Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel, Christian Steinert

Wintersemester 2017/18
Blatt 3

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Sei $\phi \in L^\infty G$ und $r_\phi : L^\infty G \to L^\infty G$ die Rechtsmultiplikation mit ϕ, das heißt $\phi(\psi) := \psi \cdot \phi$. Zeigen Sie, dass r_ϕ ein Diffeomorphismus auf $L^\infty G$ ist, und bestimmen Sie das Differential.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{C})$ eine affine Varietät ist und bestimmen Sie den Koordinatenring $\mathbb{C}[GL_n(\mathbb{C})]$. *Hinweis:* Aufgabe 2 von Blatt 2.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $SL_n(\mathbb{C})$ eine irreduzible, affine Varietät ist. Das heißt in diesem Fall, dass $\mathcal{I}(SL_n(\mathbb{C}))$ ein Primideal ist. *Hinweis:* Sie können auch jede andere Definition von Irreduzibilität verwenden.

Definition 1. Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ affiner Varietäten heißt *Isomorphismus*, falls ϕ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : Y \to X$ ebenfalls ein Morphismus affiner Varietäten ist. Eine äquivalente – und eventuell nützlichere – Definition ist die Folgende. Die Abbildung ϕ heißt *Isomorphismus* von affinen Varietäten, falls $\phi^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X], f \mapsto f \circ \phi$ ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren ist.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$. Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{Im}\phi$ eine affine Varietät ist. Zeigen Sie ferner, dass ϕ keinen Isomorphismus $\mathbb{C} \to \operatorname{Im}\phi$ induziert, obwohl ϕ bijektiv ist.

Präsenzaufgabe 1. Sei $\overline{\mathbb{F}}_p$ der algebraische Abschluss des Körpers mit p Elementen. Zeigen Sie, dass der Frobenius-Morphismus $F : \overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p, x \mapsto x^p$ und sein Inverses Körperautomorphismen sind. Zeigen Sie ferner, dass F kein Isomorphismus affiner Varietäten ist.

Definition 2. Seien $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Ringe und $(\varphi_{ij})_{i<j}$ Ringhomomorphismen $\varphi_{ij} : R_j \to R_i$ mit der Bedingung $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ für $i < j < k$. Wir definieren den *projektiven Limes* $(\varprojlim R_i, (\pi_j)_{j\in\mathbb{N}})$ durch folgende drei Eigenschaften:

(i) $\varprojlim R_i$ ist ein Ring.

(ii) Die $\pi_j : \varprojlim R_i \to R_j$ sind Ringhomomorphismen, so dass

$$\begin{tikzcd} & \varprojlim R_i \arrow[dl, "\pi_k"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ R_k \arrow[rr, "\varphi_{jk}"] & & R_j \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist für alle $j < k$.

(iii) Für jeden anderen Ring R mit Abbildungen $\tilde{\pi}_i$, so dass die Eigenschaften (i) und (ii) gelten, gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus Φ, so dass

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[ddl, "\tilde{\pi}_k"'] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddr, "\tilde{\pi}_j"] & \\
& \varprojlim R_i \arrow[dl, "\pi_k"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & \\
R_k \arrow[rr, "\varphi_{kj}"] & & R_j
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist für alle $j < k$.

Aufgabe 5. Seien $R_i := \mathbb{C}[T]/\langle T^i \rangle$ und φ_{ij} die natürlichen Projektionen. Bestimmen Sie $\varprojlim R_i$.

Präsenzaufgabe 2. Finden Sie eine Beschreibung von $\varprojlim R_i$ als eine Teilmenge von $\prod_i R_i$.

Abgabe am 13. November in der Vorlesung.