

Seminar über Modulformen (Sommersemester 2022)

Prof. Dr. Sander Zwegers

Es gibt die folgenden 11 Vortragsthemen, jeder Vortrag soll ca. 60 Minuten dauern. Die Literaturangabe dient als Orientierung und Hilfestellung, wobei nicht alle Themen der angegebenen Kapitel/Abschnitte behandelt werden müssen, sondern eine sinnvolle Auswahl bezüglich der präsentierten Inhalte getroffen werden sollte. Wichtige Bestandteile, die für den weiteren Verlauf des Seminars unerlässlich sind, werden daher in den Themenbeschreibungen aufgeführt.

Literatur:

- M. Koecher, A. Krieg: *Elliptische Funktionen und Modulformen*
- E. Freitag, R. Busam: *Funktionentheorie 1*

Vortrag 1. Die Operation der Modulgruppe auf der oberen Halbebene

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel II §1 Abschnitte 1-3,8 und §2 Abschnitte 1,2

- Die Modulgruppe Γ als Gruppenoperation auf der oberen Halbebene \mathbb{H}
- Γ wird erzeugt von $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Fundamentalbereich der Modulgruppe

Vortrag 2. Modulformen

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel III Einleitung und §1

- Motivation: Modulfunktionen, Transformationsverhalten
- Definition der Begriffe modulare Funktion/(ganze) Modulform/Spitzenform
- Ganze Modulformen von negativem Gewicht
- Wachstum der Fourier-Koeffizienten

Vortrag 3. Beispiele für Modulformen

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel III §2 Abschnitte 1,2,4

- Eisenstein-Reihen, Bernoulli-Zahlen, Nullstellen
- Die Diskriminante Δ
- Absolute Invariante j
- Direkter Beweis der Dimensionsformel (Aufgaben 10-12 aus §2)

Vortrag 4. Die Gewichtsformel

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel III §3 ganz und §4 Abschnitte 1-3

- Ordnung
- Die Gewichtsformel („ $k/12$ -Formel“)
- Dimensionsformel, Basen von \mathbb{M}_k

Vortrag 5. Modulfunktionen und Quasi-Modulformen

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel III §5 Abschnitte 1-3 und §6 Abschnitt 1; Vorlesungsnotizen „Modular forms“ (wird zur Verfügung gestellt)

- Modulfunktionen
- Quasi-Modulformen und fast holomorphe Modulformen
- Die Eisensteinreihe G_2 als Beispiel für eine Quasi-Modulform

Vortrag 6. Theta-Reihen

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel III Einleitung; Busam, Freitag: Kapitel IV §4 (bis Satz 4.5)

- Die klassische Theta-Reihe als Modulform vom Gewicht $1/2$
- Transformationseigenschaften, Konstruktion einer Modulform
- Bezug zur Diskriminante

Vortrag 7. Die Dedekindsche η -Funktion

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel III §6 Abschnitte 2,5

- Die Dedekindsche η -Funktion
- Produktentwicklung von Δ
- evtl. Extremale Modulformen (Abschnitt 5)

Vortrag 8. Hecke-Operatoren I: Einführung, Bezug zu Modulformen

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel IV §1 Abschnitte 1-3

- Einführung der Hecke-Operatoren
- Rechtsvertreterssysteme von Γ_n modulo Γ
- Hecke-Operatoren für Modulformen (Ganze Modulformen werden auf ganze Modulformen abgebildet)

Vortrag 9. Hecke-Operatoren II: Hecke-Eigenformen, Multiplikativität

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel IV §1 Abschnitt 4 und §2 Abschnitte 1,2

- Simultane Eigenformen (Beispiel Diskriminante)
- Multiplikativität von T_n
- Rekursionsformel für T_{p^r}

Vortrag 10. Hecke-Operatoren III: Algebra der Hecke-Operatoren, Petersson-Skalarprodukt

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel IV §2 Abschnitte 3-4, §3 Abschnitte 1-3

- Die Algebra der Hecke-Operatoren
- Eisenstein-Reihen als simultane Eigenformen
- Das Petersson-Skalarprodukt

Vortrag 11. Eine Basis des Vektorraums der Spitzenformen

Literatur: Koecher, Krieg: Kapitel IV §3 Abschnitte 1-3,5,6

- evtl. Wiederholung zum Petersson-Skalarprodukt nötig (§3 Abschnitte 1-3)
- Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren
- Basis aus simultanen Eigenformen