Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel

Wintersemester 2018/19
Blatt 7

Übungen zu Affine Lie-Algebren

Aufgabe 1. Seien H die Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ und α_i definiert wie auf Blatt 6. Seien die Diagonalmatrizen $\alpha_i^\vee = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ gegeben.
Zeigen Sie, dass $(H, \{\alpha_i \mid i = 1, \dots, n\}, \{\alpha_i^\vee \mid i = 1, \dots, n\})$ eine Realisierung der Cartan-Matrix C ist.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei X eine Menge, $F(X)$ die freie Algebra über X und $FL(X)$ die freie Lie-Algebra über X. Zeigen Sie,

$$U(FL(X)) \cong F(X)$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Cartan-Matrix von $\mathfrak{so}_4$, verwenden Sie statt der Killingform wieder die Spurform. Verwenden Sie als einfache Wurzeln $\alpha_1 - \alpha_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2$ (Notation aus der Lösung zu Blatt 4). In der Lösung zu Blatt 4 wurde nur der Fall n ungerade betrachtet. Der Fall n gerade folgt mittels der Einbettung von $\mathfrak{so}_{2n}$ in $\mathfrak{so}_{2n+1}$ in die rechte untere Ecke, also

$$A = (a_{i,j}) \mapsto \tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{1,i} &= \tilde{a}_{i,1} = 0 & i &= 1, \dots, 2n+1 \\ \tilde{a}_{i,j} &= a_{i-1,j-1} & i,j &= 2, \dots, 2n+1 \end{aligned}$$

<++>