Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel, Christian Steinert

Wintersemester 2017/18
Blatt 9

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Gegeben Sei die Abbildung $i : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, [x_0 : x_1] \mapsto [x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2]$.

(i) Zeigen Sie, dass i injektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $i(\mathbb{P}^1)$ eine projektive Varietät ist.

(iii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $i^{-1} : i(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{P}^1$.

(iv) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbb{C}[i(\mathbb{P}^1)] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{P}^1]$.

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{C}^*$. Gegeben sein die beiden $GL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & at^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ at^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zerlegen Sie die Matrizen bezüglich der $GL_2(\mathbb{C}[t]) \times GL_2(\mathbb{C}[t])$-Wirkung.

(ii) Zerlegen Sie die Matrizen in ein Element der $\Omega^{alg} U_2(\mathbb{C})$ und ein Element der $GL_2(\mathbb{C}[t])$.

(iii) Repräsentieren die beiden Matrizen das gleiche $\mathbb{C}[t]$-Gitter in $(\mathbb{C}[t, t^{-1}])^2$?

Aufgabe 3. Sei $G = SL_n(\mathbb{C})$.

(i) Zeigen Sie, dass G eine komplexe Lie-Gruppe ist.

(ii) Bestimmen Sie den Tangentialraum an $\mathbb{1}$.

(iii) Berechnen Sie die (komplexe) Dimension von G.

(iv) Ist G kompakt?

(v) Ist G irreduzibel?

(vi) Ist G zusammenhängend?

Optional noch ein paar „einfache“ Überlegungen ohne Prüfungsrelevanz.

(vii) Ist G einfach zusammenhängend?

(viii) Ist G eine einfache Lie-Gruppe?

(ix) Ist G als Gruppe einfach?

Abgabe am 08. Januar in der Vorlesung.