Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel

Wintersemester 2018/19
Blatt 1

Übungen zu Affine Lie-Algebren

Aufgabe 1. Sei L eine Lie-Algebra, M, M_1, M_2 L-Moduln und N ein $U(L)$-Modul. Sei $i : L \to U(L)$ die kanonische Einbettung.

(i) Zeigen Sie, dass M ein $U(L)$-Modul wird durch die Vorschrift

$$(i(f_{i_1})\dots i(f_{i_k})) \cdot m := f_{i_1} \cdot (f_{i_2} \cdot (\dots (f_{i_k} \cdot m) \dots)$$

(ii) Zeigen Sie, dass N ein L-Modul wird mittels

$$l \cdot m := i(l) \cdot m$$

(iii) Zeigen Sie, dass $M_1 \otimes M_2$ ein L-Modul wird mittels

$$l \cdot m_1 \otimes m_2 := (l \cdot m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes (l \cdot m_2)$$

Aufgabe 2. (i) Sei $T^\bullet V$ die Tensoralgebra über V, und $\mathcal{A}$ eine assoziative, unitäre Algebra. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $f : V \to \mathcal{A}$ die Abbildung

$$\tilde{f} : T^\bullet V \to \mathcal{A}$$
$$\tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := f(v_1) \dots f(v_k)$$

ein Algebrenhomomorphismus ist, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T^\bullet V \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Wobei i die kanonische Einbettung bezeichnet.

(ii) Sei $S^\bullet V$ die symmetrische Algebra über V, und $\mathcal{A}$ eine assoziative, unitäre, kommutative Algebra. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $f : V \to \mathcal{A}$ die Abbildung

$$\tilde{f} : S^\bullet V \to \mathcal{A}$$
$$\tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := f(v_1) \dots f(v_k)$$

ein Algebrenhomomorphismus ist, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & S^\bullet V \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Wobei i die kanonische Einbettung bezeichnet.

Aufgabe 3. (i) Seien

$$f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese bilden eine Basis der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, stellen Sie folgende Elemente der $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ als Linearkombination der durch f, e, h induzierten Basis aus dem PBW-Theorem dar.

(i) $e^i f$ für $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(ii) hf^j für $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(iii) ef^i für $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(ii) Gegeben sei der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul $\mathbb{C}^2$. Sei $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Berechnen Sie:

$$fe(e_i \otimes e_j), fh(e_i \otimes e_j), ef^k(e_i \otimes e_j), k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

wobei e_1, e_2 die Standardbasis des $\mathbb{C}^2$ bezeichnet.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Elemente der Basis aus dem PBW-Theorem ein Erzeugendensystem bilden.