

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Sei X eine affine Varietät mit Koordinatenring $\mathbb{C}[X]$. Seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} Ideale in $\mathbb{C}[X]$ und $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Idealen in $\mathbb{C}[X]$. Zeigen Sie, dass

- (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}_X(\mathfrak{b})$,
- (ii) $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}_X(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}_X(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{V}_X(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ und
- (iii) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_X(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_X(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_X(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

gilt. Dies zeigt, dass Zariski-Topologie auf X tatsächlich eine Topologie ist.

Aufgabe 2. Sei R eine endlich erzeugte \mathbb{C} -Algebra ohne nilpotente Elemente. Seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} Ideale in R und $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Idealen in R . Zeigen Sie, dass

- (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{V}_R(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}_R(\mathfrak{b})$,
- (ii) $\mathcal{V}_R(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}_R(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}_R(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{V}_R(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ und
- (iii) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_R(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_R(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}_R(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

gilt. Dies zeigt, dass Zariski-Topologie auf $\text{MSpec } R$ tatsächlich eine Topologie ist.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{C} = \text{MSpec } \mathbb{C}[x]$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

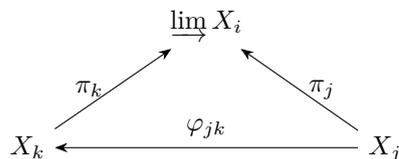
- (i) Für je zwei abgeschlossene Teilmengen A und B in X mit $X = A \cup B$ gilt $A = X$ oder $B = X$.
- (ii) Für je zwei offene Teilmengen U und V in X gilt $U \cap V \neq \emptyset$.
- (iii) Für jede nichtleere, offene Teilmenge U in X gilt $X = \overline{U}$.

Aufgabe 5. Bezeichne mit $\mathbb{C}[x]_i \subset \mathbb{C}[x]$ den Untervektorraum der Polynome vom Grad i für alle $i \in \mathbb{N}$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[x]_i = \mathbb{C}[x]$.
- (ii) Finden Sie eine Beschreibung für $R := \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[x]_i$. Ist insbesondere $R \simeq \mathbb{C}[x]$?

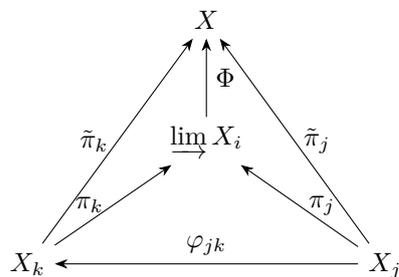
Definition 1. Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ topologische Räume und $(\varphi_{ij})_{i < j}$ stetige Abbildungen $\varphi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ mit der Bedingung $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ für $i < j < k$. Wir definieren den *induktiven Limes* $(\varinjlim X_i, (\pi_j)_{j \in \mathbb{N}})$ durch folgende drei Eigenschaften:

- (i) $\varinjlim X_i$ ist ein topologischer Raum.
- (ii) Die $\pi_j : \varinjlim X_i \rightarrow X_j$ sind stetige Abbildungen, so dass



ein kommutatives Diagramm ist für alle $j < k$.

- (iii) Für jeden anderen topologischen Raum X mit Abbildungen $\tilde{\pi}_i$, so dass die Eigenschaften (i) und (ii) gelten, gibt es eine eindeutige stetige Abbildung Φ , so dass



ein kommutatives Diagramm ist für alle $j < k$.

Aufgabe 6. Geben Sie eine explizite Beschreibung von $\varinjlim X_i$ und der Topologie auf $\varinjlim X_i$ an.

Abgabe am 20. November in der Vorlesung.