Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel, Christian Steinert

Wintersemester 2017/18
Blatt 6

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Geben Sie ein Beispiel für eine Element von $\mathrm{L}^{alg}(U_2)$ an, dass weder diagonal noch konstant ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $A(t) \in \mathrm{L}^{alg}\, U_n$ genau dann, wenn die Spalten der Darstellungsmatrix von $A(t)$ auf $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^n$ bilden. *Hinweis* Exercise 4.5.2 im Skript.

Aufgabe 3. Für $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[t])$ sei $I_d(g) \subseteq \mathbb{C}[t]$ das Ideal erzeugt von allen $d \times d$-Minoren von g. Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit schwach aufsteigenden Einträgen und sei $\underline{t}^{\underline{\lambda}}$ die Diagonalmatrix mit i-tem Diagonaleintrag t^{λ_i}. Berechnen Sie den normierten Erzeuger von $I_d(\underline{t}^{\underline{\lambda}})$. Zeigen Sie außerdem, dass $\underline{t}^{\underline{\lambda}}$ eindeutig bestimmt ist durch die normierten Erzeuger der $I_d(\underline{t}^{\underline{\lambda}})$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle irreduziblen Komponenten von $\mathcal{V}(x^2+y^2-1, x^2-z^2-1) \subseteq \mathbb{C}^3$. *Hinweis:* Irreduzible Komponenten sind bezüglich Inklusion maximale, irreduzible Teilmengen.

Aufgabe 5. Ist $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ irreduzibel? Falls nicht, bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten.

Präsenzaufgabe 1. Lösen Sie Aufgabe 5 für $O_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{R})$, ... Was fällt auf?

Abgabe am 4. Dezember in der Vorlesung.