Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel

Wintersemester 2018/19
Blatt 4

Übungen zu Affine Lie-Algebren

Aufgabe 1. (i) Berechnen Sie die Gewichtsräume und Gewichte von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ als Modul über sich selbst. Wählen Sie als Cartanalgebra die Diagonalmatrizen.

(ii) Geben sei der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ und sei als Cartan-Algebra die Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ gewählt. Berechnen Sie die Gewichte und Gewichtsräume von V.

(iii) Gegeben seien L eine Lie-Algebra, $H \subseteq L$ eine Cartan-Unteralgebra und zwei L-Darstellungen V, W und seien $\lambda, \mu \in H^*$ mit $V_\mu \neq 0, W_\lambda \neq 0$. Zeigen Sie, dass $(V \otimes W)_{\lambda+\mu} \neq 0$.

Aufgabe 2. (i) Sei $\mathfrak{so}_n$ die Menge der schiefsymmetrischen, komplexen $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{so}_n$ eine Lieunteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{so}_n \cong \left\{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^t A = -AX \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n \in 2\mathbb{Z}+1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n \in 2\mathbb{Z}$$

wobei I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{so}_n$ einfach ist.
Hinweis: Die Fälle $n = 3, 4$ sind hilfreich.

Sie können die Übung auch am Dienstag am Büro von Valentin Rappel abgeben.