchlaufen, dann erhalten wir bis auf ein Vorzeichen, ebenfalls das gleiche Integral.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass φ orientierungserhaltend ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\delta} \omega &= \int_c^d \omega_{\delta(t)}(\delta'(t)) dt \\ &= \int_c^d \omega_{(\gamma \circ \varphi)(t)}((\gamma \circ \varphi)'(t)) dt \\ &= \int_c^d \omega_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt \\ &= \int_c^d \omega_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) ds \\ &= \int_{\gamma} \omega.\end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit folgt aus der Kettenregel für Ableitungen, die vierte Gleichheit folgt aus der Linearität von ω ¹¹⁸ und die fünfte Gleichheit folgt aus der Substitution $u = \varphi(s)$.

Der Fall einer orientierungsumkehrenden Umparametrisierung wird ganz ähnlich bewiesen (siehe Übungsblatt 13). \square

Wir können nun die Aussage von Satz 15.2 uminterpretieren. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand.¹¹⁹ Wir geben M eine Orientierung, d.h. wir legen eine Durchlaufrichtung fest. Es sei zudem ω eine Differentialform 1. Ordnung auf M .¹²⁰ Wir definieren nun das Integral von ω auf der orientierten 1–Untermannigfaltigkeit M wie folgt: wir wählen eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, welche M einmal in der ‘vorgeschriebenen Richtung durchläuft’. Wir definieren dann

$$\int_M \omega := \int_\gamma \omega.$$

Es folgt aus Satz 15.2, dass diese Definition nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt.

Wir bezeichnen nun mit $-M$ die gleiche 1–Untermannigfaltigkeit aber mit umgekehrter Orientierung, dann folgt aus Satz 15.2, dass

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

16. INTEGRATION VON DIFFERENTIALFORMEN HÖHERER ORDNUNG

121

16.1. Motivation. Erinnern wir uns noch einmal an den Gaußschen Integralsatz und an Satz 15.1:

Satz 16.1. (Gaußscher Integralsatz) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n –dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit ν das*

¹¹⁸Für jedes $P \in M$, $v \in T_P M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\omega_P(v \cdot \lambda) = \omega_P(v) \cdot \lambda,$$

dies gilt auch für $P = \gamma(\varphi(t))$, $v = \gamma'(\varphi(t))$ und $\lambda = \varphi'(t)$.

¹¹⁹Etwas salopp gesprochen ist also M nichts anderes als ein ‘verbogenes Intervall’ im \mathbb{R}^n .

¹²⁰ ω ist also eine Pfaffsche Form auf M , mit Blick auf das nächste Kapitel wechseln wir jetzt die Bezeichnungswiese.

¹²¹Der Rest der Vorlesung orientiert sich lose an Forster, Analysis III Kapitel 19 und 20.

äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . und es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$

Wenden wir Satz 15.1 auf das Integral von 1-Formen auf 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten an (siehe Kapitel 15.3), so erhalten wir folgenden Satz:

Satz 16.2. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende orientierte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Anfangspunkt P und Endpunkt Q . Es sei zudem $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_M df = f(Q) - f(P).$$

Diese beiden Sätze sind auf den ersten Blick sehr unterschiedlich, aber sie besitzen gewisse formale Übereinstimmungen:

- (1) Beide Sätze können auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis I zurückgeführt werden, andererseits können beide Sätze auch als Verallgemeinerung eben dieses Satzes aufgefasst werden.
- (2) Wir betrachten also entweder

M eine n -Untermfgkt. von \mathbb{R}^n f ein Vektorfeld auf M , oder
 M eine 1-Untermfgkt. von \mathbb{R}^n f eine Funktion f auf M ,

dann besagen die obigen Sätze, dass

$$\int_M \text{Ableitung von } f = \text{Integral von } f \text{ auf dem Rand von } M.$$

Für eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n wollen wir jetzt eine analoge Aussage (nämlich den Satz von Stokes) formulieren und beweisen. Dazu müssen wir uns aber zuerst überlegen, was ist das ‘richtige mathematische Objekt’, welches wir auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit integrieren können.

Für 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten haben wir gesehen, dass das ‘richtige Objekt’ eine 1-Form ist, d.h. eine Abbildung, welche jedem Vektor in $T_P M$ eine reelle Zahl zuordnet. Es sei nun M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die Idee ist nun k -Formen zu integrieren, d.h. gewisse Abbildungen, welche k Vektoren in $T_P M$ eine reelle Zahl zuordnet. Wir werden die dafür notwendige lineare Algebra im nächsten Kapitel einführen.

16.2. Alternierende Multilinearformen I: Definition. Im Folgenden sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

Definition. Eine *alternierende k -Form auf V* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\omega : V^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto \omega(v_1, \dots, v_k)\end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) ω ist linear in jedem Argument, d.h. für alle $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt ¹²²

$$\begin{aligned}\omega(\dots, v + v', \dots) &= \omega(\dots, v, \dots) + \omega(\dots, v', \dots) \\ \omega(\dots, \lambda v, \dots) &= \lambda \cdot \omega(\dots, v, \dots),\end{aligned}$$

- (ii) vertauscht man zwei Argumente, so ändert sich das Vorzeichen, d.h. für alle $v, v' \in V$ gilt

$$\omega(\dots, v, \dots, v', \dots) = -\omega(\dots, v', \dots, v, \dots).$$

Beispiel. (1) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\omega : (\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto \lambda \cdot \det(\underbrace{v_1 \dots v_n}_{n \times n\text{-Matrix}})\end{aligned}$$

eine alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n . Es folgt leicht aus den Weierstraß-Axiomen der Determinante, dass jede alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n von dieser Form ist.

- (2) Eine alternierende 1-Form ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. ein Element im Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$.
 (3) Es sei $w \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto (\underbrace{v_1 \times v_2}_{\text{Kreuzprodukt}}) \cdot w\end{aligned}$$

eine alternierende 3-Form auf \mathbb{R}^3 .

- (4) Es sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^n)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(\underbrace{w v_1 \dots v_{n-1}}_{n \times n\text{-Matrix}})\end{aligned}$$

eine alternierende $(n-1)$ -Form auf \mathbb{R}^n . Im Falle $n = 3$ erhalten wir die gleiche alternierende 2-Form wie im vorherigen Beispiel.

Folgendes Lemma wird in Übungsblatt 13 bewiesen:

¹²²Hierbei werden sollen die nicht genannten Argumente auf beiden Seiten gleich sein.

Lemma 16.3. *Die Bedingung (ii) in der Definition von alternierenden k -Formen ist äquivalent zur Bedingung*

(ii') *sind zwei Argumente gleich, dann verschwindet ω , d.h. für alle $v \in V$ gilt*

$$\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

Die Richtung (ii') \Rightarrow (ii) ist trivial, die Rückrichtung (ii) \Rightarrow (ii') ist auch kaum schwieriger.

Die Summe zweier alternierender k -Formen ¹²³ und das Skalarprodukt einer alternierenden k -Form mit einer reellen Zahl ist wiederum eine alternierende k -Form. Die Menge der alternierenden k -Formen bildet also einen reellen Vektorraum, welchen wir mit $\wedge^k V^*$ bezeichnen.

Lemma 16.4. *Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \wedge^1 V^* &= V^*, \\ \dim(\wedge^n V^*) &= 1, \\ \wedge^k V^* &= 0, \text{ für alle } k > \dim(V). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Aussagen folgen aus der obigen Diskussion der Beispiele. Die dritte Aussage wird in den Übungen bewiesen. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass

$$\dim(\wedge^k V^*) = \binom{n}{k} \text{ für } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Im Folgenden verwenden wir auch die Konvention, dass

$$\wedge^0 V^* := \mathbb{R},$$

d.h. eine alternierende 0-Form auf V ist eine reelle Zahl.

Wir haben schon gesehen, dass man alternierende k -Formen als Verallgemeinerungen von Determinanten auffassen kann. Das folgende Lemma wird ähnlich wie Lemma 12.5 bewiesen:

Lemma 16.5. *Es sei ω eine alternierende k -Form auf V , es seien $v_1, \dots, v_k \in V$ Vektoren und es sei $A = (a_{ij})$ eine $k \times k$ -Matrix. Dann gilt:*

$$\omega \left(\sum_{i=1}^k a_{1i} v_i \dots \sum_{i=1}^k a_{ki} v_i \right) = \det(A) \cdot \omega(v_1 \dots v_k).$$

¹²³Wenn ω, ω' zwei alternierende k -Formen sind, dann ist die Summe $\omega + \omega'$ natürlich wie folgt definiert:

$$(\omega + \omega')(v_1, \dots, v_k) = \omega(v_1, \dots, v_k) + \omega'(v_1, \dots, v_k).$$

16.3. Alternierende Multilinearformen II: Das Dachprodukt von Linearformen. Im Folgenden sei V wiederum ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Wir bezeichnen Element in $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ im Folgenden als *Linearformen*.

Es seien nun $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ Linearformen, wir definieren dann eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2 : V^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ eine alternierende 2-Form ist. Wir bezeichnen $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ als das *Dachprodukt* (oder auch *äußere Produkt*) von φ_1 und φ_2 .

Wir können diese Definition leicht verallgemeinern: Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ Linearformen, wir definieren dann

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k : V^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist eine alternierende k -Form ist, welche wir als das *Dachprodukt* (oder auch *äußere Produkt*) von $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ bezeichnen.

Beispiel. Wir betrachten jetzt den Fall $V = \mathbb{R}^n$. Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir ¹²⁴

$$\begin{aligned} dx_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, \dots, w_n) &\mapsto w_i. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(v_1, \dots, v_n) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(v_1) & \dots & \varphi_n(v_n) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \det \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}}_{n \times n\text{-Matrix}}. \end{aligned}$$

¹²⁴Wir können also $dx_1, \dots, dx_n \in (\mathbb{R}^n)^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ als die zur Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ duale Basis auffassen.

Für $\varphi, \varphi', \psi \in V^*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten offensichtlich die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}(\varphi + \varphi') \wedge \psi &= \varphi \wedge \psi + \varphi' \wedge \psi, \text{ und} \\ (\lambda\varphi) \wedge \psi &= \lambda \cdot \varphi \wedge \psi.\end{aligned}$$

Satz 16.6. *Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis für V^* . Es sei $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann bilden die Dachprodukte*

$$(16.1) \quad \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \text{ mit } i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

eine Basis von $\wedge^k V^*$.

Beweis. Es sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V , welche zur Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von V^* dual ist, d.h. es gilt ¹²⁵

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Aus der Definition des Dachproduktes folgt leicht, dass für

$$i_1 < \dots < i_k \text{ und } j_1 < \dots < j_k,$$

gilt

$$(16.2) \quad (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k), \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es folgt sofort, dass die alternierenden k -Formen in (17.1) linear unabhängig sind. ¹²⁶ Es sei nun $\omega \in \wedge^k V^*$. Für $i_1 < \dots < i_k$ setzen wir

$$c_{i_1 \dots i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dann

$$\eta := \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1 \dots i_k} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $\eta = \omega$.

- (1) Es folgt aus (16.2), dass ω und η die gleichen Werte auf $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ mit $j_1 < \dots < j_k$ annehmen.
- (2) Aus der definierenden Eigenschaft (ii) folgt, dass ω und η die gleichen Werte auf $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ für beliebige j_1, \dots, j_k annehmen.

¹²⁵Warum existiert eine solche duale Basis?

¹²⁶In der Tat, wären sie nicht linear unabhängig, dann könnten wir einen dieser Vektoren $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben, aber jede Linearkombination der anderen Vektoren weist $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in V^k$ den Wert Null zu.

- (3) Aus der definierenden Eigenschaft (i) folgt nun, dass ω und η die gleichen Werte auf $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ für beliebige $v_1, \dots, v_k \in V$ annehmen.

□

Wir erhalten sofort folgendes Korollar:

Korollar 16.7. *Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum, dann gilt*

$$\dim(\wedge^k V^*) = \binom{n}{k} \text{ für } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Beweis. Es ist bekannt, dass

$$\#\{(j_1, \dots, j_k) \mid j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } j_1 < \dots < j_k = \binom{n}{k}\}.$$

□

Bemerkung. Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis für V^* . Wir haben gesehen, dass die Dachprodukte

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \text{ mit } i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

eine Basis von $\wedge^k V^*$ bilden. Dies bedeutet jedoch *nicht*, dass jede alternierende k -Form als Dachprodukt von k Linearformen geschrieben werden kann. Wir werden dazu ein Beispiel in Übungsblatt 14 behandeln.

16.4. Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine *Differentialform l -ter Ordnung ω auf M* (oder auch kurz *l -Form ω auf M*) ordnet jedem Punkt $P \in M$ eine alternierende l -Form auf $T_P M$ zu.¹²⁷

Beispiel. (1) Eine Pfaffsche Form auf M ist eine Differentialform erster Ordnung auf M .

(2) Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Differentialform 0-ter Ordnung auf M .

(3) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und F ein C^∞ -Vektorfeld auf M . Dann definiert F eine Differentialform ($n -$

¹²⁷Genauer gesagt ist eine Differentialform l -ter Ordnung ω eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \bigcup_{P \in M} \wedge^l T_P^* M$$

so dass für $P \in M$ gilt, dass $\omega(P) \in \wedge^l T_P^* M$.

1)–ter Ordnung auf M wie folgt: Es sei P in M , dann betrachten wir wie in Kapitel 16.2 die alternierende $(n-1)$ –Form ¹²⁸

$$\begin{aligned} (T_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det \underbrace{(F(P) v_1 \dots v_{n-1})}_{n \times n\text{-Matrix}}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun einen Begriff der Stetigkeit für Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten einführen. Dazu müssen wir allerdings im nächsten Kapitel nochmals einen kurzen Ausflug in die lineare Algebra unternehmen.

16.5. Induzierte Abbildungen. Es sei $f : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen. Wir erhalten dann eine induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : V^* &\rightarrow U^* \\ (\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}) &\mapsto \left(\begin{array}{l} U \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \varphi(f(u)). \end{array} \right). \end{aligned}$$

Man beachte, dass f^* in die ‘umgekehrte Richtung’ geht. Man kann diese Konstruktion leicht verallgemeinern: wir erhalten auch eine induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : \wedge^k V^* &\rightarrow \wedge^k U^* \\ (\varphi : V^k \rightarrow \mathbb{R}) &\mapsto \left(\begin{array}{l} U^k \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_k) \mapsto \varphi(f(u_1), \dots, f(u_k)). \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die induzierten Abbildungen haben folgende zwei Eigenschaften:

- (1) wenn $\text{id} : U \rightarrow U$ die Identitätsabbildung ist, dann ist $\text{id}^* : \wedge^k U^* \rightarrow \wedge^k U^*$ ebenfalls die Identitätsabbildung, d.h. $\text{id}^* = \text{id}$,
- (2) wenn $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen sind, dann gilt

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Anders ausgedrückt, das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert¹²⁹:

$$\begin{array}{ccc} & V^* & \\ \psi^* \nearrow & & \searrow \varphi^* \\ W^* & \xrightarrow{(\psi \circ \varphi)^*} & U^* \end{array}$$

¹²⁸Zur Erinnerung, $T_P M$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}, F(P)$ bilden also in der Tat eine reelle $n \times n$ –Matrix.

¹²⁹D.h. die Verknüpfung der beiden ‘diagonalen’ Abbildungen entspricht der ‘horizontalen’ Abbildung.

Es sei nun $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Es sei $P \in M$. Wir erhalten dann eine induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} f_* : T_P M &\rightarrow T_{f(P)} N \\ \gamma'(0) &\mapsto (f \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist eine lineare Abbildung. (Dies wird in Übungsblatt 13 behandelt.) Zudem bezeichnen wir mit f^* die Abbildung¹³¹

$$\begin{aligned} T_{f(P)}^* N &\rightarrow T_P^* M \\ \varphi &\mapsto \left(\begin{array}{l} T_P M \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \varphi(f_*(v)) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Allgemeiner bezeichnen wir mit f^* auch die Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : \wedge^k T_{f(P)}^* N &\rightarrow \wedge^k T_P^* M \\ \varphi &\mapsto \left(\begin{array}{l} (T_P M)^k \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) \mapsto \varphi(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wir sagen, dass die Abbildung $f^* : \wedge^k T_Q^* N \rightarrow \wedge^k T_P^* M$ durch $f: M \rightarrow N$ induziert ist.

Die induzierten Abbildungen haben folgende zwei Eigenschaften:

- (1) Wenn $id: M \rightarrow M$ die Identitätsabbildung ist, dann gilt für alle $P \in M$, dass die induzierten Abbildungen ebenfalls die Identitätsabbildung ist, d.h. es gilt $id_* = id$ und $id^* = id$.
- (2) Es seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow O$ zwei C^∞ -Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten. Dann gilt für alle $P \in M$, dass

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : T_P M \rightarrow T_{g(f(P))} O$$

und

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \wedge^k T_{g(f(P))}^* O \rightarrow \wedge^k T_P^* M.$$

¹³⁰Zur Erinnerung: für jeden Vektor $v \in T_P M$ gibt es eine Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma'(0) = P$ und $\gamma'(0) = v$. Die Kurve $f \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ geht durch den Punkt $f(P)$ und die Ableitung der Kurve $f \circ \gamma$ definiert einen Vektor in $T_{f(P)} N$. Man kann nun zeigen, dass der Vektor $(f \circ \gamma)'(0)$ nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt.

¹³¹Wenn $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mathematischen Objekten ist, welche eine Abbildung zwischen zu X und Y zugeordneten Objekten induziert, dann schreiben wir f_* , wenn die induzierte Abbildung ‘in die gleiche Richtung geht’, und f^* wenn die induzierte Abbildung ‘in die umgekehrte Richtung geht’. Die mathematische adäquate Sprache ist die ‘Kategorientheorie’:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorientheorie>

In der Kategorientheorie schreiben wir f_* wenn die induzierte Abbildung ein ‘kovarianter Funktor’ ist, und wir schreiben f^* wenn die induzierte Abbildung ein ‘kontravarianter Funktor’ ist.

Anders ausgedrückt, die folgenden beiden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 & T_{f(P)}N & \\
 f_* \nearrow & & \searrow g_* \\
 T_P M & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & T_{g(f(P))}O
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 & \wedge^k T_{f(P)}^* N & \\
 g^* \nearrow & & \searrow f^* \\
 \wedge^k T_{g(f(P))}^* O & \xrightarrow{(g \circ f)^*} & \wedge^k T_P^* M
 \end{array}$$

16.6. Stetige Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und ω eine Differentialform l -ter Ordnung ω auf M . Wir bezeichnen die Umkehrabbildung von Φ mit $\Psi: V \rightarrow U$. Dann definiert $\Psi^*\omega$ eine Dif-

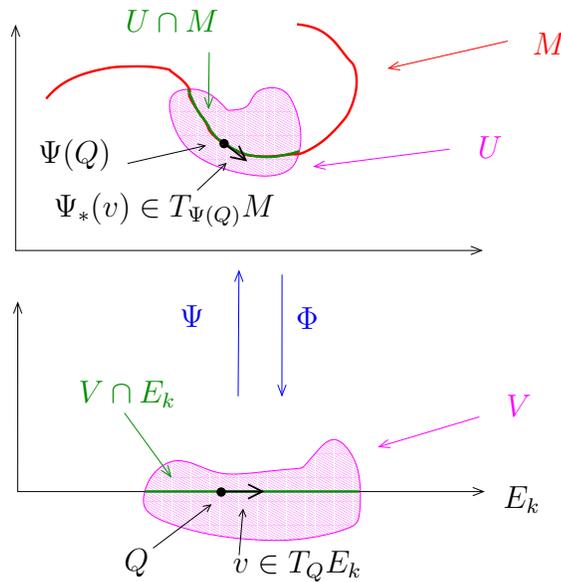


ABBILDUNG 5. Schematisches Bild einer induzierten Abbildung.

ferentialform l -ter Ordnung auf $V \cap E_k$. Für alle $Q \in V \cap E_k$ gilt $T_Q(V \cap E_k) = \mathbb{R}^k$, die Differentialform $\Psi^*\omega$ ordnet also einem Punkt

$Q \in V \cap E_k$ ein Element in $\wedge^l(\mathbb{R}^k)^*$ zu. Anders ausgedrückt, wir können $\Psi^*\omega$ als Abbildung

$$\Psi^*\omega : V \cap E_k \rightarrow \wedge^l(\mathbb{R}^k)^*$$

auffassen. Nach Satz 16.6 bilden die Dachprodukte

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \text{ mit } i_1 < i_2 < \cdots < i_l$$

eine Basis von $\wedge^l(\mathbb{R}^k)^*$. Wir können also $\Psi^*\omega V \cap E_k \rightarrow \wedge^l(\mathbb{R}^k)^*$ wie folgt als Linearkombination betrachten:

$$\Psi^*\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} f_{i_1 \dots i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}$$

wobei $f_{i_1 \dots i_l}$ reellwertige Funktionen auf $V \cap E_k$ sind. Wir sagen nun, dass $\Psi^*\omega$ stetig (bzw. differenzierbar, C^∞ etc.) ist genau dann, wenn all die Funktionen $f_{i_1 \dots i_l}$ im (bzw. differenzierbar, C^∞ etc.) sind. Wir sagen ω ist stetig, wenn $(\Phi^{-1})^*\omega$ stetig ist für alle Karten Φ von M .

Der Beweis des folgenden Lemmas ist eine (freiwillige) Übungsaufgabe.

Lemma 16.8. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und es sei $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas für M . Eine Differentialform ω ist stetig (differenzierbar etc.) genau dann, wenn $(\Phi_i^{-1})^*\omega$ stetig (differenzierbar etc.) ist für alle Karten im Atlas.*

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_l(M) &:= \{\text{stetige Differentialformen } l\text{-ter Ordnung auf } M\}, \text{ und} \\ \Omega_l(M) &:= \{C^\infty\text{-Differentialformen } l\text{-ter Ordnung auf } M\}. \end{aligned}$$

Beispiel. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und F ein C^∞ -Vektorfeld auf M . Wir betrachten wiederum die Differentialform $(n-1)$ -ter Ordnung auf M , welche $P \in M$ folgende alternierende $(n-1)$ -Form zuordnet:

$$\begin{aligned} (T_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det \underbrace{(F(P) v_1 \dots v_{n-1})}_{n \times n\text{-Matrix}}. \end{aligned}$$

In Übungsblatt 14 werden wir sehen, dass dies eine C^∞ -Differentialform $(n-1)$ -ter Ordnung auf M ist.

Bemerkung. (1) Wir haben hiermit auch insbesondere definiert, was es heißt, dass eine Pfaffsche Form stetig ist. Wir hatten dies in Kapitel 15.2 nicht ausgeführt.

(2) Es sei $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten und es sei ω eine Differentialform l -ter Ordnung auf

N . Wenn ω stetig (bzw. C^∞) ist, dann ist auch ¹³³ $f^*\omega$ wiederum stetig (bzw. C^∞), d.h. wir erhalten Homomorphismen

$$f^* : \mathcal{C}_l(N) \rightarrow \mathcal{C}_l(M)$$

und

$$f^* : \Omega_l(N) \rightarrow \Omega_l(M).$$

16.7. Integration von Differentialformen I. In Lemma 12.6 haben wir gesehen, dass wir das Integral einer reellwertigen Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit M mithilfe der Wurzel der Gramschen Determinante definieren können, weil sich diese nach Lemma 12.5 ‘bezüglich eines Basiswechsels richtig transformiert’. Vergleicht man Lemma 12.5 mit Lemma 16.5 sieht man, dass sich Differentialformen ganz ähnlich ‘transformieren’. Dies gibt uns Hoffnung, dass Differentialformen vielleicht die ‘richtigen’ mathematischen Objekte sind, welche man auf Untermannigfaltigkeiten integrieren kann.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \mathcal{C}_k(M)$ eine stetige Differentialform k -ter Ordnung auf M . In diesem Kapitel nehmen wir erst einmal an, dass es eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ gibt mit $\text{Supp}(\omega) \subset U$.¹³⁴ Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Es sei nun $x \in V \cap E_k$. Wir betrachten

$$(16.3) \quad \underbrace{\omega_{\Psi(x)}}_{\in \wedge T_{\Psi(x)}^* M} \underbrace{(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k))}_{k\text{-Vektoren in } T_{\Psi(x)} M} = \omega_{\Psi(x)}(D_x \Psi(e_1), \dots, D_x \Psi(e_k)).$$

Dies ist nun eine reelle Zahl,¹³⁵ welche wir $x \in V \cap E_k$ zuordnen. Wir können nun diesen Ausdruck integrieren, d.h. wir betrachten

$$(16.4) \quad \int_{V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) \, dx.$$

Es stellt sich die Frage, ob dieser Ausdruck von der Wahl der Karte Φ abhängt oder nicht.

Frage. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \mathcal{C}_k(M)$. Zudem seien $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ Karten

¹³³Zur Erinnerung: $f^*\omega$ bezeichnet die Differentialform auf M , welche einem Punkt $P \in M$ die Differentialform $f^*(\omega(P))$ zuordnet. Anders ausgedrückt, $f^*\omega$ ist die Differentialform, welche l Vektoren $v_1, \dots, v_l \in T_P M$ die reelle Zahl $\omega(f_*(v_1), \dots, f_*(v_l))$ zuordnet.

¹³⁴Hierbei bezeichnen wir mit $\text{Supp}(\omega) \subset M$ die Menge aller Punkte $P \in M$, so dass die Differentialform auf $T_P M$ nicht die Nullform ist.

¹³⁵Nach Voraussetzung ist ω eine C^∞ -Differentialform, insbesondere ist eine ω eine stetige Differentialform. Dies impliziert, dass die durch (16.3) definierte Funktion $V \cap E_k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

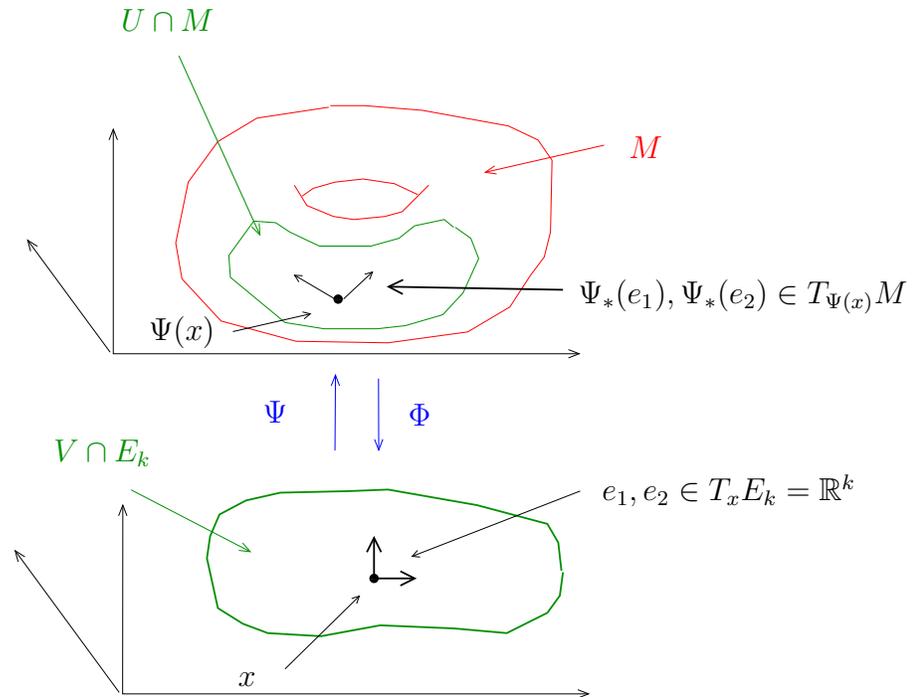


ABBILDUNG 6. Schematisches Bild für die Integration von k -Formen auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit.

mit $\text{Supp}(f) \subset U \cap \tilde{U}$. Wir bezeichnen die Umkehrabbildungen von Φ und $\tilde{\Phi}$ mit Ψ und $\tilde{\Psi}$. Die Frage ist nun wie folgt: Unter was für Voraussetzungen stimmen die Integrale

$$(16.5) \quad \int_{V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) \, dx$$

und

$$(16.6) \quad \int_{\tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(y)}(\tilde{\Psi}_*(e_1), \dots, \tilde{\Psi}_*(e_k)) \, dy$$

überein?

Antwort. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} V \cap E_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) := \omega_{\Psi(x)}(\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) \\ &= \omega_{\Psi(x)}((D_x \Psi)(e_1), \dots, (D_x \Psi)(e_k)). \end{aligned}$$

Es folgt nun aus den Definitionen und aus Lemma 16.5, dass

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(y)} \left(\tilde{\Psi}_*(e_1), \dots, \tilde{\Psi}_*(e_k) \right) dy \\
 &= \int_{\tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(y)} \left((D_y \tilde{\Psi})(e_1), \dots, (D_y \tilde{\Psi})(e_k) \right) dy \\
 &= \int_{\tilde{V} \cap E_k} w_{\tilde{\Psi}(y)} \left((D_{\Theta(y)} \Psi \cdot D_y \Theta)(e_1), \dots, (D_{\Theta(y)} \Psi \cdot D_y \Theta)(e_k) \right) dy \\
 &= \int_{\tilde{V} \cap E_k} w_{\tilde{\Psi}(y)} \left((D_{\Theta(y)} \Psi)(e_1), \dots, (D_{\Theta(y)} \Psi)(e_k) \right) \cdot \det(D_y \Theta) dy.
 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die beiden Integrale (16.5) und (16.6) übereinstimmen, wenn

$$\det(D_y \Theta) = |\det(D_y \Theta)| \text{ für alle } y \in \tilde{V} \cap E_k,$$

d.h. beiden Integrale stimmen überein, wenn

$$\det(D_y \Theta) > 0 \text{ für alle } y \in \tilde{V} \cap E_k.$$

Wir haben damit unsere Frage beantwortet.

Nachdem im Allgemeinen das Integral (16.4) von der Wahl der Karte abhängt, können wir den Ausdruck nicht als Definition des Integrals von einer Differentialform k -ter Ordnung auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit verwenden. Andererseits haben wir gesehen, dass wir ‘nahe dran’ sind, d.h. wir müssen noch versuchen, das ‘Vorzeichenproblem’ unter Kontrolle zu kriegen. Um dies zu erreichen benötigen wir noch den Begriff des orientierten Vektorraumes und der orientierten Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung. Bei der Diskussion des Integrals einer Pfaffschen Form auf einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M hatten wir ebenfalls gesehen, dass das Integral von einer ‘Durchlaufrichtung’ (oder eben Orientierung) von M abhängt. Es ist also nicht überraschend, dass diese Problematik auch bei der Integration von k -Formen auf k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten auftritt.

16.8. Orientierte Vektorräume und Untermannigfaltigkeiten.

Im Folgenden werden wir bis auf Widerruf folgende Konvention verwenden: wir betrachten nur Vektorräume der Dimension größer Null, und wir betrachten nur Untermannigfaltigkeiten der Dimension größer Null.

Definition. Es sei V ein k -dimensionaler reeller Vektorraum. Wir sagen zwei Basen ¹³⁶ $\{v_1, \dots, v_k\}$ und $\{w_1, \dots, w_k\}$ sind *äquivalent*, wenn die Determinante des Basiswechsels ¹³⁷ positiv ist.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V ist, und dass es genau zwei Äquivalenzklassen von Basen gibt. (Siehe Übungsblatt 14.)

Definition. Es sei V ein k -dimensionaler reeller Vektorraum.

- (1) Eine Äquivalenzklasse von Basen heißt *Orientierung* für V .
- (2) Ein *orientierter Vektorraum* ist ein Paar (V, O) , wobei O eine Orientierung für V ist.
- (3) Es sei (V, O) ein orientierter Vektorraum. Wir nennen $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine *positive Basis*, wenn $\{v_1, \dots, v_k\}$ in O liegt, andernfalls sagen wir, dass $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine *negative Basis* ist.

Bemerkung. Eine Orientierung eines Vektorraums ist durch eine positive Basis eindeutig festgelegt. Insbesondere betrachten wir \mathbb{R}^n immer mit der Orientierung, in der die ‘kanonische’ Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine positive Basis ist.

Wir werden später auch noch folgende Definition benötigen:

Definition. Es seien V und W orientierte Vektorräume. ¹³⁸ Wir sagen ein Isomorphismus $\Phi: V \rightarrow W$ ist *orientierungserhaltend*, wenn das Bild einer positiven Basis von V eine positive Basis von W ist; andernfalls sagen wir, dass Φ *orientierungsumkehrend* ist.

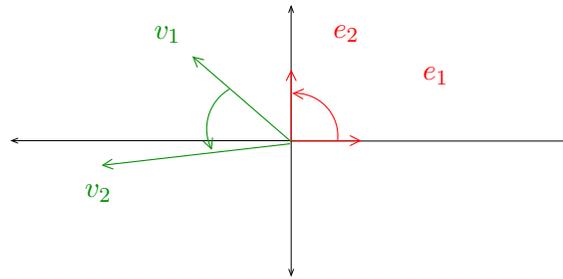
Beispiel. Wir betrachten \mathbb{R}^2 mit der kanonischen Orientierung, welche durch die Basis $\{e_1, e_2\}$ festgelegt ist. Es sei nun $\{v_1, v_2\}$ eine beliebige Basis für \mathbb{R}^2 . Es sei $\varphi \in (0, 2\pi)$ der Winkel um den man v_1 gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, so dass v_1 in die gleiche Richtung wie v_2 liegt. Die Basis $\{v_1, v_2\}$ ist eine positive Basis genau dann, wenn $\varphi \in (0, \pi)$. Dies kann man mithilfe von linearer Algebra leicht zeigen.

Es sei nun M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Eine Orientierung von M besteht aus einer Orientierung für jeden Tangentialraum $T_P M$, so dass folgende Stetigkeitseigenschaft erfüllt ist: für

¹³⁶Als *Basis* von V betrachten wir eine ‘angeordnete Menge von Vektoren’, d.h. wir unterscheiden zwischen $\{v_1, \dots, v_k\}$ und einer Permutation der Vektoren. Beispielsweise sind $\{e_1, e_2\}$ und $\{e_2, e_1\}$ *nicht* äquivalente Basen von \mathbb{R}^2 .

¹³⁷D.h. wir betrachten die $k \times k$ -Matrix $A = (a_{ij})$, welche durch $v_i := \sum_{j=1}^k a_{ji} w_j$ definiert ist.

¹³⁸Genauer gesagt, müsste man schreiben, es seien (V, O) und (W, P) orientierte Vektorräume, aber wir unterdrücken ‘ O ’ und ‘ P ’ in der Notation, genauso wie wir sagen ‘Sei K ein Körper’ anstatt zu schreiben ‘Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper’.

ABBILDUNG 8. Positive Basen für \mathbb{R}^2 .

jede Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $V \cap E_k$ zusammenhängend ist entweder ¹³⁹

$\Phi_*: T_x M \rightarrow T_{\Phi(x)} E_k = \mathbb{R}^k$ orientierungserhaltend für alle $x \in M \cap U$

oder

$\Phi_*: T_x M \rightarrow T_{\Phi(x)} E_k = \mathbb{R}^k$ orientierungsumkehrend für alle $x \in M \cap U$.

140

Bemerkung. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es genügt die Stetigkeitseigenschaft für alle Karten in einem Atlas mit zusammenhängenden Definitionsbereichen zu überprüfen.

Eine Untermannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt *orientierte Untermannigfaltigkeit*. Eine Untermannigfaltigkeit, welche eine Orientierung besitzt, heißt *orientierbare Untermannigfaltigkeit*.

Beispiel. (1) Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion und $z \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Wir betrachten die $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M := f^{-1}(z)$. Es sei nun $P \in M$. Wir sagen

¹³⁹Hierbei betrachten wir \mathbb{R}^k mit der kanonischen Orientierung, welche durch e_1, \dots, e_k gegeben ist.

¹⁴⁰Anders ausgedrückt, mit $\Psi = \Phi^{-1}$ gilt entweder

$\{\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)\}$ ist eine positive Basis von $T_{\Psi(x)} M$ für alle $x \in V \cap E_k$

oder

$\{\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)\}$ ist eine negative Basis von $T_{\Psi(x)} M$ für alle $x \in V \cap E_k$.

eine Basis $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ist positiv, wenn ¹⁴¹

$$\det(\text{grad } f(P) v_1 \dots v_{n-1}) > 0.$$

Dies definiert eine Orientierung für jeden Tangentialraum $T_P M$. Man kann nun zeigen, dass diese Orientierungen die Stetigkeitseigenschaft erfüllen.

- (2) In Kapitel 14.2 hatten wir den Begriff der Orientierung einer Hyperfläche eingeführt. Man kann leicht zeigen, dass die Definition in Kapitel 14.2 äquivalent ist zur obigen Definition. In der Tat, sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, dann gilt:

(A) Es sei ν ein stetiges normiertes Normalenfeld auf N . Es sei nun $P \in N$. Wir sagen eine Basis $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ist positiv, wenn

$$\det(\nu(P) v_1 \dots v_{n-1}) > 0.$$

Man kann nun zeigen, dass dies eine Orientierung auf N definiert.

(B) Umgekehrt, nehmen wir an, wir hätten eine Orientierung für jeden Tangentialraum $T_P N$, welche die Stetigkeitsbedingung erfüllt. Wir wollen nun ein stetiges normiertes Normalenfeld auf N konstruieren. Sei also $P \in N$. Dann haben wir schon gesehen, dass es genau zwei Vektoren w_1, w_2 gibt, mit $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$ und $w_1, w_2 \perp T_P N$. Wir ordnen jetzt P jetzt den Vektor zu, welcher die Bedingung ¹⁴²

$$\det(w_i v_1 \dots v_{n-1}) > 0$$

erfüllt für eine (und dann jede) positive Basis v_1, \dots, v_{n-1} von $T_P N$. Man kann nun zeigen, dass dieses normierte Normalenfeld stetig ist.

- (3) Das Möbiusband ist eine Untermannigfaltigkeit, welche nicht orientierbar ist. Dies ist zwar intuitiv offensichtlich, ein sauberer mathematischer Beweis dieser Aussage ist allerdings nicht ganz einfach. (Siehe Forster, Analysis III Seite 244.)
- (4) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , dann ist $T_P M = \mathbb{R}^n$ für alle $P \in M$, und die Standardbasis des \mathbb{R}^n definiert nun eine Orientierung von M . Wenn wir

¹⁴¹Zur Erinnerung, für $P \in M$ gilt $T_P M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \perp \text{grad } f(P)\}$. Es sei nun $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ eine Basis von $T_P M$, es folgt dass $\{\text{grad } f(P), v_1, \dots, v_{n-1}\}$ eine Basis von \mathbb{R}^n bildet, insbesondere gilt

$$\det(\text{grad } f(P) v_1 \dots v_{n-1}) \neq 0.$$

¹⁴²Diese Bedingung erfüllt entweder w_1 oder w_2 .

nichts anderes sagen, dann betrachten wir eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n immer mit dieser Orientierung.

- (5) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine C^1 -invertierbare Abbildung. Dann definiert $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ mit $t \in [a, b]$ eine Orientierung von M . Salopp gesprochen ist also eine Orientierung von M nichts anderes als eine ‘Durchlaufrichtung’.

Es sei nun M eine k -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit.
¹⁴³ Wir bezeichnen dann mit $-M$ die Untermannigfaltigkeit mit der entgegengesetzten Orientierung, d.h. eine Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ eines Tangentialraumes ist positiv für $-M$, genau dann, wenn sie negativ für M ist.

Bemerkung. (1) Wenn M eine zusammenhängende orientierte Untermannigfaltigkeit ist, dann besitzt M genau zwei verschiedene Orientierungen, nämlich M und $-M$.

- (2) Wenn M aus k Zusammenhangskomponenten M_1, \dots, M_k besteht, dann besitzt M genau 2^k verschiedene Orientierungen, welche durch $\varepsilon_1 M_1 \cup \dots \cup \varepsilon_k M_k$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ für $i = 1, \dots, k$ gegeben sind.

16.9. Integration von Differentialformen II. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir sagen, dass eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ *orientierungserhaltend* (oder *orientierungstreu*) ist, wenn die lineare Abbildung

$$\Phi_* : T_x M \rightarrow T_x(E_k) = \mathbb{R}^k$$

für alle $x \in U$ orientierungserhaltend ist.¹⁴⁴ Man kann sich leicht davon überzeugen, dass eine orientierte Untermannigfaltigkeit einen Atlas besitzt, welcher nur aus orientierungserhaltenden Karten besteht.¹⁴⁵

¹⁴³Genauer gesagt, müsste man schreiben, es sei (M, O) eine orientierte Untermannigfaltigkeit, aber wir unterdrücken ‘ O ’ in der Notation.

¹⁴⁴Es bezeichne $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Die Karte Φ ist dann orientierungserhaltend genau dann, wenn für alle $y \in V \cap E_k$ gilt:

$$\{\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)\} = \{(D_y \Psi)(e_1), \dots, (D_y \Psi)(e_k)\}$$

ist eine positive Basis von $T_{\Psi(y)}M$.

¹⁴⁵In der Tat, sei $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas, durch einschränken auf Zusammenhangskomponenten von den V_i können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle V_i zusammenhängend sind. Wenn $\Phi: U \rightarrow V$ eine Karte ist, so dass V zusammenhängend ist, aber so dass Φ nicht orientierungserhaltend ist, dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : U &\rightarrow V \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \Phi(-x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Es sei $\omega \in \mathcal{C}_k(M)$. Wir nehmen zuerst an, dass es eine orientierungserhaltende Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $\text{Supp}(\omega) \subset U$ gibt. Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Wir definieren nun

$$\int_M \omega := \int_{V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)} (\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) dx.$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass diese Definition nicht von der Wahl der orientierungserhaltenden Karte abhängt:

Lemma 16.9. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \mathcal{C}_k(M)$. Es seien zudem $\Phi: U \rightarrow V$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ zwei orientierungserhaltende Karten mit $\text{Supp}(\omega) \subset U$. Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ (bzw. $\tilde{\Psi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$) die Umkehrabbildung von Φ (bzw. $\tilde{\Phi}$), dann gilt*

$$\int_{V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)} (\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) dx = \int_{\tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(x)} (\tilde{\Psi}_*(e_1), \dots, \tilde{\Psi}_*(e_k)) dx.$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $U = \tilde{U}$. Wir bezeichnen mit Θ den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{V} \cap E_k &\rightarrow V \cap E_k \\ x &\mapsto \Phi(\tilde{\Psi}(x)). \end{aligned}$$

Sei $y \in \tilde{V} \cap E_k$. Dann betrachten wir

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{D_y \tilde{\Psi}} T_{\Psi(y)} \xleftarrow{D_{\Phi(\Psi(y))} \Psi} \mathbb{R}^k,$$

beide lineare Abbildungen sind nach Voraussetzung orientierungserhaltende Isomorphismen. Andererseits ist dies nach der Kettenregel gerade die Abbildung

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{D_y \Theta} \mathbb{R}^k,$$

welche also ebenfalls orientierungserhaltend ist. Es folgt daher, dass $\det(D_y \Theta) > 0$. Es folgt nun aus der Rechnung in Kapitel 16.7, dass

$$\int_{V \cap E_k} \omega_{\Psi(x)} (\Psi_*(e_1), \dots, \Psi_*(e_k)) dx = \int_{\tilde{V} \cap E_k} \omega_{\tilde{\Psi}(x)} (\tilde{\Psi}_*(e_1), \dots, \tilde{\Psi}_*(e_k)) dx.$$

□

eine orientierungserhaltende Karte mit dem gleichen Definitionsbereich.

16.10. Integration von Differentialformen III. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ wiederum eine orientierte kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es sei $\omega \in \mathcal{C}_k(M)$ nun eine beliebige stetige Differentialform k -ter Ordnung ω auf M . Wir wollen jetzt $\int_M \omega$ einführen. Wir werden dabei ganz analog zu Kapitel 12.6 vorgehen.

Wir wählen einen endlichen Atlas $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i=1,\dots,r}$ von M , so dass alle Karten orientierungserhaltend sind.¹⁴⁶ Wir wählen zudem eine stetige Zerlegung $z_j : M \rightarrow [0, 1]$, $j \in 1, \dots, s$ der Eins¹⁴⁷ bzgl. der offenen Überdeckung U_1, \dots, U_r . Wir definieren nun

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^s \int_M z_j \cdot \omega,$$

wobei die Summanden auf der rechten Seite nach Kapitel 16.9 definiert sind. Man kann nun ohne größere Probleme (analog zu Forster, Analysis III Seite 139f) zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Zerlegung der Eins abhängt.

Für das Integral von Differentialformen k -ter Ordnung auf k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten gelten die ‘üblichen’ Aussagen. Beispielsweise, gilt für alle $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_k(M)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\int_M \omega + \omega' = \int_M \omega + \int_M \omega' \text{ und } \int_M \lambda \omega = \lambda \cdot \int_M \omega.$$

Etwas interessanter ist folgender Satz:

Satz 16.10. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $\omega \in \mathcal{C}_k(M)$. Dann gilt*

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

Beweis. Es folgt direkt aus der Definition vom Integral von Differentialform k -ter Ordnung, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass es eine orientierungserhaltende Karte $\Phi : U \rightarrow V$ für M mit $\text{Supp}(\omega) \subset U$ gibt. Wir betrachten die durch

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) := (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

definierte Abbildung. Für alle $x \in V$ gilt offensichtlich, dass $\det D_x \Theta = -1$. Die Karte $\tilde{\Phi} := \Theta \circ \Phi : U \rightarrow \tilde{V} := \Theta(V)$ ist dann eine orientierungsumkehrende Karte für M , oder anders ausgedrückt, eine orientierungserhaltende Karte für $-M$.

¹⁴⁶Solch ein Atlas existiert, dies folgt aus Übungsblatt 11, Aufgabe 2 und der Diskussion in Kapitel 16.9.

¹⁴⁷D.h. $z_1(x) + \dots + z_s(x) = 1$ für alle $x \in M$ und für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, r\}$, so dass $\text{Supp}(z_i) \subset U_j$.

Wir bezeichnen nun mit $\Psi: V \rightarrow U$ und $\tilde{\Psi}: \tilde{V} \rightarrow U$ die Umkehrabbildungen von Φ und $\tilde{\Phi}$. Es folgt nun aus der Rechnung in Kapitel 16.7, dass

$$\int_{\tilde{V}} \tilde{\Psi}^* \omega = - \int_V \Psi^* \omega.$$

Es folgt nun aus den Definitionen, dass

$$\int_{-M} \omega = \int_{\tilde{V}} \tilde{\Psi}^* \omega = - \int_V \Psi^* \omega = - \int_M \omega.$$

□

Beispiel. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

eine stetige Differentialform n -ter Ordnung auf M . Wir können das Integral mithilfe der Karte $\Phi = \text{id}$ bestimmen. Es folgt aus den Definitionen und aus dem Beispiel in Kapitel 16.3, dass

$$\underbrace{\int_M f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}_{\text{Integral von } n\text{-Form}} = \underbrace{\int_M f dx_1 \dots dx_n}_{\text{Integral von Funktion}}$$

Lemma 16.11. *Es sei (N, ν) eine orientierte kompakte Hyperfläche in \mathbb{R}^n und es sei $F: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir bezeichnen mit ω die zu F zugehörige Differentialform $(n-1)$ -ter Ordnung auf N . Dann gilt*¹⁴⁸

$$\int_N \omega = \int_N F \cdot \nu.$$

Beweis. Es folgt aus den Definitionen, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass es eine orientierungserhaltende Karte $\Phi: U \rightarrow V$ mit $\text{Supp}(F) \subset U$ gibt. Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ .

Es seien $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen dann mit $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ den eindeutig bestimmten Vektor, so dass gilt¹⁴⁹

$$(16.7) \quad k\text{-te Koordinate von } v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = (-1)^{k+1} \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{n-1} \\ \text{wobei } k\text{-te Zeile} \\ \text{entfernt} \end{pmatrix}.$$

¹⁴⁸Auf der linken Seite betrachten wir also das Integral der Differentialform ω , hierbei betrachten wir N als orientierte Untermannigfaltigkeit mit der durch ν festgelegten Orientierung, siehe Kapitel 16.8. Auf der rechten Seite betrachten wir das Integral der reellwertigen Funktion $x \mapsto F(x) \cdot \nu(x)$.

¹⁴⁹Für zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 erhalten wir das übliche Kreuzprodukt.

Das Kreuzprodukt $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ ist auch eindeutig durch folgende Eigenschaften festgelegt:

- (a) $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ steht senkrecht zu v_1, \dots, v_{n-1} ,
- (b) $\|v_1 \times \cdots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1})}$,
- (c) $\det(v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}) \geq 0$.

Es sei nun $x \in V \cap E_k$. Für $i = 1, \dots, n-1$ schreiben wir $v_i := (D_x \Psi)(e_i)$ und $F := F(\psi(x))$ und $\nu = \nu(\Psi(x))$. Dann gilt ¹⁵⁰

$$(16.8) \quad v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1}) \nu.$$

Wir erhalten, dass

$$\begin{aligned} \int_N \omega &= \int_{V \cap E_{n-1}} \omega(v_1, \dots, v_{n-1}) dx \\ &= \int_{V \cap E_{n-1}} \det(F v_1 \ \dots \ v_{n-1}) dx \\ &= \int_{V \cap E_{n-1}} F \cdot (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) dx \\ &= \int_{V \cap E_{n-1}} F \cdot \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1})} \nu dx \\ &= \int_{V \cap E_{n-1}} \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n-1})} F \cdot \nu dx \\ &= \int_N F \cdot \nu. \end{aligned}$$

Hierbei folgt die dritte Gleichheit aus (16.7) und die vierte Gleichheit folgt aus (16.8). \square

16.11. Null-dimensionale Untermannigfaltigkeiten. Wir haben bisher nur Untermannigfaltigkeiten der Dimension größer Null behandelt. Es sei nun M eine kompakte null-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , d.h. M besteht aus endlich vielen Punkten P_1, \dots, P_k . Eine *Orientierung* für M besteht aus der Wahl eines Vorzeichens ε_i für jeden Punkt P_i .

Es sei nun $\omega \in \mathcal{C}_0(M)$ (d.h. ω ist eine Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$). Wir definieren dann

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \omega(P_i).$$

¹⁵⁰In der Tat, beide Vektoren haben offensichtlich die Eigenschaften (a) und (b). Zudem ist v_1, \dots, v_{n-1} eine positive Basis von $T_{\Psi x} M$, per Definition der Orientierung (siehe Kapitel 16.8 für die Orientierung von Hyperflächen) bedeutet das, dass

$$\det(\nu v_1, \dots, v_{n-1}) > 0.$$

Also haben beide Vektoren auch die Eigenschaft (c).

17. DER SATZ VON STOKES

Der Satz von Stokes ist die in Kapitel 16.1 versprochene Verallgemeinerung des Gaußschen Integralsatzes und von Satz 16.2. Die Formulierung des Satzes erfordert allerdings, dass wir noch zwei weitere Begriffe einführen, nämlich

- (1) den orientierten Rand einer orientierten Untermannigfaltigkeit,
- (2) das Differential einer k -Form.

17.1. Orientierte Untermannigfaltigkeiten mit Rand. Bevor wir den Satz von Stokes formulieren, müssen wir noch Untermannigfaltigkeiten mit Rand etwas genauer studieren. Wir werden zuerst genau festlegen, was der Tangentialraum für Untermannigfaltigkeiten mit Rand sein soll.

Definition. Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und es sei $P \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt P , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\begin{array}{l} \gamma: [0, a] \rightarrow M \\ t \mapsto \gamma(t), \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \gamma: [a, 0] \rightarrow M \\ t \mapsto \gamma(t), \end{array}$$

¹⁵¹ gibt, so dass $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge aller Tangentialvektoren am Punkt P wird wiederum mit $T_P M$ bezeichnet.

Es sei nun M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann kann man zeigen, dass auf ∂M ein Vektorfeld ν existiert, so dass für alle $P \in \partial M$ gilt:

- (1) $\nu(P) \in T_P(M)$,
- (2) $\nu(P) \perp T_P(\partial M)$,
- (3) $\|\nu(P)\| = 1$,
- (4) $\nu(P)$ 'zeigt nach außen' ¹⁵².

Das Vektorfeld ν wird das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M genannt. Wenn M volle Dimension hat, d.h. wenn

$$\text{Dimension von } M = \text{Dimension des umgebenden Raumes,}$$

¹⁵¹Wir müssen hier die Menge der erlaubten Kurven etwas erweitern, damit wir für die Randpunkte weiterhin einen k -dimensionalen Tangentialraum erhalten.

¹⁵²Die Bedeutung der Bedingung 'zeigt nach außen' ist zwar offensichtlich, eine mathematisch präzise Formulierung ist allerdings nicht ganz trivial. Die Bedingung (1a) aus dem Beweis von Satz 14.4 macht keinen Sinn, da M nicht unbedingt volle Dimension besitzen muss und im Raum gekrümmt sein kann. Andererseits kann man die Bedingung (1a) aus dem Beweis von Satz 14.4 auf die Bilder von $\nu(P)$ unter Karten anwenden, und erhält dann eine sinnvolle Definition von 'zeigt nach außen'. Wir überlassen die Aufgabe der Präzisierung als Übungsaufgabe.

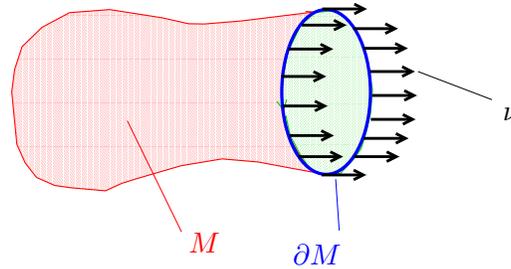


ABBILDUNG 9. Äußeres Vektorfeld auf M .

dann entspricht dies genau dem äußerem Einheitsnormalenfeld, welches wir in Kapitel 14.2 eingeführt hatten.

Der Begriff einer orientierten Untermannigfaltigkeit überträgt sich problemlos auf Untermannigfaltigkeiten mit Rand. Es sei nun M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und mit $k > 1$. Wir wollen nun zeigen, dass die $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂M ebenfalls orientierbar ist. Es sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Sei $P \in \partial M$. Wir definieren nun

$$\{v_1, \dots, v_{k-1}\} \text{ ist eine positive Basis von } T_P \partial M \quad \Leftrightarrow \quad \{\nu(P), v_1, \dots, v_{k-1}\} \text{ ist eine positive Basis von } T_P M.$$

Man kann nun zeigen, dass diese Definition von Orientierungen auf den Tangentialräumen von ∂M die Stetigkeitsbedingung erfüllt, d.h. wir haben eine Orientierung auf ∂M eingeführt.

Wenn M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, dann betrachten wir ∂M immer als durch die obige Orientierung orientierte $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beispiel. Es sei

$$M := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

die Einheitsscheibe im \mathbb{R}^2 . Wir betrachten M als orientierte Untermannigfaltigkeit wobei die Orientierung durch die üblichen Orientierung von \mathbb{R}^2 gegeben ist. Die Untermannigfaltigkeit ∂M , d.h. der Einheitskreis, hat dann die Orientierung, welche ‘entgegen dem Uhrzeigersinn zeigt’.

Sei zum Abschluß noch M eine zusammenhängende eindimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Anfangspunkt P und Endpunkt Q , dann definieren wir

$$\partial M := Q \cup -P.$$

D.h. wir betrachten ∂M als 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer Orientierung.

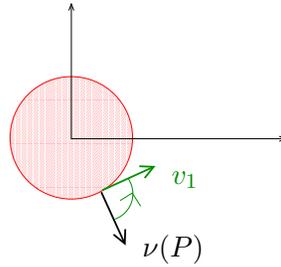


ABBILDUNG 10. Orientierung des Randes der Kreisscheibe in \mathbb{R}^2 .

17.2. Das Differential von Differentialformen. Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $\omega \in \Omega_l(U)$. Nach Satz 16.6 bilden die Dachprodukte

$$(17.1) \quad dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \text{ mit } i_1 < i_2 < \cdots < i_l$$

eine Basis von $\wedge^l(\mathbb{R}^k)^*$. Wir können also ω wie folgt als Linearkombination betrachten:

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} f_{i_1 \dots i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}$$

wobei $f_{i_1 \dots i_l}$ reellwertige C^∞ -Funktionen auf U sind. Wir definieren jetzt das *Differential von ω* (oder auch *äußere Ableitung von ω*) als

$$d\omega := \sum_{i_1 < \cdots < i_l} df_{i_1 \dots i_l} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.$$

Das Differential $d\omega$ einer l -Form ω ist also eine $(l+1)$ -Form.

Es gilt folgender Satz:

Satz 17.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge. Es seien $\omega, \omega' \in \Omega_l(U)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

- (1) $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$,
- (2) $d(\lambda\omega) = \lambda \cdot d\omega$,
- (3) *die $(l+1)$ -Form $d\omega$ ist eine C^∞ -Form,*
- (4) *es sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion, dann gilt* ¹⁵³

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega \quad (\text{Produktregel}).$$

¹⁵³Man kann auf natürliche Weise auch eine Abbildung

$$\wedge : \Omega_l(U) \times \Omega_l(U)$$

definieren (siehe Seite Forster, Analysis III Seite 219), dann folgende allgemeinere Aussage: es sei $\omega \in \Omega_l(U)$ sowie $\omega' \in \Omega_l(U)$, dann gilt

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^l \omega \wedge d\omega',$$

dies ist die 'Produktregel' für die Differentiation von Differentialformen.

Der Beweis folgt aus den Definitionen, der Produktregel für reellwertige Funktionen und aus der Tatsache, dass $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Wir verweisen auf Forster, Analysis III Seite 223 für Details. Der Satz besagt also insbesondere, dass d einen Homomorphismus

$$d : \Omega_l(U) \rightarrow \Omega_{l+1}(U)$$

definiert.

Zudem gilt auch folgender Satz:

Satz 17.2. *Es sei $\Theta : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^k . Für alle $\omega \in \Omega_l(V)$ gilt dann, dass*

$$\Theta^*(d\omega) = d(\Theta^*\omega).$$

Der Satz besagt also, dass folgendes Diagramm von Abbildungen kommutiert:¹⁵⁴

$$\begin{array}{ccc} \Omega_l(V) & \xrightarrow{\Theta^*} & \Omega_l(U) \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \Omega_{l+1}(V) & \xrightarrow{\Theta^*} & \Omega_{l+1}(U). \end{array}$$

Der Satz wird auf Seite 227 von Forster, Analysis III bewiesen.

Wir wollen nun das Differential von Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten einführen. Die Idee, wie üblich, ist dabei die Betrachtung von Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten mithilfe von Karten auf den oben behandelten Fall von Differentialformen auf offenen Teilmengen von \mathbb{R}^k zurückzuführen.

Es sei also M eine k -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $\omega \in \Omega_l(M)$. Nehmen wir zuerst an, dass es eine Karte $\Phi : U \rightarrow V$ mit $\text{Supp}(\omega) \subset U$ gibt. Wir bezeichnen mit $\Psi : V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Dann ist $\Psi^*\omega$ eine Differentialform l -ter Ordnung auf $V \cap E_k$, also auf einer offenen Teilmenge von $E_k = \mathbb{R}^k$. Wir definieren nun¹⁵⁵

$$d\omega := \Phi^*(d(\Psi^*\omega)).$$

Es ist hilfreich folgendes Diagramm zu betrachten

$$\begin{array}{ccc} \Omega_l(U \cap M) & \longrightarrow & \Omega_{l+1}(U \cap M) \\ \downarrow \Psi^* & & \uparrow \Phi^* \\ \Omega_l(V \cap E_k) & \xrightarrow{d} & \Omega_{l+1}(V \cap E_k). \end{array}$$

¹⁵⁴D.h. die Verknüpfung der Abbildung oben mit der Abbildung rechts ergibt die Verknüpfung der Abbildung links und der Abbildung unten.

¹⁵⁵Es gilt $\Psi \circ \Phi = \text{id}$, insbesondere gilt $\Phi^* \circ \Psi^* = (\Psi \circ \Phi)^* = \text{id}^* = \text{id}$. Genauso zeigt man, dass $\Phi^* \circ \Psi^* = \text{id}$, d.h. $\Psi^* = (\Phi^*)^{-1}$.

Wir definieren also die obige Abbildung mithilfe der anderen drei Abbildungen. Mithilfe von Satz 17.2 kann man leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karte Φ abhängt.

Wir wollen die Definition des Differentials nun auch auf beliebige Formen in $\Omega_l(M)$ erweitern. Es sei also M eine kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $\omega \in \Omega_l(M)$ beliebig. Wir wählen einen endlichen Atlas $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i=1,\dots,r}$ von M . Wir wählen zudem eine stetige Zerlegung $z_j : M \rightarrow [0, 1]$, $j \in 1, \dots, s$ der Eins bzgl. der offenen Überdeckung U_1, \dots, U_r . Wir definieren nun

$$d\omega := \sum_{j=1}^s d(z_j \cdot \omega),$$

wobei die Summanden auf der rechten Seite schon definiert sind, nachdem $\text{Supp}(z_j \cdot \omega) \subset U_i$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$. Man kann nun ohne größere Probleme zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Zerlegung der Eins abhängt.

Beispiel. Es sei $\omega \in \Omega_0(M)$, dies bedeutet, dass ω eine C^∞ -Funktion auf M ist. In diesem Fall ist $d\omega \in \Omega_1(M)$ genau die Differentialform 1. Ordnung, d.h. die Pfaffsche Form, welche wir in Kapitel 15.2 eingeführt hatten.

Wir betrachten nun noch ein ausführlicheres Beispiel: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und F ein C^∞ -Vektorfeld auf M . Wir hatten in Kapitel 16.4 gesehen, dass F eine Differentialform $(n-1)$ -ter Ordnung $\omega(F)$ auf M wie folgt definiert: Wir ordnen P in M die alternierende $(n-1)$ -Form

$$\begin{aligned} (T_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(F(P) v_1 \dots v_{n-1}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun die n -Form $d\omega(F)$ auf M bestimmen.

Wir bezeichnen mit F_1, \dots, F_n die Koordinatenfunktionen von F . Für $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir mit F_i auch das Vektorfeld auf M , welches einem Punkt $P \in M$ den Vektor $F_i(P) \cdot e_i$ zuordnet. Dann gilt $F = F_1 + \dots + F_n$ und es gilt $\omega(F) = \omega(F_1) + \dots + \omega(F_n)$. Es folgt

zudem aus der Definition, dass ¹⁵⁶

$$\omega(F_i) = (-1)^{i-1} F_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} & d\omega(F) \\ &= d(\omega(F_1) + \cdots + \omega(F_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n d\omega(F_i) \\ &= \sum_{i=1}^n d((-1)^{i-1} F_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dF_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_i \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \operatorname{div}(F) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass für jede stetig differenzierbare Funktion f gilt ¹⁵⁷

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

sowie, dass

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \text{ und } dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

¹⁵⁶In der Tat, denn für $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}), i = 1, \dots, n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} \omega(F_i)(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \begin{pmatrix} 0 & v_{11} & \cdots & v_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_i & v_{1i} & \cdots & v_{n-1,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & v_{1n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i-1} F_i \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ \text{mit } i\text{-ter Zeile} \\ \text{entfernt} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} F_i \cdot (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n)(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei sofort aus der Definition von dx_j und der Definition des Dachprodukts.

¹⁵⁷Für eine differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

als Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, in der Tat, für $v = (v_1, \dots, v_n)$ gilt

$$df(v) = \operatorname{grad} f \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) (v_1, \dots, v_n).$$

Zusammenfassend erhalten wir also, dass wenn ω die zum Vektorfeld F zugehörige $(n - 1)$ -Form ist, dann gilt

$$(17.2) \quad d\omega = \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Bemerkung. Es sei M eine kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und es sei $\omega \in \Omega_l(M)$. Dann gilt nach Forster, Analysis III Seite 223, dass

$$d d\omega = 0.$$

Für jedes l betrachten wir nun

$$\begin{aligned} Z_l(M) &:= \{\omega \in \Omega_l(M) \mid d\omega = 0\}, \text{ und} \\ B_l(M) &:= \{d\omega \mid \omega \in \Omega_{l-1}(M)\}. \end{aligned}$$

Nachdem $d d\omega = 0$ für alle Differentialformen folgt, dass

$$B_l(M) \subset Z_l(M).$$

Wir können also den Quotientenvektorraum

$$H^l(M) := Z_l(M)/B_l(M)$$

bilden. Der Vektorraum $H^l(M)$ ist der Quotient von zwei unendlich (sogar überabzählbar) dimensionalen Vektorräumen. Überraschenderweise gilt allerdings, dass $H^l(M)$ immer ein endlich dimensionaler Vektorraum ist. Der Vektorraum $H^l(M)$ wird die *l-te de Rham Kohomologiegruppe von M* genannt, diese spielt eine sehr wichtige Rolle in höheren Vorlesungen.

17.3. Formulierung des Satz von Stokes. Der Satz von Stokes lautet nun wie folgt:

Satz 17.3. (Satz von Stokes) *Es sei M eine orientierte k -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand¹⁵⁸ und es sei $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Unser Ziel war es, eine Verallgemeinerung von Satz 16.2 und vom Gaußschen Integralsatzes zu finden. Es ist offensichtlich¹⁵⁹, dass der

¹⁵⁸Es gilt auch folgende Version des Satzes für eine orientierte k -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit M mit ∂M : für $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$ ist

$$\int_M d\omega = 0.$$

¹⁵⁹Hierbei verwenden wir die Konvention aus Kapitel 17.1 für die Orientierung des Randes einer orientierten 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit

Satz von Stokes im Falle $k = 1$ genau der Aussage von Satz 16.2 entspricht. Wir werden nun zeigen, dass wir den Gaußschen Integralsatzes aus dem Satz von Stokes herleiten können.

Es sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Wir bezeichnen mit ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂M . Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$

Wie in Kapitel 16.4 betrachten wir die zu F zugehörige Differentialform $(n-1)$ -ter Ordnung ω auf M . Zur Erinnerung, für P ist $\omega(P)$ die alternierende $(n-1)$ -Form

$$\begin{aligned} (T_P M)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \det(F(P) v_1 \dots v_{n-1}). \end{aligned}$$

Der Satz von Stokes besagt nun, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Es folgt aus (17.2) und aus Lemma 16.11, dass

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_M \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} F \cdot \nu.$$

Wir haben damit bewiesen, dass der Satz von Stokes insbesondere den Gaußschen Integralsatz impliziert.

17.4. Beweis des Satz von Stokes. Wir wollen jetzt den Satz von Stokes beweisen. Es sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und es sei $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Die Diskussion im vorherigen Kapitel zeigt, dass der Fall $k = n$, d.h. der Fall

$$\dim(\text{Untermannigfaltigkeit}) = \dim(\text{umgebender Raum})$$

äquivalent zum Gaußschen Integralsatz ist. Nachdem wir den Gaußschen Integralsatz schon bewiesen haben, haben wir den Satz von Stokes schon im Fall $k = n$ bewiesen.

Es sei nun $k \in \{0, \dots, n\}$ beliebig. Die Idee ist nun den Satz von Stokes mithilfe von Karten wiederum auf den Fall

$$\dim(\text{Untermannigfaltigkeit}) = \dim(\text{umgebender Raum})$$

zurückzuführen. Sei $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$. Es folgt aus den Definitionen, dass es genügt den Fall zu betrachten, dass $\omega \in \text{Supp}(\Phi)$ für eine Karte $\Phi: U \rightarrow V$ von M , wobei $V \subset H_k$.

Wir bezeichnen mit $\Psi: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von Φ . Es folgt

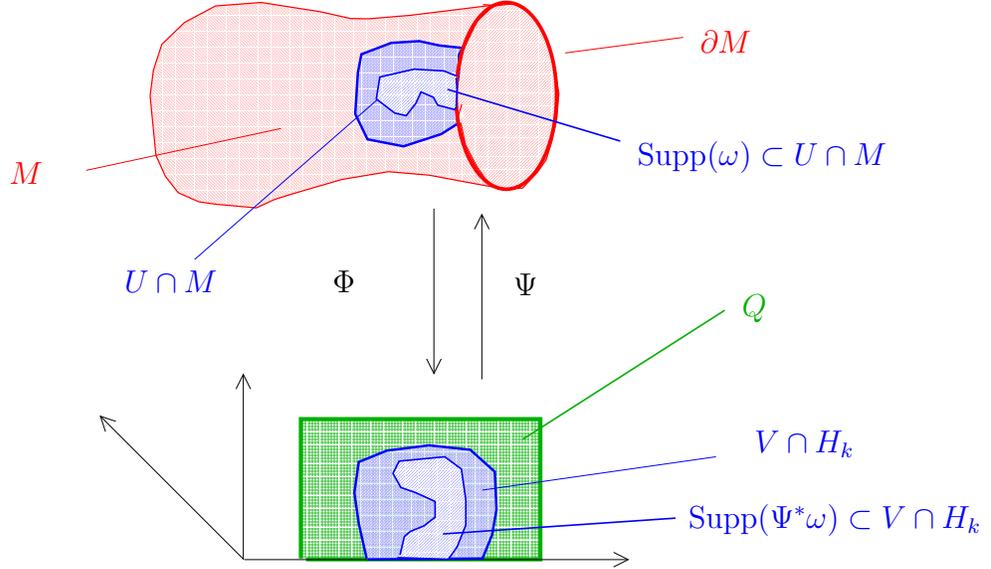


ABBILDUNG 11. Schematisches Bild einer Karte und des Quaders Q .

aus den Definitionen und aus Satz 17.2, dass ¹⁶⁰

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{U \cap M} d\omega = \int_{V \cap E_k} \Psi^*(d\omega) = \int_{V \cap E_k} d(\Psi^*\omega), \\ \int_{\partial M} \omega &= \int_{U \cap \partial M} \omega = \int_{\Phi(\partial M) \cap H_k} \Psi^*\omega. \end{aligned}$$

Der Satz von Stokes folgt nun also aus folgender Behauptung angewandt auf $W = \Phi(M) \cap H_k$ und $\eta = \Psi^*\omega$.

Behauptung. Es sei $W \subset H_k$ eine offene Teilmenge und η eine C^∞ -Differentialform k -ter Ordnung auf W , so dass $\text{Supp}(\eta) \subset W$. Dann gilt

$$\int_W d\eta = \int_{W \cap H_k} \eta.$$

¹⁶⁰Hierbei verwenden wir, dass für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k = T_x(V \cap E_k)$ und eine k -Form η auf M direkt aus den Definitionen folgt, dass

$$(\Psi^*\eta)(v_1, \dots, v_k) = \eta(\Psi_*v_1, \dots, \Psi_*v_k).$$

Für den Beweis der Behauptung wählen wir nun einen Quader $Q \subset H_k$, welcher W enthält. Wir setzen η auf ganz Q fort, indem wir allen Punkten in $Q \setminus W$ die 0-Form zuordnen. Nachdem $\text{Supp}(\omega) \subset W$ ist die Fortsetzung von η auf ganz Q weiterhin eine C^∞ -Differentialform. Es folgt nun, dass

$$\int_W d\eta = \int_Q d\eta = \int_{\partial Q} \eta = \int_{W \cap H_k} \eta.$$

Hierbei folgt die erste und die letzte Gleichheit aus der Tatsache, dass η auf $W \setminus Q$ und damit auch auf $\partial Q \setminus (W \cap H_k)$ verschwindet. Die mittlere Gleichheit folgt daraus, dass der Gaußsche Integralsatz (und damit auch der Satz von Stokes nach der obigen Diskussion) nach Satz 14.6 für Quader gilt. Wir haben damit den Satz von Stokes mithilfe des Gaußschen Integralsatzes bewiesen.

17.5. Der Satz von Stokes für Flächen in \mathbb{R}^3 . Es sei nun $F = (F_x, F_y, F_z)$ ein C^∞ -Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Die *Rotation* von F ist definiert als das Vektorfeld

$$\text{rot } F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Die Definition $\text{rot } F$ kann man sich leicht auf folgende Weise merken. Wir schreiben

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\text{rot } F = \nabla \times F,$$

wobei $\nabla \times F$ das Kreuzprodukt des Operators ∇ mit dem Vektorfeld F bezeichnet.

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte Fläche. Wir definieren

$$\int_M \text{rot } F := \begin{array}{l} \text{Integral der 2-Form, welche für } P \in M \text{ gegeben ist durch} \\ T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \mapsto \det(\text{rot } F(P) \ v_1 \ v_2). \end{array}$$

Zudem definieren wir

$$\int_{\partial M} F := \begin{array}{l} \text{Integral der 1-Form, welche für } P \in \partial M \text{ gegeben ist durch} \\ T_P \partial M \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto F(P) \cdot v. \end{array}$$

Der klassische Satz von Stokes lautet nun wie folgt:

Satz 17.4. (Klassische Satz von Stokes) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte Fläche und $F = (F_x, F_y, F_z)$ ein C^∞ -Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{rot} F = \int_{\partial M} F.$$

Beweis. Wir werden den klassischen Satz von Stokes mithilfe des allgemeinen Satz von Stokes beweisen. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ also eine kompakte orientierte Fläche und F ein C^∞ -Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Wir bezeichnen mit ω die 1-Form auf M , welche für $P \in M$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto F(P) \cdot v. \end{aligned}$$

Der Satz von Stokes besagt nun, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Der klassische Satz von Stokes folgt nun aus den Definitionen und aus der folgenden Behauptung:

Behauptung. Wir bezeichnen mit η die 2-Form auf M , welche für $P \in M$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} T_P M \times T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \det(\operatorname{rot} F(P) v_1 v_2). \end{aligned}$$

Dann gilt $\eta = d\omega$.

Es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Es folgt nun, dass ¹⁶¹

$$\begin{aligned}
 d\omega &= d(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\
 &= dF_x \wedge dx + dF_y \wedge dy + dF_z \wedge dz \\
 &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\
 &\quad + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} dx + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\
 &\quad + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} dx + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\
 &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz.
 \end{aligned}$$

Wendet man nun diese 2-Form auf $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ und $v_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ an, so erhält man

$$\begin{aligned}
 d\omega(v_1, v_2) &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) (v_{1x}v_{2z} - v_{1z}v_{2x}) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}) \\
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} & v_{1x} & v_{2x} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} & v_{1y} & v_{2y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} & v_{1z} & v_{2z} \end{pmatrix} \\
 &= \det(\operatorname{rot} F(P) v_1 v_2) \\
 &= \eta(v_1, v_2).
 \end{aligned}$$

Wir haben damit die Behauptung bewiesen. □

¹⁶¹Hierbei verwenden wir wiederum, dass für jede stetig differenzierbare Funktion f gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

sowie, dass

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \text{ und } dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$