Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel, Christian Steinert

Wintersemester 2017/18
Blatt 4

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Sei X eine affine Varietät mit Koordinatenring $\mathbb{C}[X]$. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $\mathbb{C}[X]$ und $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Idealen in $\mathbb{C}[X]$. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}_X(\mathfrak{b})$,

(ii) $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}_X(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}_X(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{V}_X(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ und

(iii) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_X(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_X(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_X(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

gilt. Dies zeigt, dass Zariski-Topologie auf X tatsächlich eine Topologie ist.

Aufgabe 2. Sei R eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra ohne nilpotente Elemente. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in R und $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Idealen in R. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}_R(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}_R(\mathfrak{b})$,

(ii) $\mathcal{V}_R(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}_R(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}_R(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{V}_R(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ und

(iii) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_R(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_R(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_R(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

gilt. Dies zeigt, dass Zariski-Topologie auf $\operatorname{MSpec} R$ tatsächlich eine Topologie ist.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{C} = \operatorname{MSpec} \mathbb{C}[x]$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(i) Für je zwei abgeschlossene Teilmengen A und B in X mit $X = A \cup B$ gilt $A = X$ oder $B = X$.

(ii) Für je zwei offene Teilmengen U und V in X gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

(iii) Für jede nichtleere, offene Teilmenge U in X gilt $X = \overline{U}$.

Aufgabe 5. Bezeichne mit $\mathbb{C}[x]_i \subset \mathbb{C}[x]$ den Untervektorraum der Polynome vom Grad i für alle $i \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[x]_i = \mathbb{C}[x]$.

(ii) Finden Sie eine Beschreibung für $R := \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[x]_i$. Ist insbesondere $R \simeq \mathbb{C}[x]$?

Definition 1. Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ topologische Räume und $(\varphi_{ij})_{i<j}$ stetige Abbildungen $\varphi_{ij} : R_i \to R_j$ mit der Bedingung $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ für $i < j < k$. Wir definieren den *induktiven Limes* $(\varinjlim X_i, (\pi_j)_{j\in\mathbb{N}})$ durch folgende drei Eigenschaften:

(i) $\varinjlim X_i$ ist ein topologischer Raum.

(ii) Die $\pi_j : \varinjlim X_i \to X_j$ sind stetige Abbildungen, so dass

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim X_i & \\
X_k \arrow[ur, "\pi_k"] & & X_j \arrow[ll, "\varphi_{jk}"'] \arrow[ul, "\pi_j"']
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist für alle $j < k$.

(iii) Für jeden anderen topologischen Raum X mit Abbildungen $\tilde{\pi}_i$, so dass die Eigenschaften (i) und (ii) gelten, gibt es eine eindeutige stetige Abbildung Φ, so dass

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
& \varinjlim X_i \arrow[u, "\Phi"'] & \\
X_k \arrow[uur, "\tilde{\pi}_k"] \arrow[ur, "\pi_k"] & & X_j \arrow[ll, "\varphi_{jk}"'] \arrow[ul, "\pi_j"'] \arrow[uul, "\tilde{\pi}_j"']
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist für alle $j < k$.

Aufgabe 6. Geben Sie eine explizite Beschreibung von $\varinjlim X_i$ und der Topologie auf $\varinjlim X_i$ an.

Abgabe am 20. November in der Vorlesung.