Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel

Wintersemester 2018/19
Blatt 8

Übungen zu Affine Lie-Algebren

Aufgabe 1. Sei $\widehat{\mathfrak{sl}}_n = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ die affine Lie-Algebra zu $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Sei weiterhin $\rho : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \to V$ eine endlichdimensionale Darstellung. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \widehat{\rho} : \widehat{\mathfrak{sl}}_n &\to V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \\ t^k X &\mapsto (v \otimes t^l \mapsto Xv \otimes t^{k+l}) \\ c &\mapsto 0 \\ d &\mapsto (v \otimes f(t) \mapsto \lambda v \otimes t \frac{d}{dt} f(t) \end{aligned}$$

eine Darstellung von $\widehat{\mathfrak{sl}_n}$ ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie, welche der folgenden verallgemeinerten Cartan-Matrizen vom endlichen Typ, vom affine Type und vom indefiniten Typ sind.

(i)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(v)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(vi)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$