Seminar Spezielle Funktionen (SS 2026)

Prof. Dr. Sander Zwegers, Johann Stumpenhusen

Literatur:

- Andrews, Askey, Roy: Special functions, 1999
- Watson, Whittaker: A course of modern analysis, 4. ed., 2000

Thema 1.

Gamma- und Betafunktion I. Definitionen, Produkt- und Integralformeln (§1.1 The Gamma and Beta integrals and functions aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Definition der Gammafunktion (Definition 1.1.1). Warum ist diese Definition eine Verallgemeinerung der Fakultät? Funktionalgleichung 1.1.6
- Produktentwicklung (Theorem 1.1.2)
- Die Betafunktion (Definition 1.1.3)
- Beziehung zwischen Gamma- und Betafunktion (Theorem 1.1.4)
- Integralformel für die Gammafunktion (Korollar 1.1.5)
- Polstellen der Gamma- und der Betafunktion (Gleichungen 1.1.19 und 1.1.26)
- Alternativer Beweis der Beziehung zwischen Gamma- und Betafunktion durch Variablensubstitution (Seite 8 und Aufgabe 1)

Thema 2.

Gamma- und Betafunktion II. Weitere Funktionalgleichungen (§1.2 The Euler reflection formula, §1.5 Gauss's multiplication formula aus AAR, Chapter XII aus WW).

Wichtige Schritte:

- Formel von Euler (Theorem 1.2.1), Beweis mithilfe von Gleichung 1.1.20
- Anwendungen der Formel von Euler: Theorem 1.2.2, Bernoulli-Zahlen (Definition 1.2.3), Theorem 1.2.4
- Beweis der Verdopplungsformel (Theorem 1.5.1) als Grundidee für die Multiplikationsformel
- Multiplikationsformel (Theorem 1.5.2), Beweis mithilfe der Produktformel
- Verdopplungsformel als Analogon zur Doppelwinkelformel der Sinusfunktion (Bemerkung 1.5.2)
- Darstellung der Gammafunktion von Hankel (Aufgabe 22 aus AAR, ausführlicher in 12.22 WW)
- Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Thema 3.

Gamma- und Betafunktion III. Stirlingsche Formel, Satz von Bohr-Mollerup (§1.4 Stirling's asymptotic formula, §1.9 The Bohr-Mollerup theorem aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Beweisen Sie mithilfe der Definition der Gammafunktion und der Identität $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ die Formel von Wallis: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$ (Aufgabe 3).
- Zur Erinnerung: Bezeichnungen $O()$ und $\sim$
- Zeigen Sie durch Vergleich einer Summe mit einem Integral: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = x^{-1} + O(x^{-2})$ für $\mathrm{Re}(x) \to \infty$
- Beweis der Stirlingschen Formel mithilfe der vorherigen drei Punkte (Theorem 1.4.1)
- Definition einer konvexen und logarithmisch-konvexen Funktion (Definitionen 1.9.1 und 1.9.2)
- Die Gammafunktion ist logarithmisch-konvex (Theorem 1.2.5).
- Satz von Bohr-Mollerup (Theorem 1.9.3)

Thema 4.

Riemannsche und Hurwitzsche Zeta-Funktion (§1.3 The Hurwitz and Riemann Zeta functions aus AAR, Chapter XIII aus WW).

Wichtige Schritte:

- Definieren Sie $\zeta(s)$ und $\zeta(x,s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ (Seite 15 aus AAR).
- Zeigen Sie $\zeta(x,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt$ und damit $\zeta(x,s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{t^{s-1}e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt$ (Aufgabe 23 aus AAR, detaillierter in 13.12 aus WW).
- Beweisen Sie die Funktionalgleichung der Hurwitzschen Zeta-Funktion (Aufgabe 24 aus AAR, detaillierter in 13.15 aus WW).
- Leiten Sie die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion her (Aufgabe 25, Theorem 1.3.1 aus AAR, 13.151 aus WW).
- Werte der Riemannschen Zeta-Funktion: $\zeta(2k)$ als Folgerung aus Theorem 1.2.4 und $\zeta(-2k)$, $\zeta(1-2k)$ für $k \in \mathbb{N}$ (Korollar 1.3.2 aus AAR)

Thema 5.

Hypergeometrische Funktionen I. Definition, Integraldarstellung, Transformationsformeln (§2.1 The hypergeometric series, §2.2 Euler's integral representation aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Definition einer hypergeometrischen Reihe (Formeln 2.1.1 und 2.1.2)
- Abelsche partielle Summation
- Konvergenz (Theoreme 2.1.1 und 2.1.2)
- Beispiele für hypergeometrische Reihen (Formeln 2.1.3-2.1.13)
- Definition einer hypergeometrischen Funktion (Definition 2.1.5)
- Integraldarstellung von Euler (Theorem 2.2.1)
- Der Wert an der Stelle 1 einer hypergeometrischen Funktion (Theorem 2.2.2)
- Die Transformationsformeln von Pfaff und Euler (Theorem 2.2.5), eventuell Beispiele dazu (Theorem 2.2.6, Aufgaben 6 und 7)

Thema 6.

Hypergeometrische Funktionen II. Differentialgleichung (Appendix F. Series solutions of differential equations, §2.3 The hypergeometric equation aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Regulärer Punkt einer Differentialgleichung (§F1), Existenz der Lösungen
- Regulär singulärer Punkt einer Differentialgleichung, die charakteristische Gleichung, die charakteristischen Exponenten (§F3, indicial equation). Existenz der Lösungen, wenn die Differenz der Exponenten nicht ganz ist (§F3).
- Die hypergeometrische Gleichung (Formel 2.3.5), ihre charakteristischen Exponenten
- Überprüfen Sie, dass ${}_2F_1(a,b,c;x)$, $x^{1-c}\,{}_2F_1(1+a-c,1+b-c,2-c;x)$, ${}_2F_1(a,b,a+b+1-c;1-x)$ Lösungen der hypergeometrischen Gleichung sind.
- Beschreibung der Relationen zwischen diesen Lösungen (Theorem 2.3.2, erster Teil)

Thema 7.

Bessel-Funktionen I. Differentialgleichung, Definition, Rekursionsbeziehungen (§4.5 Bessel's equation and Bessel functions, §4.6 Recurrence relations aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Besselsche Differentialgleichung (Formel 4.5.1)
- Definition von $J_\alpha(x)$ durch eine Potenzreihenentwicklung (Formel 4.5.2)
- Zeigen Sie, dass $J_\alpha(x)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist.
- Bilden Sie die zweite Lösung $Y_\alpha(x)$. Schreiben Sie $Y_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ als eine Reihe (Formel 4.5.7).
- Berechnen Sie die Wronski-Determinante $W(J_\alpha, Y_\alpha)(x)$ (S. 201).
- Ableitungsformeln (Formeln 4.6.1, 4.6.2, 4.6.7 und 4.6.8)
- Rekursionsbeziehungen (Formeln 4.6.5 und 4.6.6)
- Zeigen Sie, dass $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine elementare Funktion ist (Formeln 4.6.9 und 4.6.10).

Thema 8.

Bessel-Funktionen II. Integraldarstellungen und asymptotisches Verhalten (§4.7 Integral representations of Bessel functions, §4.8 Asymptotic expansions aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Eine Integraldarstellung (Formel 4.7.5). Direkter Beweis durch Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion und Berechnung der Beta-Integrale.
- Formeln von Hankel (Formeln 4.7.8 und 4.7.9)
- Deformation des Integrationsweges in den Formeln von Hankel (Formeln 4.7.12-4.7.14)
- Hankel-Funktionen (Formeln 4.7.17-4.7.20)
- Was ist eine asymptotische Entwicklung? Ist eine asymptotische Entwicklung immer konvergent?
- Zeigen Sie, dass die asymptotischen Entwicklungen der Hankel-Funktionen (Formeln 4.8.2-4.8.4) aus der Substitution der Taylorentwicklung von $\left(1 + \frac{t}{x}\right)^\alpha$ in den Integralformeln folgt (ohne Begründung).
- Asymptotische Entwicklungen von $J_\alpha(x)$ und $Y_\alpha(x)$ (Formeln 4.8.5 und 4.8.6)

Thema 9.

Orthogonale Polynome I. Tschebyschow-Polynome, allgemeine orthogonale Polynome: Definition, Rekursion, Nullstellen und die Christoffel-Darboux Formel (§5.1 Chebyshev polynomials, §5.2 Recurrence, §5.4 Zeros of orthogonal polynomials aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Tschebyschow-Polynome T_n, U_n (Formeln 5.1.1, 5.1.2), vgl. auch Seite 99 ff. zu Jacobi-Polynomen.
- Orthogonalität der Tschebyschow-Polynome
- Rekursionsbeziehung von Tschebyschow-Polynomen (Formel 5.1.3)
- Definition orthogonaler Polynome (Definition 5.2.1)
- Rekursionsbeziehung von orthogonalen Polynomen (Theorem 5.2.2)
- Christoffel-Darboux Formel (Theoreme 5.2.4 und 5.2.5, Korollar 5.2.6)
- Nullstellen orthogonaler Polynome (Theoreme 5.4.1 und 5.4.2)

Thema 10.

Orthogonale Polynome II. Hermite- und Laguerre-Polynome, Hypergeometrische Darstellung der Jacobi-Polynome (§6.1 Hermite polynomials, §6.2 Laguerre polynomials, §6.3 Jacobi polynomials and Gram determinants aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Hermitesche Polynome: Definition (Formel 6.1.3), Integraldarstellung (Formel 6.1.4), Orthogonalität (Formel 6.1.5), erzeugende Funktion (Formel 6.1.7), Rekursionsgleichung (Formel 6.1.10)
- Hermitesche Funktionen sind Eigenfunktionen bezüglich der Fouriertransformation (Bemerkung 6.1.1 und Aufgabe 11).
- Laguerre-Polynome: Definition (Formel 6.2.1), Orthogonalität (Formel 6.2.3), erzeugende Funktion (Formel 6.2.4), Rekursion (Formel 6.2.5), Differentialgleichung (Formel 6.2.9)
- Beziehung zwischen Hermite- und Laguerre-Polynomen (Gleichungen 6.2.10 und 6.2.11)
- Jacobi-Polynome: Hypergeometrische Darstellung (Lemma 6.3.1, Korollar 6.3.2 und Theorem 6.3.3), Eigenschaften, die aus dieser Darstellung folgen (Formeln 6.3.8-6.3.10)

Thema 11.

Orthogonale Polynome III. Erzeugende Funktionen der Jacobi-Polynome, Gegenbauer-Polynome (Appendix E. Lagrange inversion formula, §6.4 Generating functions for Jacobi polynomials aus AAR).

Wichtige Schritte:

- Umkehrformel für Reihen nach Lagrange (§E.1 und §E.2), eventuell Anwendungen (§E.3 oder §E.4)
- Erzeugende Funktion für Jacobi-Polynome (Theorem 6.4.2), Orthogonalität (Theorem 6.4.3)
- Eine weitere erzeugende Funktion (Formel 6.4.7) und Betrachtung des Falls $\alpha = \beta$
- Definition von Gegenbauer-Polynomen (Formel 6.4.9), hypergeometrische Darstellung (Formel 6.4.12) und weitere Eigenschaften (Formeln 6.4.13-6.4.17)
- Beschreibung von Hermite- und Laguerre-Polynomen als Grenzwerte von Jacobi-Polynomen (Formeln 6.4.26 und 6.4.27)