§ 14. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$

Kurze Diskussion über Analysis I–II.

- In der Analysis I untersucht man

Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{R}$:

1. Stetigkeit
2. Differenzierbarkeit
3. Integration auf Intervalle in $\mathbb{R}$

(Riemannsches Integral)

- In der Analysis II untersucht man

Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^N$:

1. Stetigkeit
2. Differenzierbarkeit
3. Es fehlt: Integration-Theorie auf $\mathbb{R}^N$

In der weiteren Untersuchungen in der Mathematik oder Physik reicht es nicht aus, nur

Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^N$

zu betrachten. Man muss gekrümmte Objekte (gekrümmte Gegenstände) und ihre Verbindungen betrachten, z. B. Kreis in $\mathbb{R}^2$, Ellipse in $\mathbb{R}^2$

Sphäre in $\mathbb{R}^N$

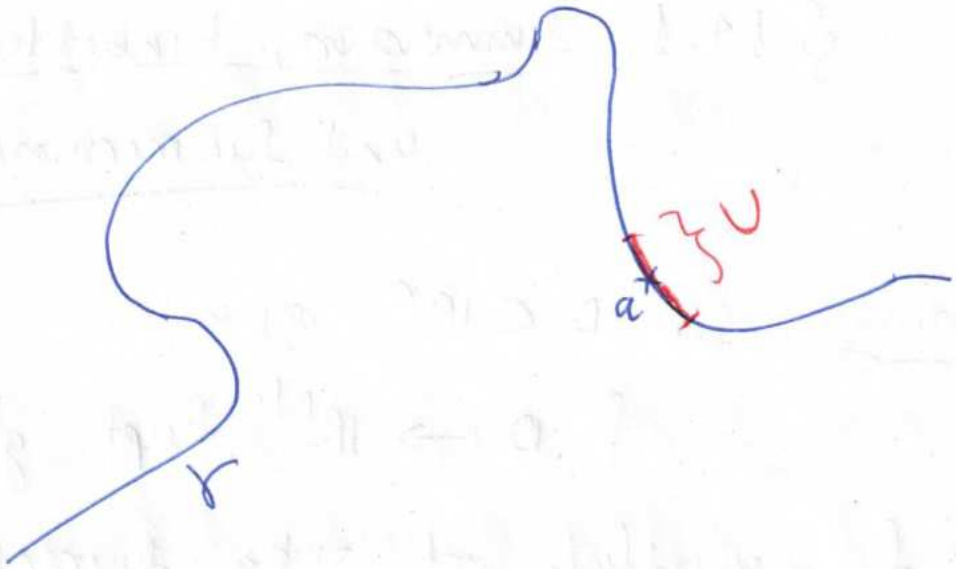
~~Ellipse~~ Flächen in $\mathbb{R}^3$

und Abbildungen zwischen diser Mengen.

Das erste Hauptziel der Analysis III ist einen allgemeinen mathematischen Begriff einzuführen der ~~die~~ gekrümmte Objekte wie Kreis, Sphäre beschreiben.

Genauer gesagt, wir werden den Begriff von Untermannigfaltigkeit definieren: Sie sind Teilmengen von $\mathbb{R}^N$, welche "glatt" und "ohne Ecke" wie Kreis oder Sphäre sind. Wie ~~wo~~ macht man die Charakterisierung streng mathematische?

Um es zu sehen betrachten wir ~~das~~ das folgende Bild



$\mathbb{R}^2$

γ ist eine Kurve, sie ist gekrümmt

Sei $a \in \gamma$ und U eine kleine offene Umgebung von a in γ.

Je kleiner die Umgebung U ist, desto flacher ist sie. (man stellt sich vor, die Umgebung U einzuzoomen)

Anders gesagt: γ sieht lokal wie ein Intervall aus. Diese Beobachtung gilt auch für die höhere Dimension: Untermannigfaltigkeiten von Dimension n in $\mathbb{R}^N$ sehen lokal wie eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ aus.

Wir beginnen nun die strenge Untersuchung der Untermannigfaltigkeiten.

§ 14.1. Immersion, Einbettungen und Submersionen

Erinnerung: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

1) $f: D \to \mathbb{R}^N$ heißt glatt

wenn f unendlich oft stetig differenzierbar.

2) $f: D_1 \to D_2$ wobei D_1, D_2 offen in $\mathbb{R}^n$

f heißt Diffeomorphismus der Klass C^k (oder C^k- Diffeomorphismus)

wenn f eine Bijektion ist und f, f^{-1} ~~glatt~~ k-mal stetig differenzierbar sind.

Wenn f ist C^k- Diffeomorphismus $\forall k \in \mathbb{N}$ nennt man f ein glatte Diffeomorphismus.

In der Analysis III betrachten wir nur glatte Abbildungen und (glatte) Diffeomorphismus. Die Behandlung für C^k- Abbildungen und C^k- Diffeomorphismus ist ähnlich.

Duc Viet Vu

Definition 14.1.1 Seien $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine glatte Abbildung $f: D \to \mathbb{R}^N$ heißt Immersion in $a \in D$, falls $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ (das Differential von f im a) injektiv ist (d.h. $\operatorname{Rang} J_f(a) = n$
der Rang der Matrix $J_f(a)$)

Ist f Immersion in allen $x \in D$, so heißt f Immersion.

Bemerkung: Ist f eine Immersion, so gilt
$$n \leq N$$
(da $\operatorname{Rang} J_f(a) \leq \min\{n, N\}$).

Definition 14.1.2 Die Abbildung $f: D \to \mathbb{R}^N$ heißt Einbettung, wenn gilt:

(i) f Immersion

(ii) f ~~Injektiv~~ injektiv

(iii) $f: D \to f(D)$ Homöomorphismus.

(da f schon stetig ist, gilt

$$\text{(iii)} \Leftrightarrow f^{-1}: f(D) \to D$$

stetig)

Man erinnert, dass für X, Y metrische Räume

$f: X \to Y$ heißt Homöomorphismus

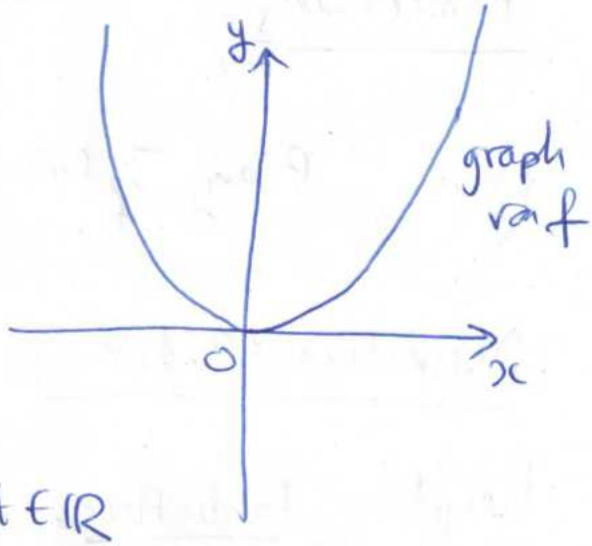
falls f bijektiv ist und $f: X \to Y$
$f^{-1}: Y \to X$

stetig sind. In der Definition 14.1.2 sind

D, $f(D)$ metrische Räume mit der von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^N$ bzw induzierten Metrik.

<u>Beispiel 14.1.3</u>

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t, t^2)$



Das Bild $f(\mathbb{R})$ ist die Parabel $y = x^2$.

$f'(t) = (1, 2t) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Daher ist f eine Immersion. Zudem ist f injektiv und $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$(x,y) \mapsto x$

welche die Einschränkung von $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ ist

Es folgt: f^{-1} ist stetig. Man bekommt

f ist eine Einbettung.

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist eine Immersion
$t \mapsto (\cos t, \sin t)$

die nicht injektiv ist; $f(\mathbb{R}) = S^1$ die Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Die Einschränkung von f auf $[0, 2\pi)$ (oder allgemeiner $[x, x+2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

$f_1 := f|_{[0,2\pi)} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv.

Ist f_1 eine ~~Em~~ Einbettung?

Wir überprüfen ob f_1 die Bedingung (iii) in Definition 14.1.2 erfüllt:

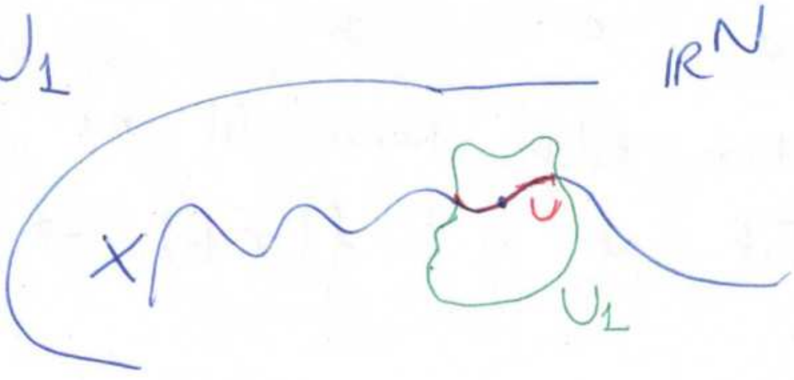
Dazu braucht man die folgende Beobachtung:

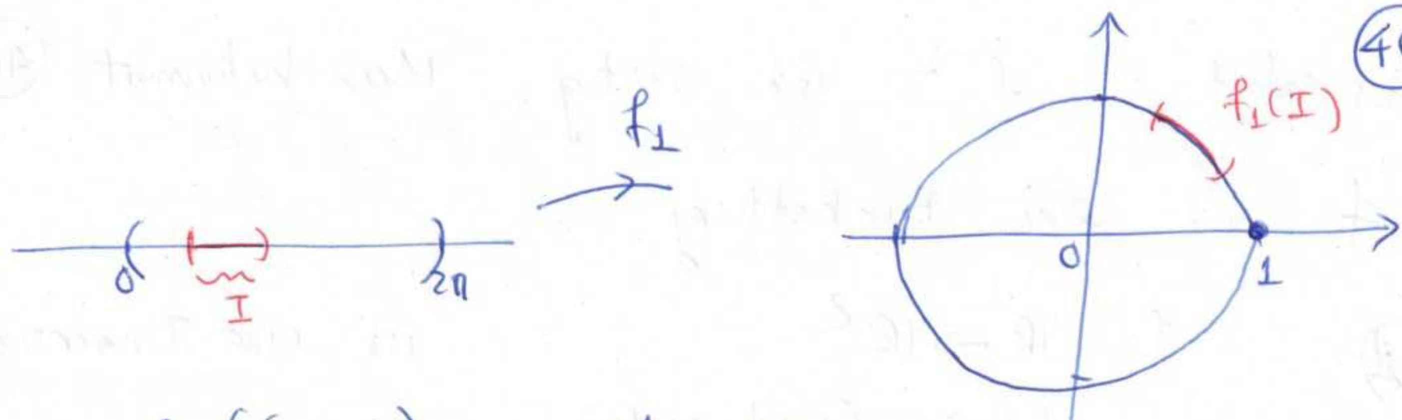
<u>Bemerkung</u>: Sei $X \subset \mathbb{R}^N$ (mit der induzierten Metrik)

Sei $U \subset X$. Dann gilt

U ist offen in $X \Leftrightarrow \exists\, U_1$ offen in $\mathbb{R}^N$

mit $U = X \cap U_1$



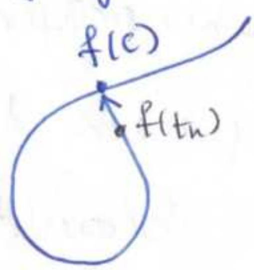


$$f_1\big((0,2\pi)\big) = S^1 \setminus \{(1,0)\}$$

Sei $I \subset (0,2\pi)$ ein offenes Intervall.

Man sieht, $f_1(I)$ ist ein offener Bogen (d.h. ohne Endpunkte). Nach der Bemerkung ist $f_1(I)$ offen. Es folgt f_1 ist ein Homöomorphismus.

(3) Betrachte eine Kurve wie folgt:

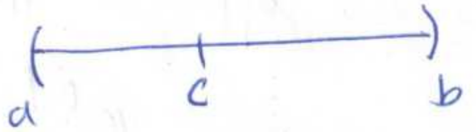


$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

s.d. $\begin{cases} f \text{ injektiv} \\ f'(t) \neq (0,0) \ \forall t \end{cases}$

(d.h. f Immersion)

und $\lim\limits_{t \to a^+} f(t) = f(c)$ für ein $c \in (a,b)$



Eine solche Kurve ist nie eine Einbettung: In der Tat sei $g : f(a,b) \to (a,b)$ die Inverse Abbildung von f

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ eine Folge, die gegen a konvergiert. Setzt $y_n := f(t_n)$.
Dann gilt $\quad y_n \to f(c)$ wenn $n\to\infty$

$$\text{aber } g(y_n) = t_n \to a \neq c = g(f(c))$$

wenn $n\to\infty$. d.h. g ist nicht stetig in $f(c)$.

Alternativ kann man wie folgt argumentieren:

Sei $U = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset (a,b)$
für ein $\varepsilon > 0$

$f(U)$ = das rote Stück, welches nie eine offene Umgebung von $f(c)$ in $f((a,b))$.
Denn jede offene Umgebung U_1 von $f(c)$ in $\mathbb{R}^2$ muss auch das grüne Stück erhalten
(d.h. $U_1 \cap f((a,b)) \neq f(U) \quad \forall\, U_1$ offene Umgebung von $f(c)$ in $\mathbb{R}^2$)

(4) Sei $n \leq N$. Setze $(x,0) := \begin{cases} x, & n = N \\ (x,0), & n < N \end{cases}$

wobei $0 \in \mathbb{R}^{N-n}$. Sei $j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$
$$x \mapsto (x,0)$$

Dann ist j linear, injektiv, also eine Immersion.
Wir zeigen später, dass <u>lokal</u> alle Immersionen

bis auf einen Diffeomorphismus die Form j haben.

<u>Sprechweise</u>: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $f: M \to \mathbb{R}^n$.

Wir sagen, dass M (bzw. $f: M \to \mathbb{R}^n$) lokal in $a \in M$ eine Eigenschaft E hat, falls es eine offene Umgebung $U \subset M$ von a gibt so dass U (bzw. $f|_U$) die Eigenschaft E hat.

<u>Notation</u>: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \subset \mathbb{R}^m.$$

Die Menge $W_\varepsilon^m(p) := \prod_{i=1}^{m} (p_i - \varepsilon, p_i + \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ heißt Würfel mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{R}^m$ und Kantenlänge 2ε.

<u>Satz 14.1.4</u> (lokal struktur einer Immersion)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^N$ Immersion in $a \in D$

Dann $\exists$ $\varepsilon > 0$ mit $W_\varepsilon^n(a) \subset D$, $\exists$ V offene Umgebung von $f(a)$ in $\mathbb{R}^N$ und $\exists$

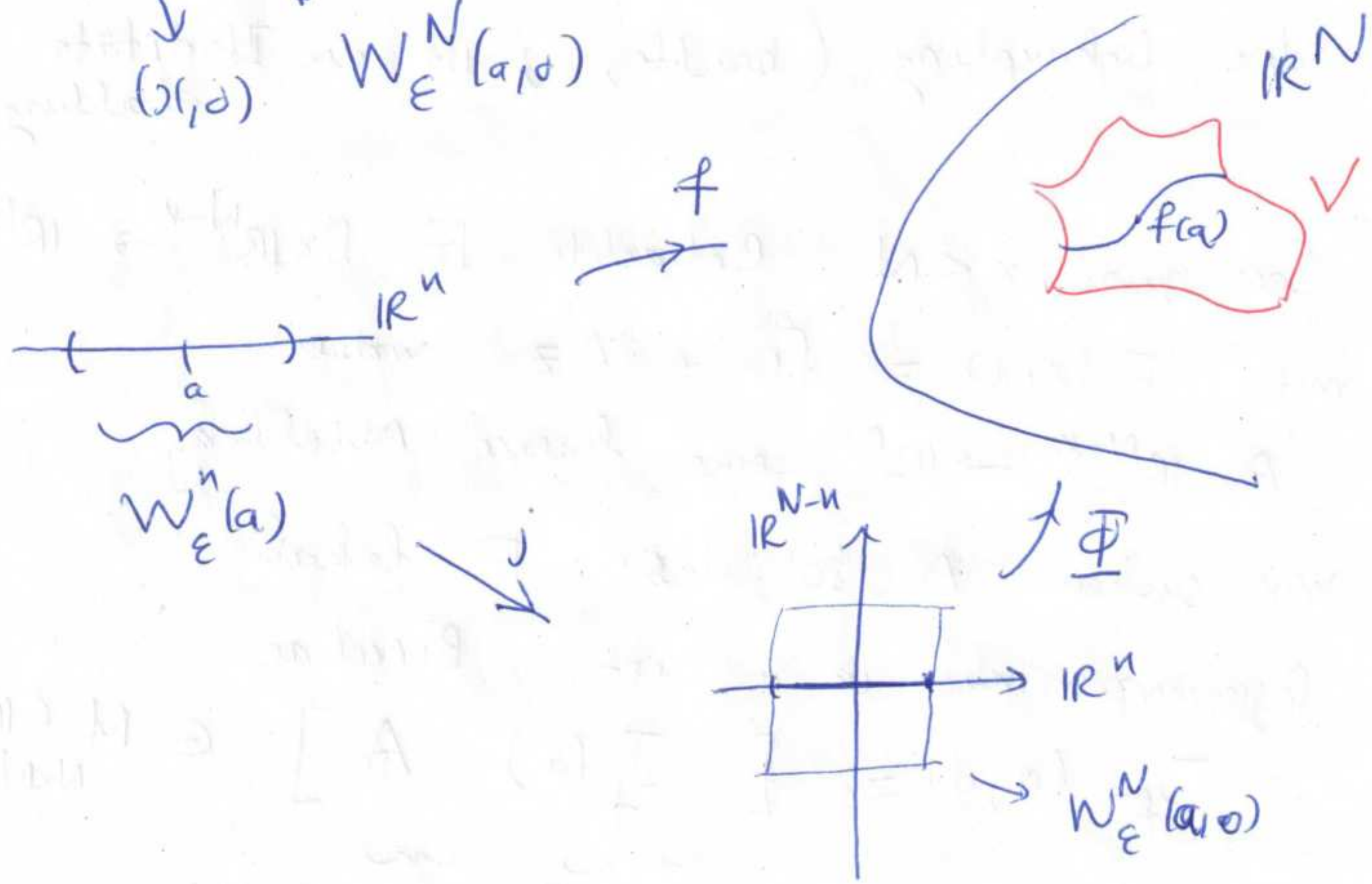
$$\Phi: W_\varepsilon^N(a, 0) \to V \text{ Diffeomorphismus}$$

So dass $f(W^n_\varepsilon(a)) \subset V$ und

$$f\big|_{W^n_\varepsilon(a)} = \Phi \circ j,$$ d.h. das Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} W^n_\varepsilon(a) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & V \\ W^N_\varepsilon(a,0) \arrow[ur, "\Phi"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

$x \mapsto (x,0)$



<u>Beweis</u>: Falls $n = N$, gilt $Df(a): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ injektiv, also Isomorphismus (d.h. $J_f(a)$ ist invertierbar). Der Satz über die Umkehrabbildung (Satz 12.5) impliziert: $\exists$ offene Umgebung U von a, V' offene Umgebung von $f(a)$ so dass

$f: U \to V'$ Diffeomorphismus.

(Siehe auch Bemerkung 12.6)

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $W_\varepsilon^N(a) \subset U$ und

setze $V := f(W_\varepsilon^n(a))$, welche offen ist.

Daher erfüllt $\Phi := f|_{W_\varepsilon^N(a)} : W_\varepsilon^N(a) \to V$

die Behauptung (beachte, j ist die Identitätsabbildung)

Sei nun $n < N$. Betrachte $F: D \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N$

mit $F(x,z) = f(x) + Az$ wobei

$A: \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N$ eine lineare Abbildung.

Wir suchen A so, dass F lokal

Diffeomorphismus in a ist. Berechne

$$J_F(a,0) = [\underbrace{J_f(a)}_{n \text{ Spalten}} \ \underbrace{A}_{N-n \text{ Spalten}}] \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$$

Da f Immersion in a ist, gilt

Rang $J_f(a) = n$ d.h. die Spalten

$v_1, v_2, \dots, v_n$ von $J_f(a)$ linear unabhängig sind.

Wähle A so dass die Spalten $v_{n+1}, \dots, v_N$ von A

eine Basisergänzung von $v_1, v_2, \dots v_n$ sind.

Es folgt: $J_F(a,0)$ ist invertierbar.

Nach Satz über die Umkehrabbildung gibt es $\varepsilon > 0$ mit $W_\varepsilon^N(a,0) \subset D \times \mathbb{R}^{N-n}$ so dass $V := F(W_\varepsilon^N(a,0))$ eine offene Umgebung von $\underset{\overset{\shortparallel}{f(a)}}{F(a,0)}$ ist und $F: W_\varepsilon^N(a,0) \to V$ Diffeomorphismus.

Man bekommt: $W_\varepsilon^n(a) \subset D$.

Offensichtlich gilt $(F \circ j)(x) = F(x,0) = f(x)$ für $x \in W_\varepsilon^n(a)$. Daher erfüllt

$\Phi := F|_{W_\varepsilon^N(a,0)}$ die Behauptung ∎

<u>Definition 14.1.5</u> Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine glatte Abbildung $f: D \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>Submersion</u> in $a \in D$ wenn $Df(a): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist, d.h. $\text{Rang } J_f(a) = m$. Ist f eine Submersion in allen $x \in D$, so heißt f Submersion.

Sei $x \in D$.

x heißt <u>regulärer Punkt</u> von $f :\Leftrightarrow$ f (per Definition) ist eine Submersion in x.

$x \in D$ heißt <u>kritischer Punkt</u> von f $:\Leftrightarrow$ f ist keine Submersion in x.

$c \in \mathbb{R}^m$ heißt <u>regulärer Wert</u> von f $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in f^{-1}(c)$ sind reguläre Punkte von f.

$c \in \mathbb{R}^m$ heißt <u>kritischer Wert</u> von f $:\Leftrightarrow$ $\exists x \in f^{-1}(c)$ kritischer Punkt.

<u>Bemerkung</u>:
- Wenn f Submersion in x ist, so gilt $N \geq m$.
- Wenn $N < m$, sind alle Punkte kritisch.
- $\forall y \in \mathbb{R}^m \setminus f(D)$ ist regulärer Wert da $f^{-1}(y) = \emptyset$.

<u>Beispiel 14.1.6</u>

(1) $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

$$J_f(x) = \underbrace{[\, 2x_1 \ \ 2x_2 \ \ \cdots \ \ 2x_{n+1} \,]}_{\neq 0} \in M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$$

Daher gilt $\text{Rang } J_f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

und f ist eine Submersion. Für $r > 0$ ist $f^{-1}(r^2) = S_r^n$ die Sphäre vom Radius r in $\mathbb{R}^{n+1}$.

(2) Sei $m \leq N$. Schreibe $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$

Setze
$$\pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$$
$$x = (\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{x_1}}, \underset{\mathbb{R}^{N-m}}{\underset{\cap}{x_2}}) \mapsto x_1$$

Man beachte, π ist eine Submersion.

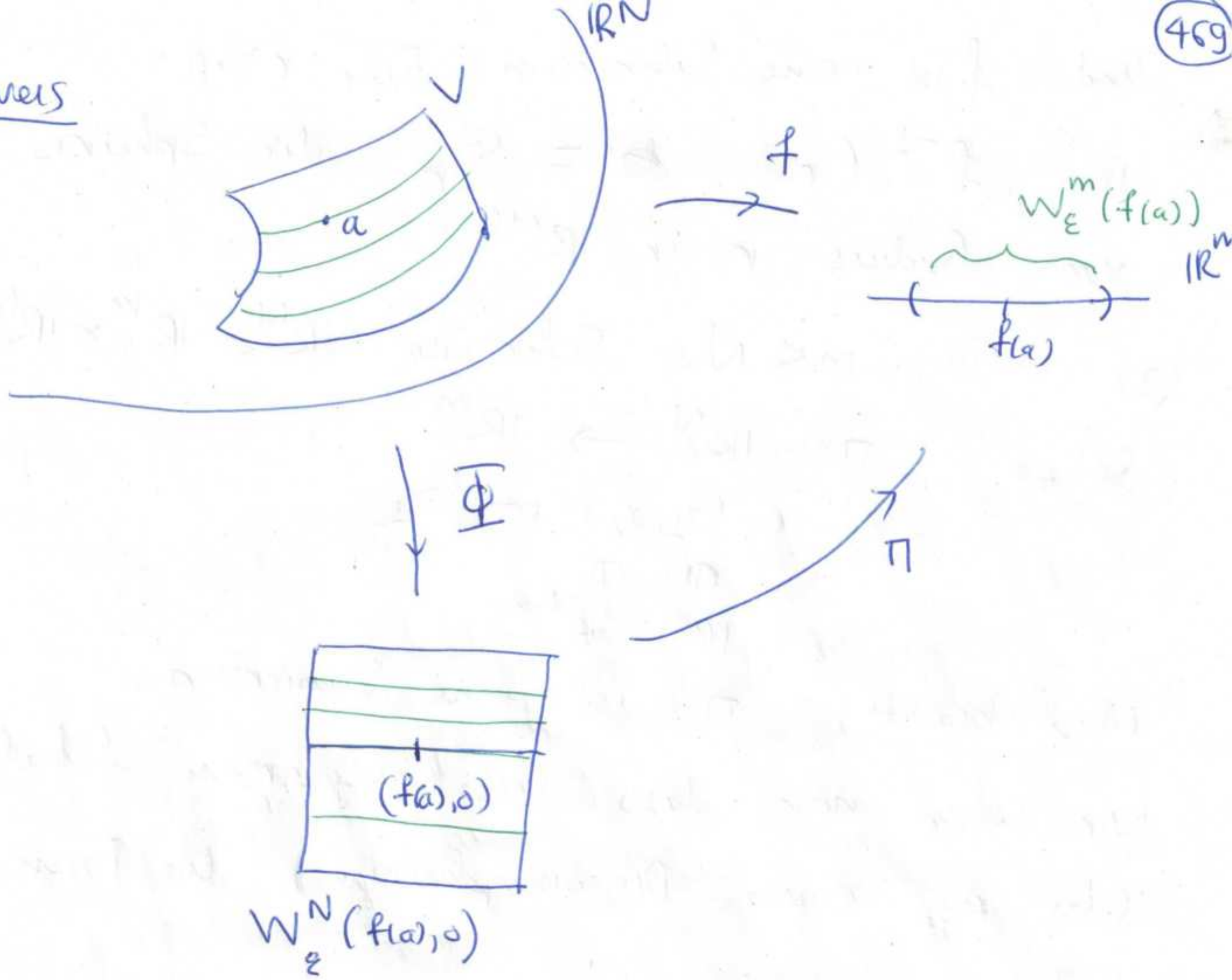
Wir sehen nun dass jede Submersion lokal (bis auf einen Diffeomorphismus) die Form π hat.

<u>Satz 14.1.7</u> (lokale Strukture einer Submersion)

Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Submersion in $a \in D$. Dann $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, V$ offene Umgebung von a, $\exists\, \Phi : V \to W_\varepsilon^N(f(a), 0)$ Diffeomorphismus so dass $f(V) = W_\varepsilon^m(f(a))$ und $f|_V = \pi \circ \Phi$ d.h. das Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & W_\varepsilon^m(f(a)) \\
& W_\varepsilon^N(f(a), 0) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis



Der Beweis ist ähnlich wie dem von Satz 14.1.4.

Sei $A: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ eine lineare Abbildung, die später gewählt wird. Setze

$$\begin{aligned} \Psi: D &\to \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} \\ x &\mapsto (f(x), A(x-a)) \end{aligned}$$

Berechne
$$J_\Psi(a) = \begin{bmatrix} J_f(a) \\ A \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, N-m \end{matrix} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

Da $\operatorname{Rang} J_f(a) = m$, sind die Zeilen $v_1, \dots, v_m$ von $J_f(a)$ linear unabhängig.

Wähle A so dass die Zeilen $v_{m+1}, \dots, v_N$ von A eine Basisergänzung zu $\{v_1, \dots v_m\}$ sind. Daher bekommt man

$J_\Psi(a)$ invertierbar.

Satz über die Umkehrabbildung (angewendet auf Ψ) impliziert: $\exists$ V offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^N$ $\exists$ $\varepsilon > 0$ so dass

$$\Phi := \Psi|_V \; \cancel{\Phi} : V \to W_\varepsilon^N(f(a), 0)$$

Diffeomorphismus (beachte $\Psi(a) = (f(a), 0)$).

Man hat
$$\pi \circ \Phi(x) = \pi\big(f(x), A(x-a)\big) = f(x).$$

$\forall x \in V$, und
$$\pi(\Phi(V)) = f(V)$$
$$\| $$
$$\pi(W_\varepsilon^N(f(a), 0))$$
$$\| $$
$$W_\varepsilon^m(f(a))$$

Die Behauptung ist erfüllt. ∎

§ 14.2. Definition und Charakterisierung der Untermannigfaltigkeit.

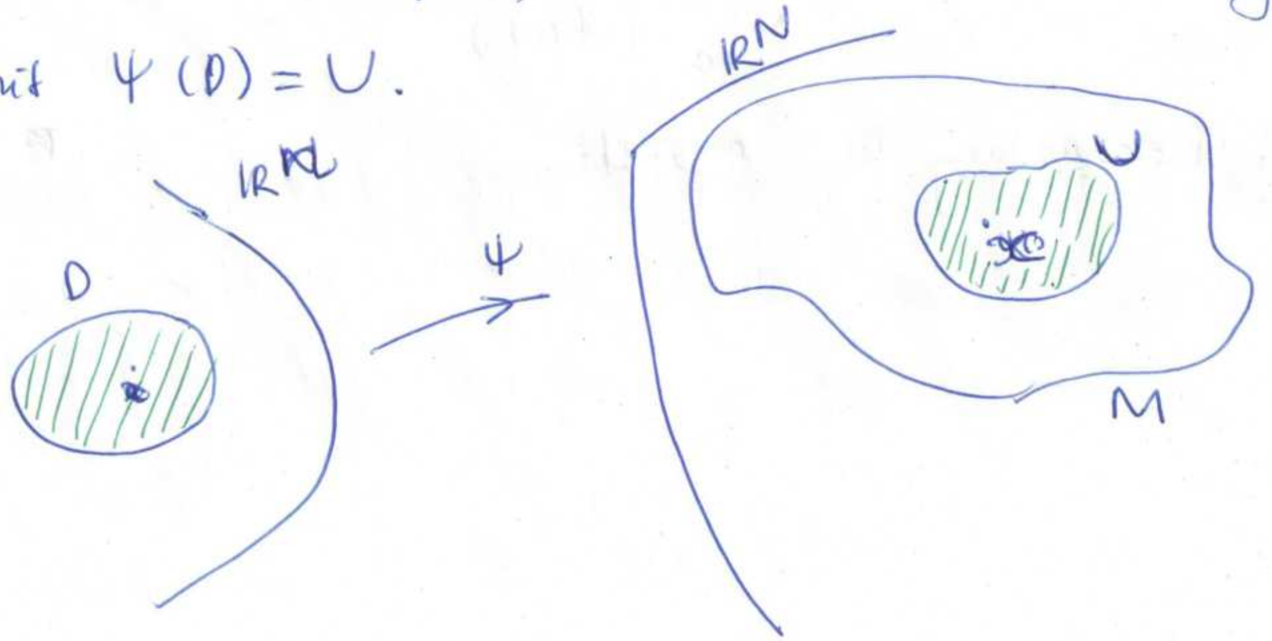
<u>Erinnerung</u>: Alle Teilmengen M von $\mathbb{R}^N$ werden mit der von $\mathbb{R}^N$ induzierten Metrik versehen. Offene Mengen in M sind bezüglich dieser (oder abgeschlossene ....) Metrik.

<u>Definition 14.2.1</u> Seien $n, N \in \mathbb{N}_0$.
Eine nicht-leere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt <u>n-dimensionale Untermannigfaltigkeit</u> des $\mathbb{R}^N$ falls: $\forall\, x \in M$ gibt es

(i) eine offene Umgebung U von x in M

(ii) $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: D \to \mathbb{R}^N$ Einbettung

mit $\varphi(D) = U$.



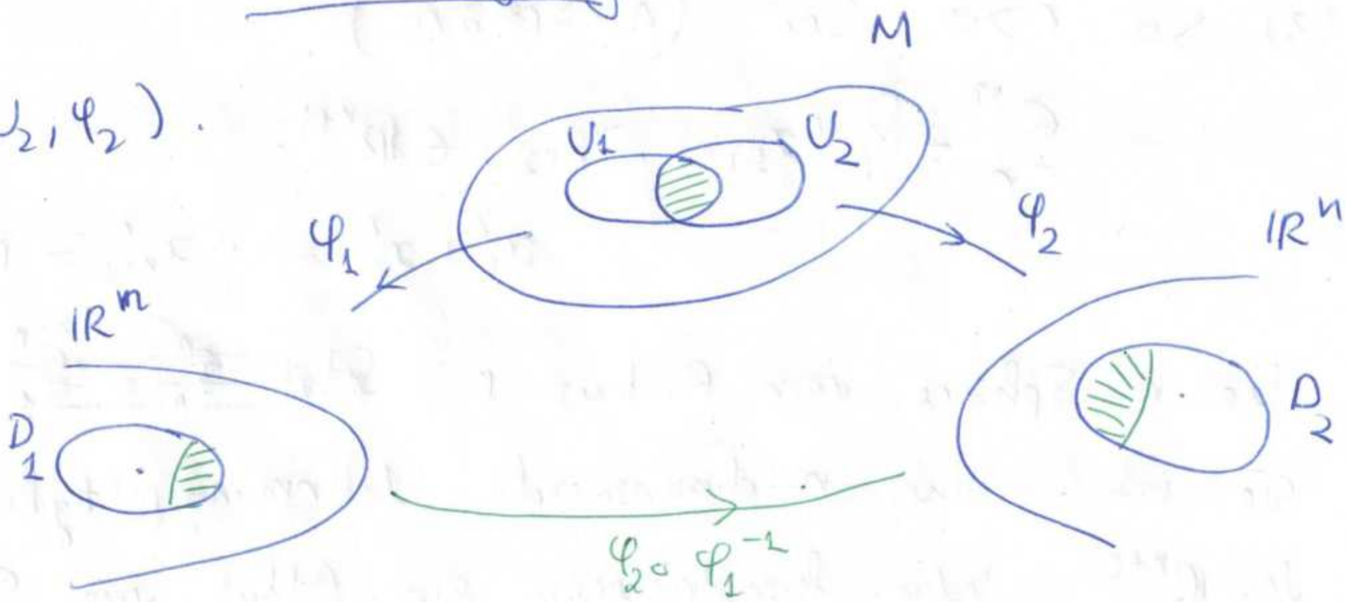
(Man sagt, M sieht lokal wie eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ aus)

ψ heißt <u>lokale Parametrisierung</u> von M um $x \in M$

Das Paar (U, φ) (mit $\varphi := \psi^{-1} : U \to D$) heißt <u>Karte</u> oder lokales <u>Koordinatensystem</u> von M um x, mit Kartengebiet U.

Seien (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) zwei Karten mit $x \in U_1 \cap U_2$. Die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$

heißt <u>Koordinatentransformation</u> oder <u>Kartenübergang</u> zwischen (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2).



Eine Familie $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ heißt <u>Atlas</u> falls $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und (U_i, φ_i) Karten von M.

n heißt Dimension von M (Man schreibt, $\dim M = n$)

$N-n$ heißt Kodimension von M in $\mathbb{R}^N$.

Wenn $n = N-1$, heißt M Hyperfläche.

Beispiel 14.2.2

(1) $U \subset \mathbb{R}^N$ offen ist eine N-dimensionale Untermannigfaltigkeit; ein Atlas ist (U, id_U)

(2) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ ist eine 1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Eine lokale Parametrisierung um $(x_0,y_0) = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ ($\varphi_0 \in \mathbb{R}$) ist

$$\psi : (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi) \to S^1$$
$$\varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

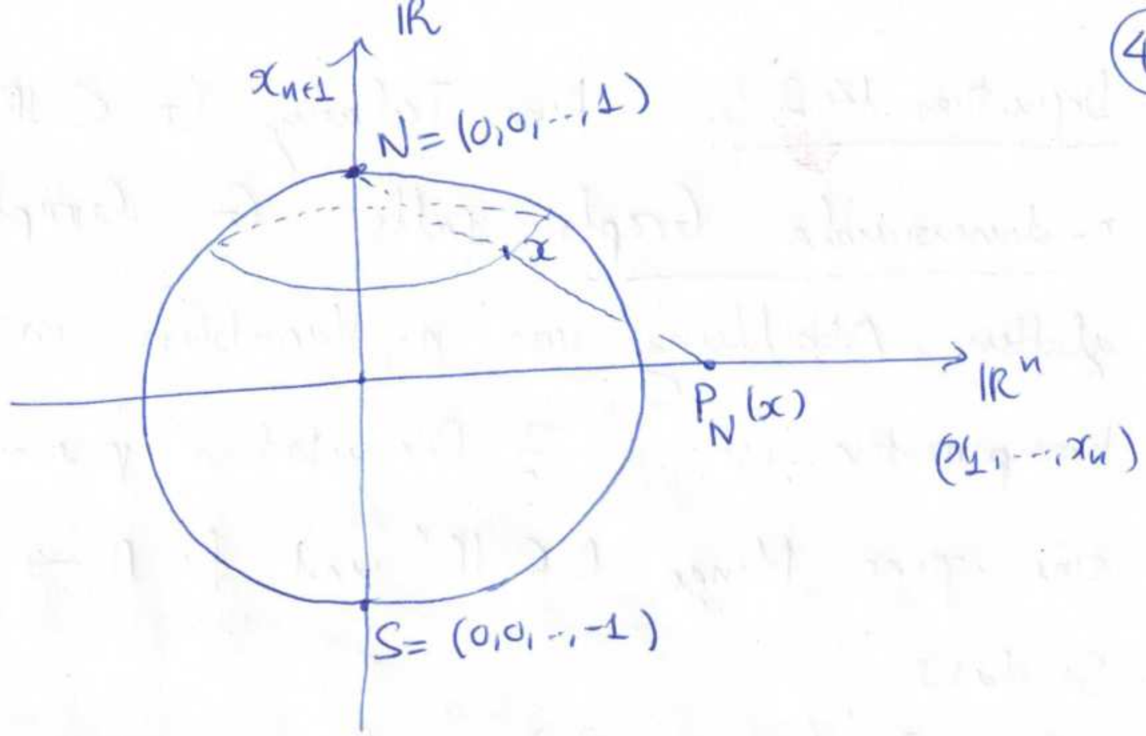
(3) Sei $r > 0$. Sei (n-Sphäre)

$$S^n_r = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\}$$

die n-Sphäre vom Radius r. ~~Setzt $S^n := S^n_1$~~.

Sie ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir konstruieren ein Atlas von S^n_r wie folgt:

Setzt $S^n := S^n_1$ $(r=1)$



Die stereographische Projektionen:

$$P_N: S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x=(x_1,\dots,x_{n+1}) \longmapsto \frac{(x_1,x_2,\dots,x_n)}{1-x_{n+1}}$$

$$P_S: S^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \frac{(x_1,\dots,x_n)}{1+x_{n+1}}$$

$$P_N^{-1}: \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$$
$$(y_1,\dots,y_n) \mapsto \frac{1}{1+\|y\|^2}\left(2y_1,\dots,2y_n, \|y\|^2-1\right)$$

Deshalb ist P_N^{-1} eine Einbettung (Beachte: P_N ist stetig)

Ähnlich ist P_S^{-1} auch eine Einbettung.
Daher ist $\{(U_S, P_S^{-1}), (U_N, P_N^{-1})\}$ ein Atlas von S^n, wobei $U_S := S^n \setminus \{S\}$, $U_N := S^n \setminus \{N\}$.

<u>Definition 14.2.3</u> Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^N$ heißt <u>n-dimensionale Graph</u> falls G Graph einer glatten Abbildung von n-Variablen mit $N-n$ Komponenten ist: $\exists$ Permutation p von $\{1,2,\dots,N\}$ eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}^{N-n}$ glatt so dass

$$G = \{ (x_1,\dots,x_N) : (x_{p(1)},\dots,x_{p(n)}) \in D, \\ (x_{p(n+1)},\dots,x_{p(N)}) = f(x_{p(1)},\dots,x_{p(n)}) \}$$

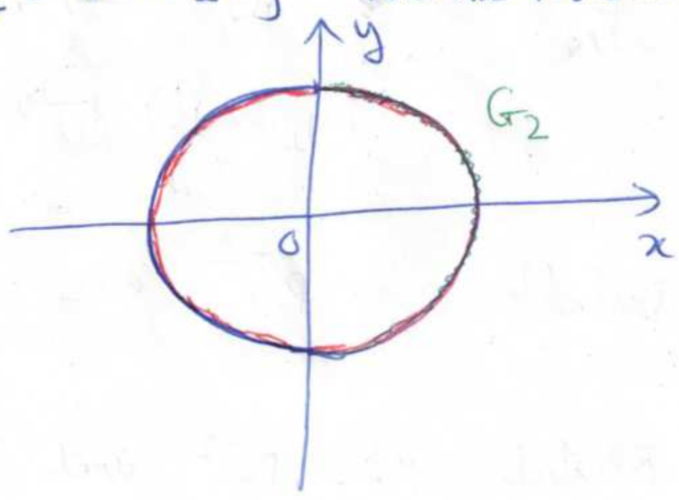
<u>Beispiel</u>: $G_1 = \{ (x, \sqrt{1-x^2}) : x \in (-1,1) \}$

die obere Halbkreis:

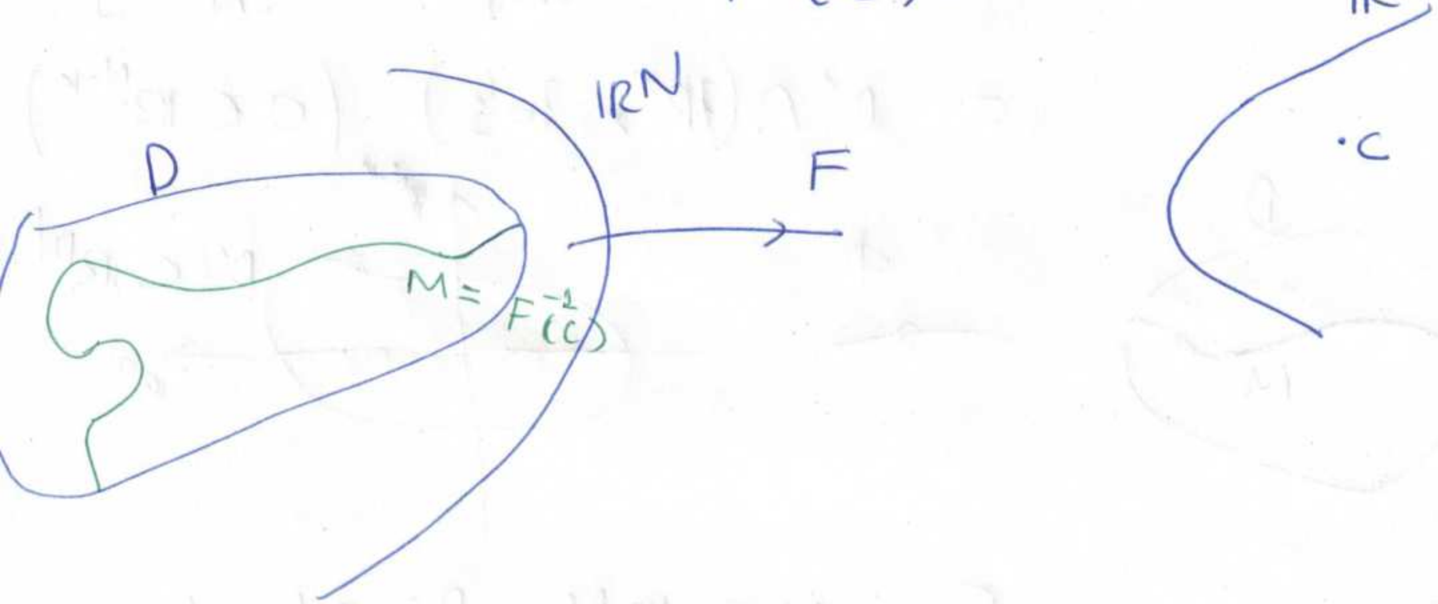
$$G_1 = \text{Graph von } \; f: (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}.$$

$G_2 = \{ (\sqrt{1-y^2}, y) : y \in (-1,1) \}$ Rechte Halbkreis

G_2 entsteht von dem Graph von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ durch Permutation der Variablen x, y.



<u>Definition 14.2.4</u> $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt <u>Lösungsmenge eines Systems von m unabhängig Gleichungen</u> falls: $\exists$ D offene Umgebung von M in $\mathbb{R}^N$ und $\exists$ $F: D \to \mathbb{R}^m$ und einen regulären Wert $c \in \mathbb{R}^m$ von F mit $F^{-1}(c) = M$.



<u>Beispiel</u>: $M = S^n_r, \quad r > 0$
$\subset \mathbb{R}^{n+1}$

und $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$

$M = f^{-1}(r^2)$. Man sieht, r^2 ist ein regulärer Wert von f, denn $J_f(x) = [2x_1, \dots, 2x_{n+1}] \neq 0$ (d.h. $\operatorname{Rang} J_f(x) = 1$) wenn $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in f^{-1}(r^2)$.

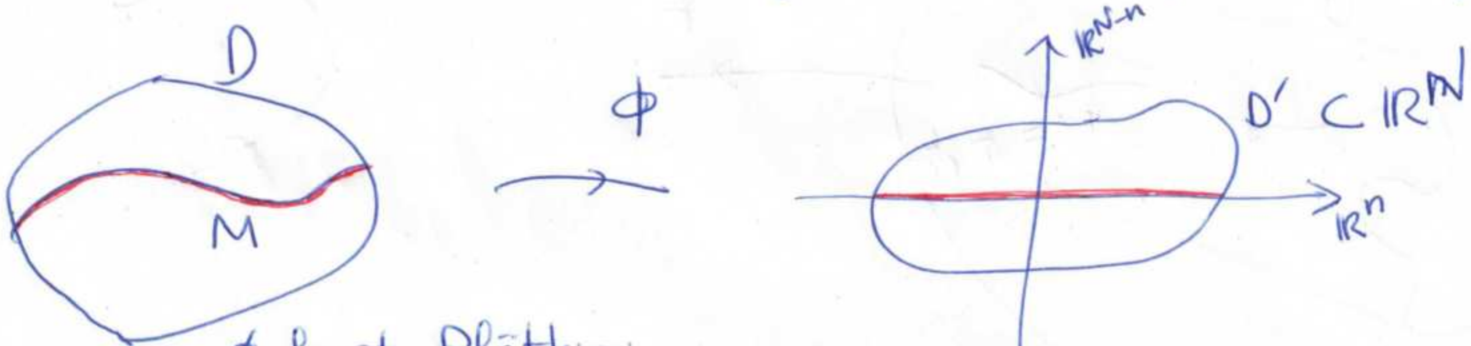
<u>Definition 14.2.5</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$.

Wir sagen: M ist zu $\mathbb{R}^n$ <u>bügelbar</u> falls

$\exists\, D$ offene Umgebung von M, $\exists\, \phi : D \to D'$

Diffeomorphismus mit

$$\phi(M \cap D) = \{ y \in D' : y_{n+1} = \dots = y_N = 0 \}$$
$$= D' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \quad (0 \in \mathbb{R}^{N-n})$$



ϕ heißt <u>Plättung</u>.

<u>Satz 14.2.6</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) M ist eine n-dim Untermannigfaltigkeit.

(ii) M ist lokal n-dim Graph.

(n-dim = n-dimensional)

(iii) M ist lokal Lösungsmenge eines Systems von $N-n$ unabhängigen Gleichungen.

(iv) M ist lokal zu $\mathbb{R}^n$ bügelbar.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$

Sei $x_* \in M$. Da M eine n-dim Untermannigfaltigkeit ist, $\exists$ U offene Umgebung von x_* in M und

$\varphi: D \to U$ Einbettung mit $\varphi(D) = U$
($D \subset \mathbb{R}^n$ offen)

Insbesondere gilt $\operatorname{Rang} J_\varphi(t) = n \ \forall t \in D$.

Sei $t_* \in D$ mit $\varphi(t_*) = x_*$. O.B.d.A können wir annehmen:

$$\det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}(t_*) \neq 0$$

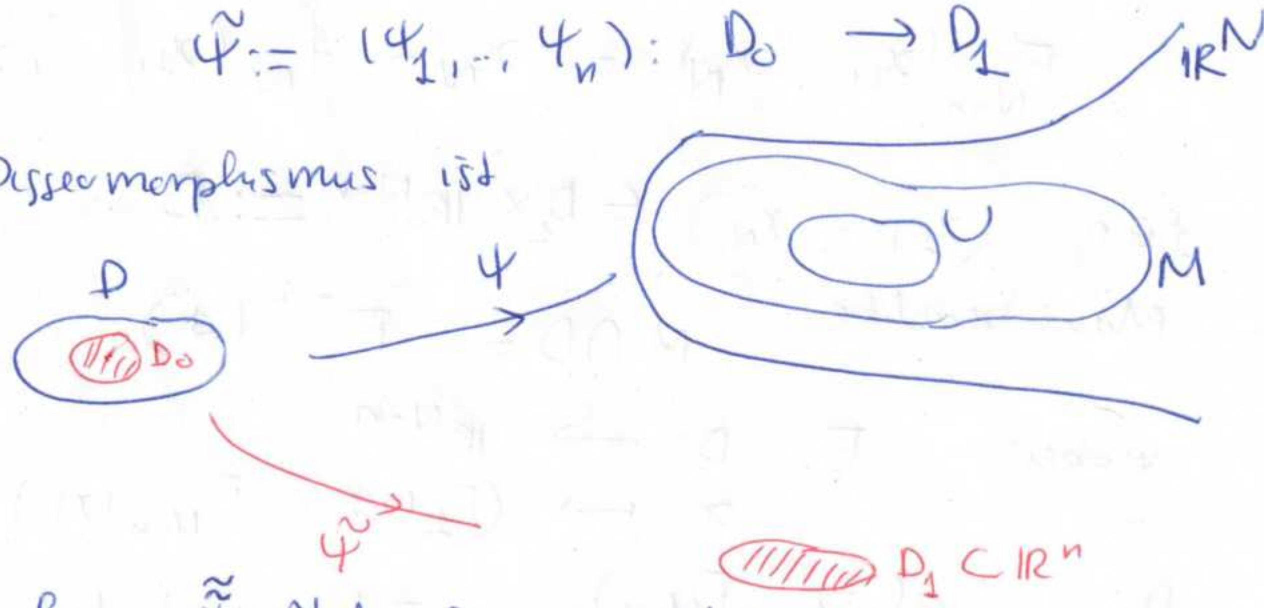
wobei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$

Nach dem Satz über die Umkehrabbildung

$\exists$ D_0 offene Umgebung von $t_0 \in \mathbb{R}^n$
D_1 offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$

so dass $\tilde{\varphi} := (\varphi_1, \dots, \varphi_n): D_0 \to D_1$

ein Diffeomorphismus ist



Setze $f := \tilde{\tilde{\varphi}} \circ \tilde{\varphi}^{-1}: D_1 \to \mathbb{R}^{N-n}$

wobei $\tilde{\tilde{\varphi}} := (\varphi_{n+1}, \dots, \varphi_N)$

Beachte $\Psi = (\tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}})$

und

$$\Psi(D_0) = \Psi(\tilde{\varphi}(D_1))$$
$$= \{(x_1, \dots, x_N) : (x_{n+1}, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_n)\}$$
$$= \text{Graph of } f \text{ auf } D_1.$$

d.h. M ist lokal n-dim Graph.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u> Nach Umnummerierung der Koordinaten können wir annehmen dass

M in einer Umgebung U von x_* als Graph der Funktion $f = (f_{n+1}, \dots, f_N) : D_1 \to \mathbb{R}^{N-n}$

darstellt wird. Definiere

$$F_1(x_1, \dots, x_N) := x_{n+1} - f_{n+1}(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$F_{N-n}(x_1, \dots, x_N) := x_N - f_N(x_1, \dots, x_n)$$

für $(x_1, \dots, x_N) \in D_1 \times \mathbb{R}^{N-n} =: D$.

Man beachte $M \cap D = F^{-1}(0)$

wobei
$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$$
$$x \longmapsto (F_1(x), \dots, F_{N-n}(x))$$

Da $\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_{N-n})}{\partial(x_{n+1}, \dots, x_N)} = Id_{N-n}$ = Einheitsmatrix, ist 0 ein regulärer Wert für F.

Daher folgt (iii)

<u>(iii) $\Longrightarrow$ (iv)</u> Sei $x^* \in M$. Nach (iii) $\exists$

offene Umgebung D von x^* in $\mathbb{R}^N$ und

$$F : D \to \mathbb{R}^{N-n}$$

$$c \in \mathbb{R}^m \text{ regulärer Wert}$$

mit $\quad M \cap D = F^{-1}(c)$. Nach Umnumerierung

der Koordinaten können wir annehmen, dass

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{n+1}, \dots, x_N)} \in M_{(N-n)\times(N-n)}(\mathbb{R})$$

invertierbar in x^*. Definiere

$$\phi : D \to \mathbb{R}^N$$

$$x \longmapsto (x_1, \dots x_n, F(x) - c)$$

Man berechnet

$$J_\phi(x_*) = \left[\begin{array}{c|c} Id_n & A \\ \hline 0 & \dfrac{\partial F}{\partial(x_{n+1}, \dots, x_N)} \end{array}\right]$$

wobei A eine Matrix, die wir nicht berechnen müssen. Es folgt, dass $J_\phi(x_*)$ invertierbar ist.

Zudem $\quad \phi(M \cap D) = \phi(D) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Die Behauptung (iv) folgt nun aus dem Satz über

Umkehrabbildung.

<u>(iv) $\Rightarrow$ (i)</u> Sei $x_* \in M$. Nach (iv) $\exists$ offene Umgebung D von x_* in $\mathbb{R}^N$, D' offen in $\mathbb{R}^N$ und $\phi: D \to D'$ Diffeomorphismus mit

$$\phi(M \cap D) = D' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) =: D''$$

Beachte D'' offen in $\mathbb{R}^n$. Setze

$$\begin{aligned} \psi: D'' &\to \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto \cancel{\phi^{-1}(t,0)}\ \phi^{-1}(t,0) \end{aligned}$$

$$\left((t,0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} = \mathbb{R}^N \right)$$

ψ ist eine Einbettung da ϕ Diffeomorphismus ist.

d.h. M eine Untermannigfaltigkeit. $\blacksquare$

Folgerung 14.27 Seien $D \subset \mathbb{R}^N$ offen
$F: D \to \mathbb{R}^m$, $c \in F(D)$
ein regulärer Wert. Dann ist $F^{-1}(c)$ eine $(N-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.

Diese Folgerung ist sehr wichtig, da Untermannigfaltigkeit oft als Lösungsmengen gegeben werden.

Beispiele 14.28

(i) Sei $r > 0$. Dann ist S_r^n eine n-dim Untermannigfaltigkeit, da $S_r^n = f^{-1}(r^2)$ wobei

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^2$$

und r^2 ein regulärer Wert von f ist.

(ii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Sei $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Betrachte

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i x_j = r\}$$

d.h. $Q = f^{-1}(r)$ wobei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$

Da $J_f(x) = 2Ax \neq 0$ falls $x \in Q$, sieht man dass, r ein regulärer Wert von f ist.

Daraus folgt: Q eine $(n-1)$-dim Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ (d.h. Q eine Hyperfläche von $\mathbb{R}^n$).

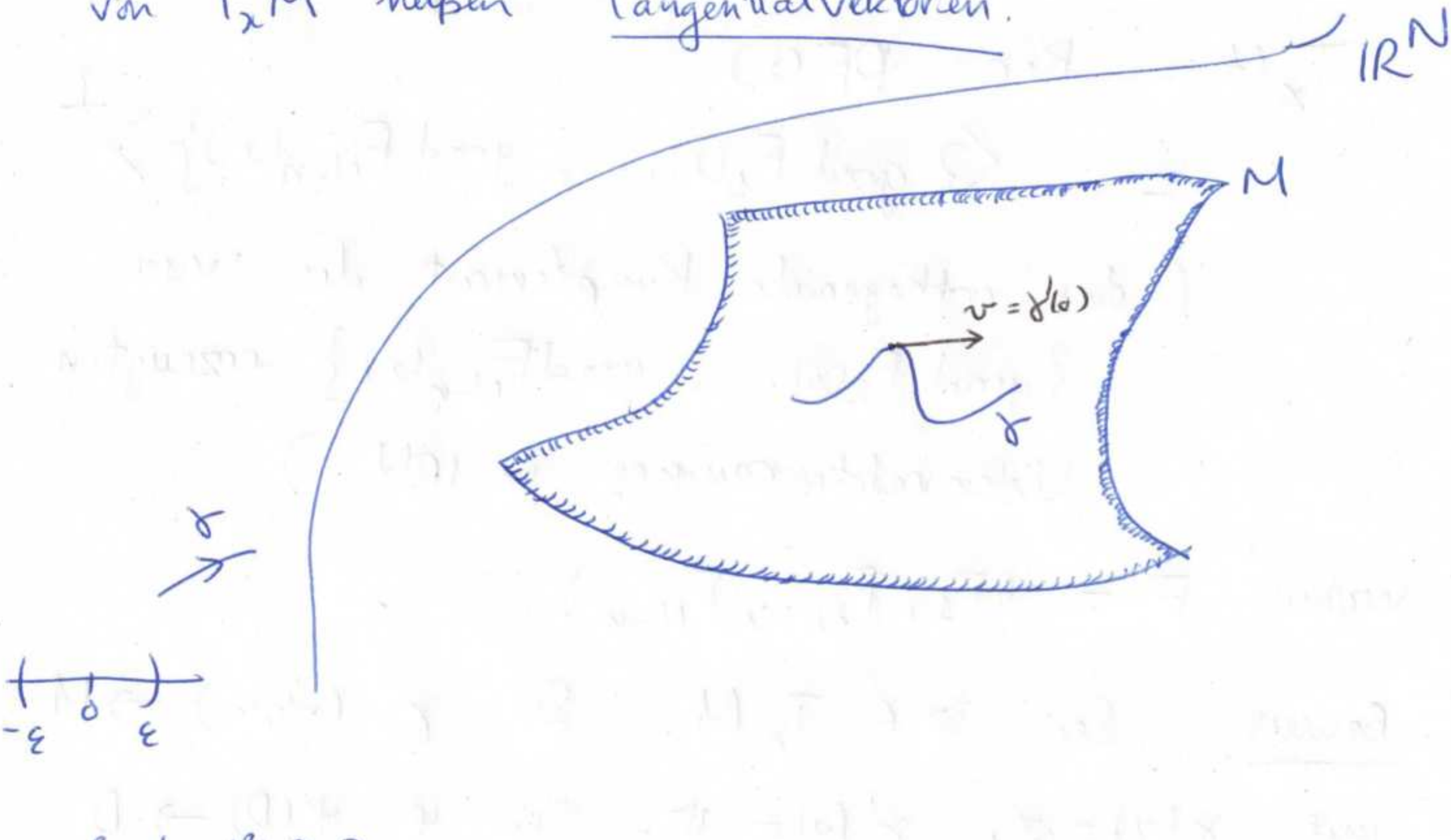
Q heißt <u>Quadrik</u>.

§ 14.3. Tangential- und Normalenraum

Definition 14.3.1 Sei M eine n-dim Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$. Sei $x \in M$. Die Menge

$$T_x M := \{ v \in \mathbb{R}^N : \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^N \text{ glatt}, \ \gamma(0) = x, \ \gamma'(0) = v \}$$

heißt Tangentialraum von M im x. Die Elemente von $T_x M$ heißen Tangentialvektoren.



Satz 14.3.2

(1) Sei $\Psi : D \to M$ lokale Parametrisierung von M um x mit $\Psi(a) = x$. Dann gilt

$$T_x M = \operatorname{Im} D\Psi(a) \quad \left(= D\Psi(a)(\mathbb{R}^n) \right)$$

$(D\Psi(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N)$. Insbesondere ist

$T_x M$ ein n-dim Vektorraum und

$\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}(a) \right\}$ ist eine Basis von $T_x M$.

(ii) Sei D offene Umgebung von x in $\mathbb{R}^N$, $F: D \to \mathbb{R}^{N-n}$ glatt und $c \in \operatorname{Im}(F)$ $(\operatorname{Im}(F) = F(D))$

ein regulärer Wert von F mit

$$M \cap D = F^{-1}(c).$$ Dann gilt

$$T_x M = \operatorname{Ker} DF(x)$$
$$= \langle \{ \operatorname{grad} F_1(x), \dots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x) \} \rangle^\perp$$

(das orthogonale Komplement des von $\{\operatorname{grad} F_1(x), \dots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x)\}$ erzeugten Untervektorraumes in $\mathbb{R}^N$)

wobei $F = (F_1, F_2, \dots, F_{N-n})$.

<u>Beweis</u>. Sei $v \in T_x M$. Sei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$. Sei $\varphi: \Psi(D) \to D$, $\varphi := \Psi^{-1}$

<u>Behauptung</u>: $\varphi \circ \gamma$ ist glatt
(Nach Verkleinern von ε, bekommt man $\gamma \subset \Psi(D)$)

Nach Satz 14.1.4 (lokale Struktur einer Immersion)

und Verkleinern von D wenn nötig, erhalten wir ein Diffeomorphismus $\Phi : D_1 \to D_2$ wobei

D_1, D_2 offene Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ mit

1) $\psi(D) \subset D_1$

2) $\Phi \circ \psi(x) = (x, 0).\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$(0 \in \mathbb{R}^{N-n})$

Setzt man $\tilde{\gamma} := \Phi \circ \gamma = (\tilde{\gamma}_1, .., \tilde{\gamma}_n, 0)$

Daher $\varphi \circ \Phi^{-1}(x, 0) = x$

$$\varphi \circ \tilde{\gamma}(t) = \varphi \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma(t)$$
$$= \Phi \circ \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$$

$\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Das impliziert $\varphi \circ \gamma$ glatt.

Nun schreibt man

$$\gamma = \psi \circ \varphi \circ \gamma$$
$$= \psi \circ (\varphi \circ \gamma)$$

Kettenregel führt zu

$$v = \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\left(\psi \circ (\varphi \circ \gamma)\right)\Big|_{t=0}$$
$$= D\psi\left(\varphi \circ \gamma(0)\right) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0)$$
$$= D\psi(a) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) \in \operatorname{Im} D\psi(a)$$

Also $T_x M \subset \operatorname{Im} D\psi(a)$.

Andererseits sei $v \in \operatorname{Im} D\varphi(a)$. Dann $\exists\, u \in \mathbb{R}^n$

mit $$v = D\varphi(a) \cdot u = \frac{d}{dt} \varphi(a + tu)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt} \gamma(t)\Big|_{t=0}$$

wobei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$
$$t \longmapsto \varphi(a + tu).$$

(ii) Sei $v \in T_x M$ mit $v = \gamma'(0)$ wobei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = x$. Dann gilt $F \circ \gamma(t) = 0 \quad \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Also

$$0 = \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = DF(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0)$$
$$= DF(x) \cdot v$$

D.h. $v \in \operatorname{Ker} DF(x)$. Zudem ist $DF(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ surjektiv. Daraus folgt $\dim \operatorname{Ker} DF(x) = n$. Nach Vergleichen der Dimensionen von $T_x M$ und $\operatorname{Ker} DF(x)$ bekommt man $T_x M = \operatorname{Ker} DF(x)$.

Da $DF(x) \cdot v = 0 \iff$
$$\langle \operatorname{grad} F_1(x), v \rangle = 0, \ldots, \langle \operatorname{grad} F_{N-n}(x), v \rangle = 0$$

erhält man die Gleichung
$$\operatorname{Ker} DF(x) = \langle \{ \operatorname{grad} F_1(x), \ldots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x) \} \rangle^{\perp}$$

<u>Beispiel</u> (i) $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $x \in U$, dann

$$T_x U = \mathbb{R}^N.$$

(ii) Sei $x \in S^n_r$. Dann gilt

$$T_x S^n_r = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0 \}$$

(Satz 14.3.2 (ii) angewendet auf ~~F(x)~~ $F(x) = \|x\|^2$)

<u>Definition 14.3.3</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $\dim M = n$ ($\dim M$ = Dimension von M)

$x \in M$. Dann heißt

$$N_x M := T_x M^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^N : v \perp T_x M \}$$

Normalenraum an M im x. Die Elemente von $N_x M$ heißen <u>Normalenvektoren</u> an M im x.

<u>Satz 14.3.3</u> (Extrema mit Nebenbedingungen)

Seien M n-dim Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$

$x \in M$, D offene Umgebung von x in $\mathbb{R}^N$

und $F : D \to \mathbb{R}^{N-n}$ glatt, $c \in \operatorname{Im}(F)$

ein regulärer Wert von F mit $M \cap D = F^{-1}(c)$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige differenzierbare Funktion so dass $f|_{M \cap D}$ im x ein lokales

Maximum (Minimum) besitzt

(d.h. $\exists$ Umgebung D_1 von x mit

$$f(\tilde{x}) \leq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(a))$$

$\forall\ \tilde{x} \in M \cap D_1$. Dann $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_{N-n} \in \mathbb{R}$

mit

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^{N-n} \lambda_j \operatorname{grad} F_j(x)$$

$(F = (F_1, \dots, F_{N-n}))$

<u>Beweis</u> Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^N$

glatt mit $\gamma(0) = x$. Dann hat $f \circ \gamma$

bei $t = 0$ ein lokales Extremum. Also gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \gamma_i'(0)$$

$$= \langle \operatorname{grad} f(x), \gamma'(0) \rangle \quad (\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N))$$

Daraus folgt $\operatorname{grad} f(x) \in (T_x M)^\perp$

$$= \langle \{ \operatorname{grad} F_1(x), \dots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x) \} \rangle$$

(nach Satz 14.3.2 (ii)). Die Behauptung folgt $\blacksquare$

In der Situation vom Satz 14.3.3 sagt man: der Punkt x sei ein lokales Extremum von f unter der <u>Nebenbedingung</u> $\{F = c\}$. Die Zahlen

$\lambda_1, \dots, \lambda_{N-n}$ heißen

<u>Lagrangesche Multiplikatoren</u>.

§ 14.4. Glatte Abbildungen und ihr Differential

<u>Definition 14.4.1</u> Seien $\left\{ \begin{array}{ll} M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1} & \dim M_1 = n_1 \\ M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2} & \dim M_2 = n_2 \end{array} \right.$

zwei Untermannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f: M_1 \to M_2$ heißt <u>glatt</u>, falls $\forall$ Karte (U, φ) von M_1 die Abbildung $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ eine glatte Abbildung. Setzen wir

$$\mathcal{C}^\infty(M_1, M_2) := \{ f: M_1 \to M_2 \text{ glatt} \}$$

Wenn $M_2 = \mathbb{R}$ schreibt man $\mathcal{C}^\infty(M_1)$ für $\mathcal{C}^\infty(M_1, \mathbb{R})$.

<u>Bemerkung</u>: Ist $M_1 = U_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ eine offene Menge, dann stimmt der oben definierte Differenzierbarkeitsbegriff mit dem schon bekannten

für Abbildungen zwischen offenen Teilmengen in $\mathbb{R}^{N_1}$, $\mathbb{R}^{N_2}$ überein:

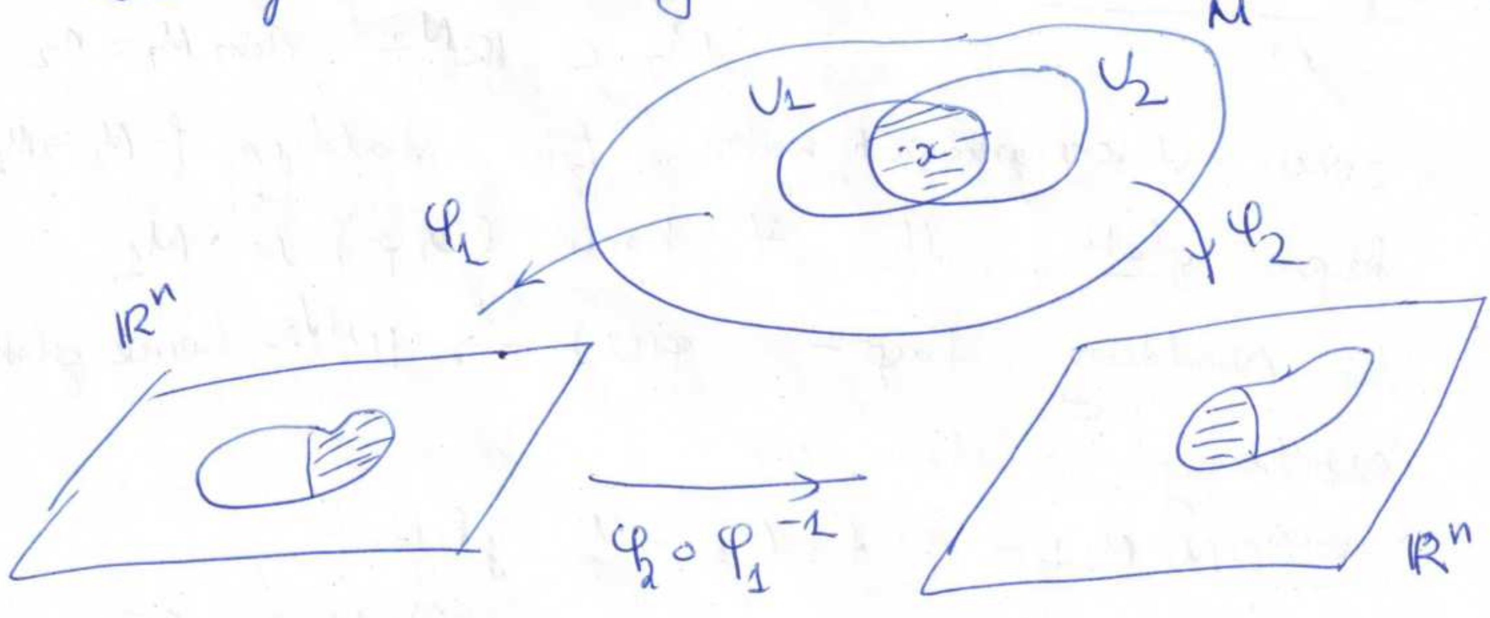
man betracht die Karte $\varphi : U \to U$, $\varphi =$ Identitäts abbildung.

<u>Lemma 14.4.2</u> Seien (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) zwei Karten der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ mit $\dim M = n$.

um den punkt $x \in M$. Dann ist die Kartenübergang

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$

eine glatte Abbildung (daher glatte Diffeomorphismus)



<u>Beweis</u>: Der Beweis ist ~~ähnlich~~ ähnlich wie dem Anfang des Beweis vom Satz 14.3.2. (Erinnere φ_1^{-1} ist glatt.) wir haben dort gezeigt, dass $\forall$ glatte Kurve $\gamma \subset U_1 \cap U_2$

gilt: $\varphi_2 \circ \gamma$ ist glatt.

Die gleiche Argumente zeigen dass, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ auch glatt ist. (Grob gesagt, φ_2 ist die Einschränkung einer glatten Abbildung von einer offenen Teilmenge in $\mathbb{R}^N$)

<u>Folgerung 14.4.3</u> Seien f, M_1, M_2 wie in der Definition 14.4.1. Sei $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas von M_1. Dann gilt

$$f \text{ ist glatt} \iff \forall i \in I: \ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to \mathbb{R}^{N_2}$$

glatt.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" klar. Die Umkehrrichtung folgt aus Lemma 14.4.2: Sei (U, ψ) eine Karte von M_1, $x \in U$. Nehmen wir ein $i \in I$ mit $U_i \cap U \neq \emptyset$. Schreiben wir

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \psi^{-1})$$
$$: \psi(U \cap U_i) \to \mathbb{R}^{N_2}$$

welche glatt als die Komposition zweier glatten Abbildungen ist ∎

Satz 14.4.4 (dim $M = n$)

(i) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit
(U, φ) eine Karte von M. Dann ist
$\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ glatt, und ist die Inklusions-abbildung $i: M \to \mathbb{R}^N$
auch glatt.

(ii) Sind $f: M_1 \to M_2$ und $g: M_2 \to M_3$ glatt
So ist $g \circ f$ auch glatt.

(iii) Seien $U \subset \mathbb{R}^N$ offen
$M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit.
und $f: U \to \mathbb{R}^m$ glatt. Dann ist
$f|_{U \cap M}: M \to \mathbb{R}^m$ glatt

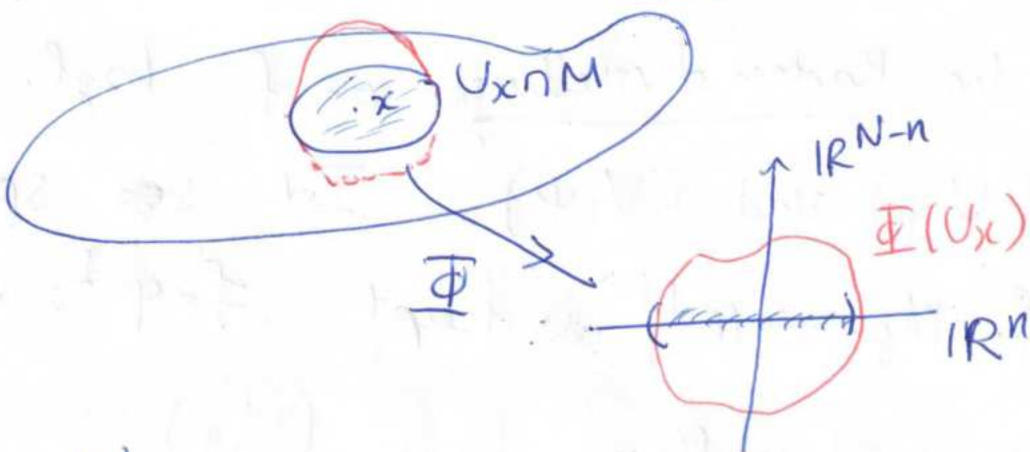
(iv) Es gilt
$f \in \mathcal{C}^\infty(M) \Leftrightarrow \forall x \in M \ \exists$ eine offene
Umgebung U_x von x in $\mathbb{R}^N$ und $F_x \in \mathcal{C}^\infty(U_x)$
mit $F_x|_{U_x \cap M} = f|_{U_x \cap M}$
(lokale Erweiterung einer glatten Funktion)

<u>Beweis</u> (i) — (iii) sind klar.

Die Behauptung (iv) folgt aus der Tatsache, dass M lokal bügelbar ist: es erlaubt uns, die Frage auf den Fall $M = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ zu reduzieren.

In diesem Fall ist
$$F : \ldots \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \ldots, x_N) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$
eine Fortsetzung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Streng gesagt argumentiert man wie folgt



Sei $U_x \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Umgebung von x so dass

$$\exists \quad \Phi : U_x \to \Phi(U_x) \subset \mathbb{R}^N$$

Diffeomorphismus mit $\Phi(U_x \cap M)$
$$= \Phi(U_x) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

Setze
$$F_\Phi : \Phi(U_x) \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \ldots x_N) \mapsto f \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots x_n)$$
und $F := F_\Phi \circ \Phi$ ist die gewünschte Fortsetzung.

Definition 14.4.5

Seien M_1, M_2 Untermannigfaltigkeiten $\dim M_1 = n_1$, $\dim M_2 = n_2$.

Seien $f: M_1 \to M_2$ Abbildung

(U, φ) eine Karte ~~von x~~ um $x \in M_1$

(V, ψ) eine Karte um $f(x) \in M_2$. Dann heißt die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \underbrace{\varphi(U \cap f^{-1}(V))}_{\mathbb{R}^{n_1}} \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

die <u>Kartendarstellung</u> von f bzgl. der Karten (U, φ) und (V, ψ). Ist ~~sp~~ speziell $f: M_1 \to \mathbb{R}^N$, so heißt $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}^N$ <u>Kartendarstellung</u> bzgl. (U, φ).

Man beachte, f ist glatt $\Leftrightarrow$ alle ihre Kartendarstellungen glatt sind.

Sei (U, φ) eine Karte wobei $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.
Seien $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$.
Schreibt man $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. ~~Wir notieren~~
$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Wir notieren (U,φ) auch als

$$(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

oder einfach als $(U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Die Kartendarstellung $f\circ\varphi^{-1}$ wird als

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := f\circ\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

geschrieben.

<u>Beispiel</u>:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$$

In der Polarkoordinaten (z. B. $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$

$$\varphi^{-1}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$\forall\, r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in (0, 2\pi)$; oder allgemeiner

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos\varphi_0, r\sin\varphi_0) : r \geq 0\}$ für ein $\varphi_0 \in \mathbb{R}$

$\varphi^{-1}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $\forall\, r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$)

gilt $f(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r$.

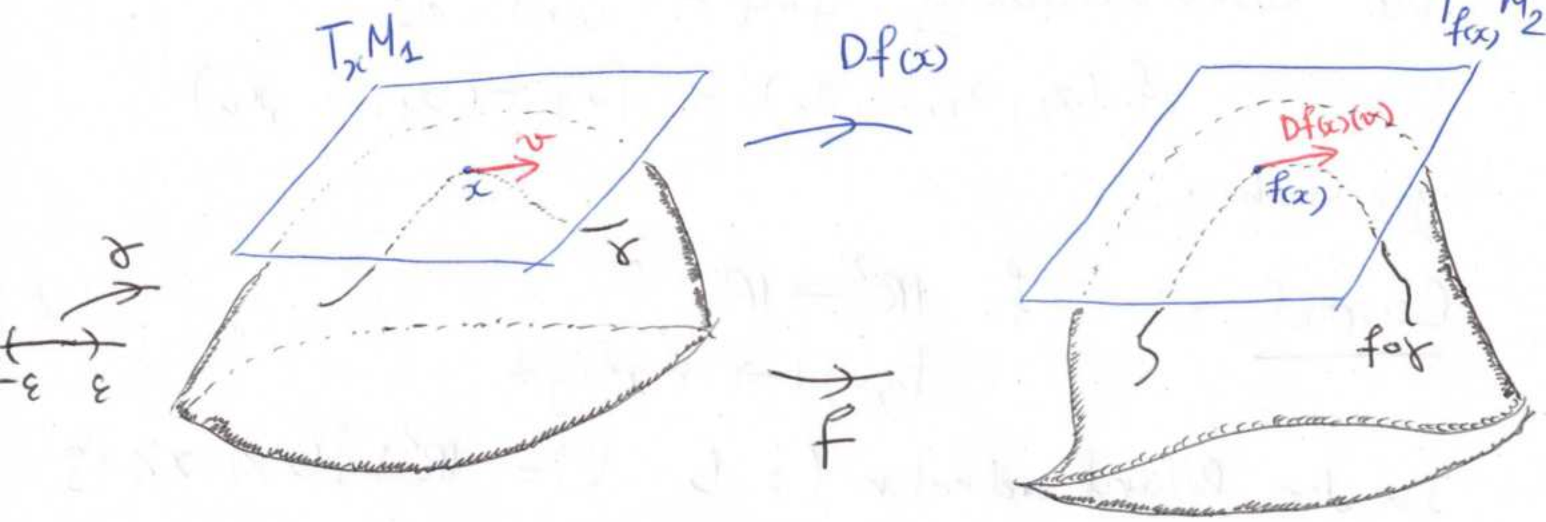
<u>Definition 14.4.6.</u> Sei $f: M_1 \to M_2$ eine (glatte) Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Unter dem <u>Differential der Abbildung f im Punkt $x \in M_1$</u> versteht man die Abbildung

$$Df(x): T_x M_1 \to T_{f(x)} M_2$$

definiert durch:

Sei $v \in T_x M_1$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$
$\gamma(0) = x \;, \gamma'(0) = v$

$$Df(x) \cdot (v) := (f \circ \gamma)'(0) \quad (*)$$



<u>Lemma 14.4.7</u> Die Definition vom Differential von f ist wohl-definiert, d.h. ~~die Formel (*)~~ der Vektor $Df(x)(v)$ in der Formel $(*)$ ist unabhängig von der Wahl von γ.

<u>Beweis</u>: Da M lokal bügelbar zu $\mathbb{R}^n$ ist, $\exists$ D offene Umgebung von x in $\mathbb{R}^{N_1}$, D' offene ($M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$) Teilmengen in $\mathbb{R}^{N_1}$ und $\phi : D \to D'$ Diffeomorphismus mit $\phi(D \cap M) = D' \cap \{(y,0) : y \in \mathbb{R}^n\}$

Man bekommt

$$f \circ \gamma = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$$
$$= f \circ \varphi^{-1} \circ \phi \circ \gamma \;, \text{ wobei } \varphi$$

die Einschränkung von ϕ auf $D \cap M$ ist.

Nach Satz 14.4.4 (ii) gilt:

$$f \circ \varphi^{-1} : \quad D' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \to \mathbb{R}^{N_2} \quad \text{glatt}$$
$$(M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2})$$

Aus Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(0) &= D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot D(\phi \circ \gamma)(0) \\ &= D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot (D\phi(x) \cdot \gamma'(0)) \\ &= D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot (D\phi(x) \cdot v), \quad (**)\end{aligned}$$

welche unabhängig von γ ist.

<u>Satz 14.4.8</u> Seien $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ glatte Abbildungen. Sei $x \in M_1$. Dann gilt

(i) $Df(x) : T_x M_1 \to T_{f(x)} M_2$ ist linear

(ii) (Kettenregel) $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$.

<u>Beweis</u> (i) folgt unmittelbar aus $(**)$ im Beweis des Lemmas 14.4.7. Wir zeigen (ii).

Beachte:

$$D(g \circ f)(x)(\gamma'(0)) = (g \circ f \circ \gamma)'(0) = (g \circ (f \circ \gamma))'(0)$$

$$= Dg(f(x))\left((f\circ\gamma)'(0)\right)$$

$$= Dg(f(x)) \circ Df(x)(\gamma'(0)).$$

Daher folgt (ii). ■

Bemerkung 14.49

(1) Seien $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $M \subset U$ Untermannigfaltigkeit und $F \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^{N'})$. Sei $f := F|_M : M \to \mathbb{R}^{N'}$.

Dann gilt
$$Df(x) = DF(x)|_{T_xM} \quad \forall x \in M.$$

$\left(\text{da} \quad f\circ\gamma = F\circ\gamma \quad \forall\, \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M\right)$

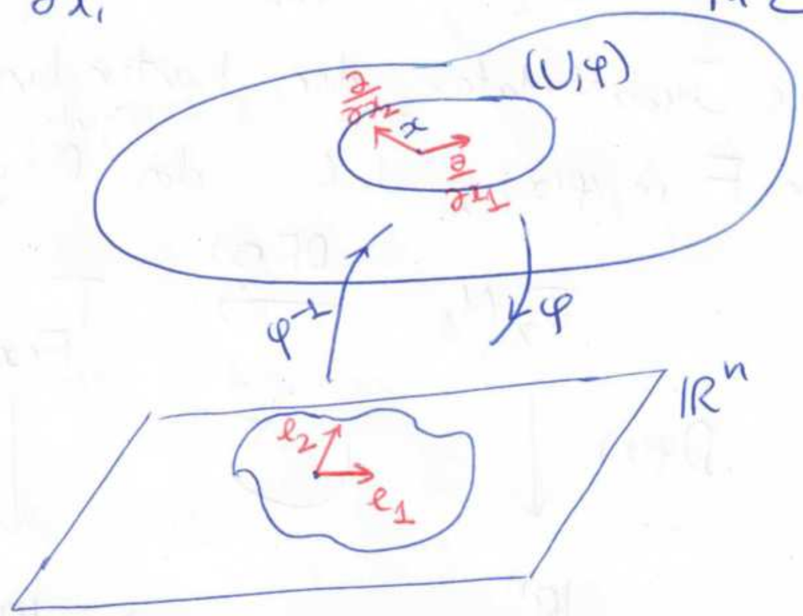
In der Praxis ist diese Formel nützlich da man $DF(x)$ berechnen kann durch die Jacobi-Matrix von F.

(2) Sind $f, g : M_1 \to \mathbb{R}^{N_2}$ glatt, so gilt
$$D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x).$$

§ 14.5. Kanonische Basen

Definition 14.5.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit mit $\dim M = n$. Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um $x \in M$. Sei e_i der i-te kanonische Basisvektor von $\mathbb{R}^n$. Für $1 \le i \le n$ setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial(\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) = D(\varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot e_i$$



Satz 14.3.2 (i) impliziert dass $\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \}$ (angewendet auf $\psi = \varphi^{-1}$) eine Basis von $T_x M$, genannt die kanonische Basis in $T_x M$ bezüglich der Karte (U, φ).

Bemerkung: Sei $M = U$ offene Teilmenge in $\mathbb{R}^N$, sei $\varphi = \mathrm{Id}_U$ die Identitätsabbildung. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i \ \forall\, i$ und $\forall\, x \in U$.

<u>Satz 14.5.2</u> Sei M_1, M_2 Untermanigfaltigkeiten $\dim M_1 = n$, $\dim M_2 = m$.

Sei $F: M_1 \to M_2$ glatt, $(U, \varphi = (x_1, \dots x_n))$ eine Karte von M_1 um x und $(W, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ eine Karte um $F(x)$. Dann ist die Matrix der linearen Abbildung

$DF(x) : T_x M_1 \to T_{F(x)} M_2$ bezüglich der kanonischen

Basen $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right\}$ und $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(F(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}(F(x)) \right\}$

die Jacobi-Matrix der Kartendarstellung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ von F in $\varphi(x)$, d.h. das folgende Diagram ist kommutativ

$$\begin{tikzcd} T_x M_1 \arrow[r, "DF(x)"] \arrow[d, "D\varphi(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T_{F(x)} M_2 \arrow[d, "D\psi(F(x))"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>: Da

$$D\varphi(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = D\varphi(x)\left(D(\varphi^{-1})(\varphi(x))e_i\right)$$
$$= D(\varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\, e_i$$
$$= e_i$$

$\forall i$, ist $T_x M_1$ identifiziert mit $\mathbb{R}^n$ durch $D\varphi(x)$ und die kanonische Basis von $T_x M_1$ wird die von $\mathbb{R}^n$ durch $D\varphi(x)$.

Wir haben ein Analogon für $D\psi(F(x))$

Daher ist die Matrix von $DF(x)$ bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y_1}(F(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}(F(x))\}$ gleich der Matrix von

$$\underbrace{D\psi(F(x)) \circ DF(x) \circ (D\varphi(x))^{-1}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$= D\psi(F(x)) \circ DF(x) \circ D\varphi^{-1}(\varphi(x))$$

(da $D\varphi(x) \circ D\varphi^{-1}(\varphi(x)) = Id$)

$$= D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \quad \text{(Kettenregel)}$$

∎

<u>Bemerkung 14.5.3</u> Schreiben

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$$

Dann gilt

$$D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) e_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot e_j$$

Daher aus Satz 14.5.2 folgt

$$DF(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}(F(x))$$

$\forall\ 1 \le i \le n$.

Satz 14.5.4 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit $\dim M = n$, $x \in M$.

Seien $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ zwei Karten um x. Dann ist die Basiswechselmatrix von der kanonischen Basis bzgl. (U, φ) nach der bzgl. (V, ψ) die Jacobi-Matrix des Kartenüberganges $\psi \circ \varphi^{-1}$, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (\psi \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}(x)$$

wobei $(\psi \circ \varphi^{-1})_j$ die j-te Komponente von $\psi \circ \varphi^{-1}$.

Beweis: wenden wir den Satz 14.5.2 auf $F = Id$ an, bekommen wir die Behauptung. ∎

Definition 14.5.5 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeit mit $\dim M = n$. Sei $x \in M$, $T_x M$ der Tangentialraum an M im x. Der Vektorraum

$$T_x^* M := \{ L : T_x M \to \mathbb{R} \text{ linear} \}$$ heißt

Kotangentialraum an M im x.

Beachte, $T_x^* M$ ist genau der Dualraum vom Vektorraum $T_x M$ in der linearen Algebra.

<u>Bemerkung 14.5.6</u> Sei $f: M \to \mathbb{R}$ Abbildung

$\forall x \in M$ ist $Df(x): T_xM \to \mathbb{R} = T_{f(x)}\mathbb{R}$ linear.

Daher gilt $Df(x) \in T_x^*M$. In diesem Fall schreiben wir oft $df(x)$ statt $Df(x)$. Dies entspricht der Notation vom (äußeren) Differential der Differentialformen, die wir später diskutieren.

Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M um x

Da die Komponentenfunktion $x_i : U \to \mathbb{R}$ glatt
(Koordinatenfunktion)

ist, ist $(dx_i)(x): T_xM \to \mathbb{R}$ linear

(Das Differential der i-te Komponente von φ in x)

und $(dx_i)(x) \in T_x^*M$.

<u>Satz 14.5.7</u> Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M um x mit kanonischer Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right\}$ in T_xM. Dann bilden $\{ dx_1(x), \dots, dx_n(x) \}$ die dazu duale Basis im Kotangentialraum T_x^*M, d.h.

$$dx_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \le i, j \le n.$$

Wenn $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, dann gilt

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot dx_i(x).$$

<u>Beweis</u> Schreibt $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$dx_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x) = dx_i(x) \cdot \frac{d}{dt}\left(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j)\right)\Big|_{t=0}$$

$$\left(= D\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cdot e_j\right)$$

$$= d\varphi_i(x) \cdot \frac{d}{dt}\left(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left((\varphi_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + te_j)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\varphi(x) + te_j)_i\Big|_{t=0}$$

(wobei $(\varphi(x) + te_j)_i$ die i-te Komponente vom Vektor $\varphi(x) + te_j$ bezeichnet)

$$= \delta_{ij}.$$

Nun da $df(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = Df(x) \cdot D\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cdot e_i$

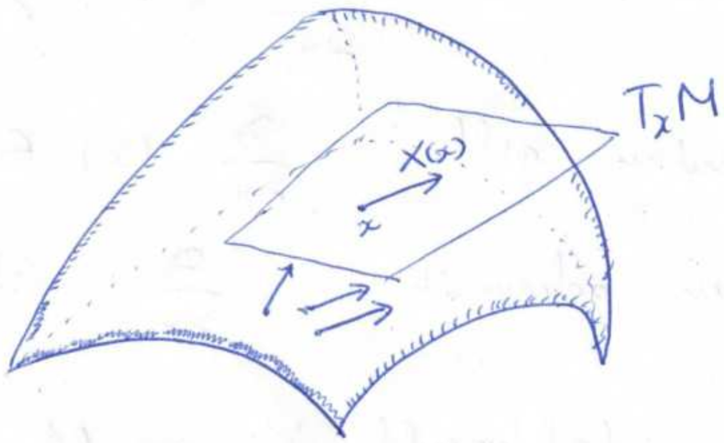
$$= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot e_i$$

$$= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

folgt die zweite Behauptung über $df(x)$ ∎

§ 14.6. Vektorfelder, Riemansche Metrik, Gradient

<u>Definition 14.6.1</u> Ein Vektorfeld auf einer Umfk (Untermannigfaltigkeit) $M \subset \mathbb{R}^N$ ist eine glatte Abbildung $X: M \to \mathbb{R}^N$ so, dass $X(x) \in T_x M$ $\forall x \in M$.



<u>Beispiel 14.6.2</u>

(i) $M = \mathbb{R}^2$. $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glatte Abbildung
Da $X(x) \in \mathbb{R}^2 = T_x\mathbb{R}^2$ $\forall x$, ist X ein Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$.

(ii) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $X: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$
$$(x,y) \mapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
glatt. Da $T_{(x,y)}M = \mathbb{R}^2$ und X glatt ist, ist X ein Vektorfeld.

(iii) Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte einer Umfk $M \subset \mathbb{R}^N$. Erinnere: $\forall x \in U$ $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial(\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}(\varphi(x)), \dots, \frac{\partial \psi_N}{\partial x_i}(\varphi(x))\right)$$

wobei $\psi := \varphi^{-1} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) : \varphi(U) \to M \subset \mathbb{R}^N$

Die Vektoren $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right\}$ bilden eine Basis von $T_x M$. Beachte

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}^N$$
$$x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

glatt, da $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}$, φ glatt $\forall\, 1 \leq j \leq N$ sind.

Zudem gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) \in T_x M$ $\forall x \in U$.

Man bekommt: $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ist ein Vektorfeld auf U

Jedes Vektorfeld X auf M kann man auf U punktweise in der kanonischen Basis darstellen:

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in U.$$

wobei $\xi_i : U \to \mathbb{R}$ glatt $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

Die obige Darstellung von X heißt <u>Basisdarstellung des Vektorfeldes</u> X bzgl. (U, φ).

Die Kartendarstellungen der ξ_i ($\xi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$) heißen Komponenten von X bzgl. der Karte (U, φ).

Definition 14.6.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Umfk. $\dim M = n$.

Sei $$g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$ $$(u,v) \longmapsto \langle u,v \rangle$$

(das euklidische Skalarprodukt)

Die Familie $g = \{g_x\}_{x\in M}$ heißt <u>induzierte Riemannsche Metrik auf M</u>

Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M um x.

Setze $$g_{ij}(x) := g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

$\forall\ 1 \le i,j \le n$. Die Matrix $[g_{ij}(x)]_{1\le i,j\le n}$

ist dann symmetrisch. Die Funktionen

$g_{ij} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ heißen <u>lokale Koeffizienten der Metrik g</u> <u>bzgl. (U,φ)</u>

Beispiel 14.6.4

(i) Sei $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge.

Betrachte die Karte (U, φ), $\varphi = id_U$

(Identitätsabbildung). Dann gilt: $T_xM = \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i \quad \forall\ 1 \le i \le n$$

$$g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

(erinnere: $\delta_{ij} = 1$ wenn $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$)

Folglich ist $[g_{ij}(x)]_{1 \le i,j \le n}$ die Einheitsmatrix $\forall x \in U$.

(ii) Sei $M = \mathbb{R}^2$

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$$

$$\psi : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \longrightarrow U \qquad \text{Einbettung}$$
$$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(Polarkoordinaten). Dann ist (U, ψ^{-1}) eine Karte auf M. Für $x = \psi(r,\theta)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial r}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

Man erhält

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial r}(x) \right\rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial \theta}(x) \right\rangle = \cos\theta(-r\sin\theta) + \sin\theta(r\cos\theta) = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial r}(x) \right\rangle = r^2.$$

Es folgt, dass die Matrix der induzierten Riemannsche Metrik in Polarkoordinaten im $x = \psi(r,\theta)$ die Forme

$$[g_{ij}(x)]_{1 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

<u>Definition 14.6.5</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Umfk
$f : M \to \mathbb{R}$ glatt.

Der <u>Gradient</u> von f ist das Vektorfeld
$\operatorname{grad} f : M \to \mathbb{R}^N$ auf M, welches definiert ist durch: $\forall x \in M$ ist $\operatorname{grad} f(x)$ der duale Vektor zur Linearform $df(x) : T_xM \to \mathbb{R}$ (bzgl. der induzierten Skalarprodukt auf T_xM)

d.h. es gilt

$$\langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = df(x) \cdot v \quad \forall v \in T_xM$$

<u>Bemerkung</u>: Aus linearen Algebra weißt man dass $\exists !\ w_x$ mit $\langle w_x, v \rangle = df(x) \cdot v \quad \forall v \in T_xM$.
dieser Vektor w_x heißt dualer Vektor zur $df(x)$.

<u>Satz 14.6.6</u> Sei $f : M \to \mathbb{R}$ glatt
$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M. Sei $[g^{ij}(x)]_{1 \le i,j \le n}$ die inverse Matrix zu $[g_{ij}(x)]_{1 \le i,j \le n}$ $\left(= \left[g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)\right]_{1 \le i,j \le n} \right)$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) \cdot \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}(x)$$

$\forall x \in U$.

Beweis: Sei $v \in T_x M$. Man hat

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x)$$

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot dx_j(x)$$

wobei $a_j := \dfrac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(x)$ (Satz 14.5.7)

Schreibe auch $\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j}(x)$

Wir müssen $w_j \in \mathbb{R}$ bestimmen.

Nach Definition des Gradients von f gilt

$$g_x(\operatorname{grad} f(x), v) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = df(x) \cdot v$$

$\forall v \in T_x M$. Daraus folgt

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}^{(x)} w_i v_j = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(x)} w_i \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$$

$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$. Nach Vergleich der Koeffizienten von v_j in beiden Seiten bekommt man

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(x)} w_i = a_j \quad \forall i, j$$

Anders gesagt gilt

$$[w_1 \cdots w_n] \begin{bmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{bmatrix} = [a_1 \cdots a_n].$$

Multiplizieren beide Seiten mit $[g^{ij}(x)]$, erhalten wir

$$[w_1 \cdots w_n] = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} g^{11}(x) & \cdots & g^{1n}(x) \\ \vdots & & \\ g^{n1}(x) & \cdots & g^{nn}(x) \end{bmatrix}$$

daher gilt

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} g^{ij}(x) \cdot a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g^{ij}(x) \cdot \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(x) \quad \forall j$$

∎

<u>Beispiel</u> $\left\{ \begin{array}{l} M = U \subset \mathbb{R}^n \text{ offene Teilmenge} \\ \text{Betrachte die Karte } (U, id_U) \end{array} \right.$

Dann gilt $[g_{ij}(x)] = Id \quad \forall x$

Es folgt: $[g^{ij}(x)] = Id \quad \forall x$

Man bekommt, für $f: U \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

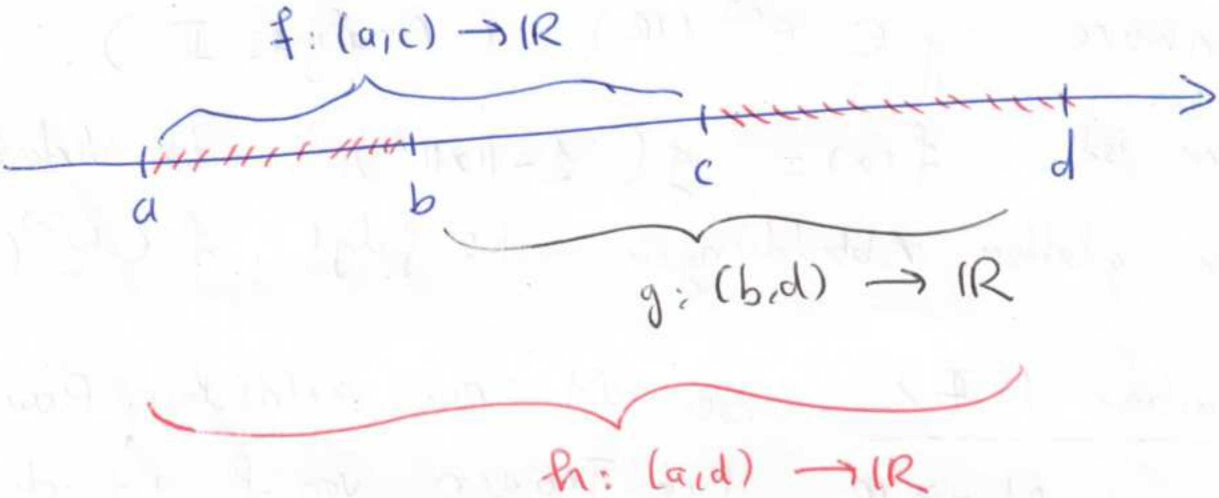
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, e_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Diese stimmt mit dem Begriff vom Gradient aus Analysis II überein.

§ $14.\cancel{7}$. Zerlegung der Eins

Motivation: (Verkleben von Funktionen) Seien $a<b<c<d$ in $\mathbb{R}$ und $f : (a,c) \to \mathbb{R}$, $g : (b,d) \to \mathbb{R}$ glatt

Gibt es $h : (a,d) \to \mathbb{R}$ glatt, so dass $h|_{(a,b)} = f$ und $h|_{(c,d)} = g$?



Die Anwort ist ja: wir sehen später dass

$\exists\ \lambda, \eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\begin{cases} \lambda = 1 & \text{auf } (a,b) \\ \lambda = 0 & \text{auf } (c,d) \end{cases}$

und $\begin{cases} \eta = 1 & \text{auf } (c,d) \\ \eta = 0 & \text{auf } (a,b) \end{cases}$ und $\lambda + \eta = 1$ auf (a,d)

Setzen wir $h := \lambda f + \eta g$. Die Funktion erfüllt die gewünschte Bedingungen.

<u>Lemma 14.7.1</u> Die Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ist $\mathcal{C}^\infty$.

<u>Beweis</u>: Betrachte

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Erinnere $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (Analysis II).

Dann ist $f(x) = g(1 - \|x\|^2)$ die Verkettung von glatten Abbildungen. Es folgt $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

<u>Definition 14.7.2</u> Sei M ein metrischer Raum.

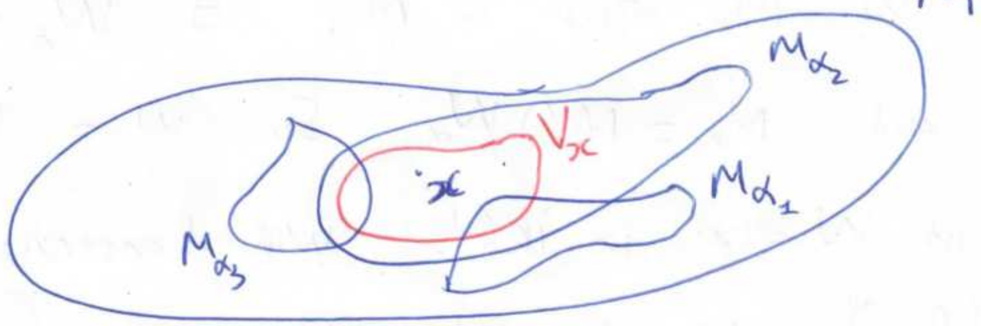
(i) Sei $f: M \to \mathbb{R}$. Der <u>Träger</u> <u>von f ist die</u> abgeschlossene Menge $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$.

Wenn M eine Untermannigfaltigkeit, wird die Menge der glatten Funktionen auf M mit kompaktem Träger mit $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ bezeichnet.

Man beachte: $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^\infty(M)$.

(ii) Eine Familie $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Teilmengen $M_\alpha \subset M$ heißt <u>lokal endlich</u>, wenn zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $V_x \subset M$ existiert so, dass $V_x \cap M_\alpha \neq \emptyset$ für nur endlich viele $\alpha \in A$.

Eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ von reellen Funktionen heißt <u>lokal endlich</u>, wenn $(\operatorname{supp} f_\alpha)_{\alpha \in A}$ lokal endlich ist



<u>Satz 14.7.3</u> (Zerlegung der Eins) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ eine offene Überdeckung (d.h. M_α offen $\forall \alpha \in A$).

Dann $\exists$ eine abzählbare Familie $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $\lambda_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ so dass

(1) $0 \leq \lambda_k \leq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

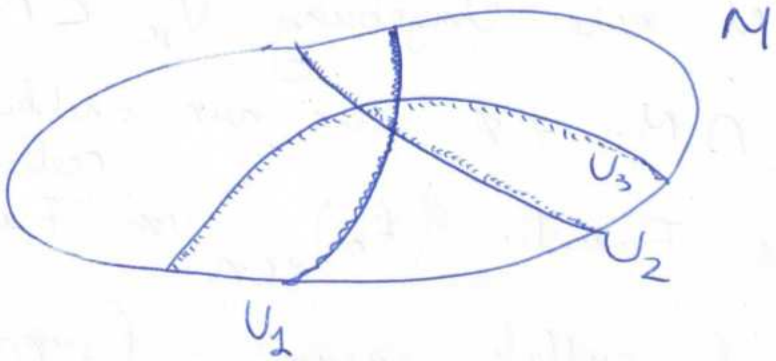
(2) $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist lokal endlich.

(3) $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{supp} \lambda_k$ kompakt und $\exists\, \alpha \in A$ mit $\operatorname{supp} \lambda_k \subset M_\alpha$.

(4) $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k(x) = 1 \quad \forall\, x \in M$.

Beachte, die Indexmenge A ist nicht unbedingt abzählbar.

<u>Beweis</u>



Da M_α offen in M, $\exists\ W_\alpha \subset \mathbb{R}^N$ offen mit $M_\alpha = M \cap W_\alpha$. Sei $W := \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$. Dann ist W offen in $\mathbb{R}^N$. Wir konstruieren eine Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Kugeln so dass:

(i) $\forall k\ \exists \alpha : B_k \subset W_\alpha$,

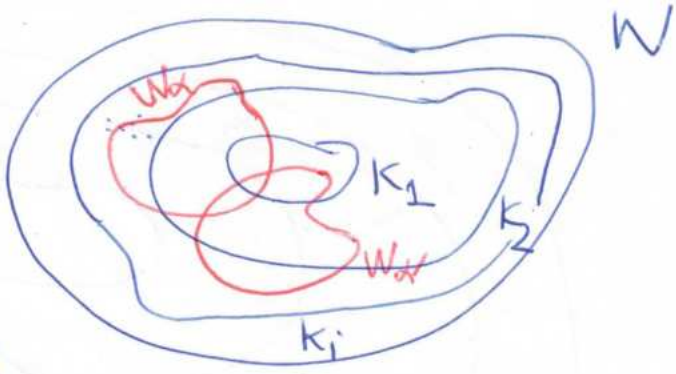
(ii) $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist lokal endlich.

(iii) $W = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathring{B}_k$ ($\mathring{B}_k$: das ~~Innere~~ Innere von B_k)

<u>Schritt 1</u>: wir konstruieren eine kompakte Ausschöpfung von W: d.h. eine Folge von kompakten Teilmengen $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{cases} K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j \subset K_{j+1} \subset \dots \subset W \\ K_j \subset \mathring{K}_{j+1} \quad \forall j \\ W = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j \end{cases}$$

Wir wählen



$K_j := \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq j$
$$d(x, \mathbb{R}^N \setminus W) \geq \frac{1}{j} \}$$

wobei für eine Menge $Z \subset \mathbb{R}^N$ bezeichnen wir

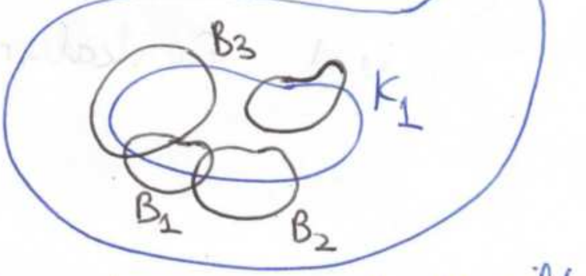
$$d(x, Z) := \inf \{ \underbrace{d(x,y)}_{\|x-y\|} : y \in Z \}$$

(für $x \in \mathbb{R}^N$). Die Funktion $d(\cdot, Z): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist K_j abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^N$

Es folgt K_j kompakt. Setzen wir $K_0 := \emptyset$.

<u>Schritt 2</u>: Wähle abgeschlossene Kugeln $B_1, B_2, \ldots B_{k_1}$ mit der Eigenschaft (i) und

$$K_1 \subset \bigcup_{1 \leq k \leq k_1} \mathring{B}_k \subset \mathring{K}_2$$

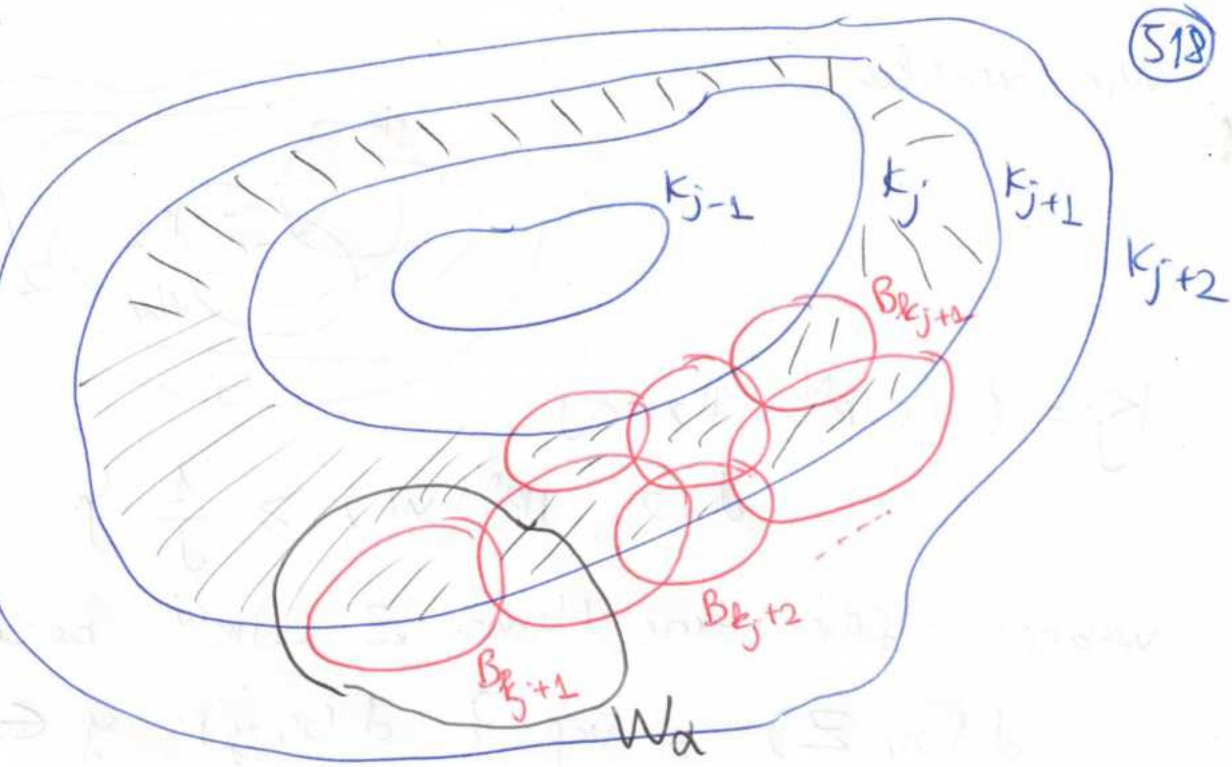


und $\forall\, j \geq 1$ Induktiv

$B_{k_j+1}, \ldots, B_{k_{j+1}}$

abgeschlossene Kugeln mit Eigenschaft (i) und es gilt

$$K_{j+1} \setminus \mathring{K}_j \subset \bigcup_{k_j+1 \leq k \leq k_{j+1}} \mathring{B}_k \subset \mathring{K}_{j+2} \setminus K_{j-1}$$



Man sieht dass

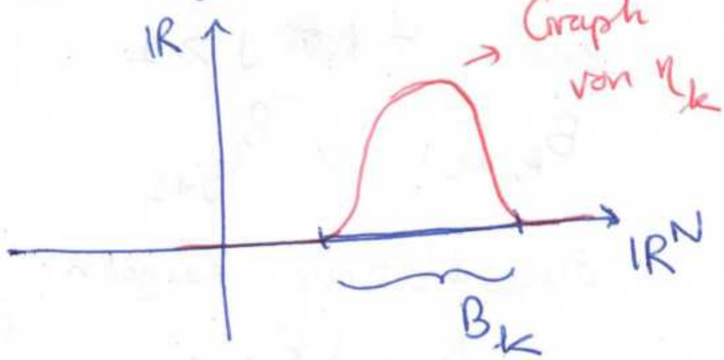
$$W = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathring{B}_k \subset W$$

$(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist lokal endlich da es nur endlich viele B_k in K_j gibt $(\forall j)$.

Wir bekommen $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie behauptet.

Sei $\eta_k \in \mathcal{C}^\infty(W)$ mit $\eta_k > 0$ auf $\mathring{B}_k$ und $\eta_k = 0$ auf $\mathbb{R}^N \setminus B_k$

(Nach Lemma 14.6.1, Verschiebung des Mittelpunktes und Reskalieren des Radius)



Sei $\eta = \sum_{k\in\mathbb{N}} \eta_k$

η ist wohl-definiert: $\forall x \in W$
$\exists V_x$ offene Umgebung
so dass $V_x \cap B_k \neq \emptyset$ nur für endlich viele k.

$$\eta(y) = \sum_{k:\, B_k \cap V_x \neq \emptyset} \eta_k(y) \in \mathcal{C}^\infty(V_x)$$

Es folgt $\eta \in \mathcal{C}^\infty(W)$. Zudem gilt $\eta > 0$ auf W da $\eta_k > 0$ auf $\mathring{B}_k$ und $W = \bigcup_k \mathring{B}_k$.

Definiere $\lambda_k := \frac{\eta_k}{\eta}\Big|_M$ $\forall k$: die Familie $(\lambda_k)_k$ erfüllt die Behauptung. ∎

<u>Definition 14.~~7~~.4</u> Die Familie $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaften (1) – (4) im Satz 14.6.3 heißt <u>eine der Überdeckung $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins</u>.

<u>Satz 14.6.5</u> Sei $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung einer Untermannigfaltigkeit M. Dann gibt es eine Familie $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten Funktionen so dass gilt:

(1) $0 \leq \lambda_\alpha \leq 1$ $\forall \alpha \in A$

(2) $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokal endlich

(3) $\operatorname{supp}\lambda_\alpha \subset M_\alpha$

(4) $$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha = 1 \text{ auf } M.$$

Die Unterschied zum Satz 14.6.3 ist:

$\operatorname{supp}\lambda_\alpha$ ist nicht unbedingt kompakt und die Indexmenge von $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ ist gleich der von $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Beweis. Sei $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine zu $(M_\alpha)_\alpha$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Sei $\rho: \mathbb{N} \to A$
$k \mapsto \rho(k)$ wobei $\rho(k)$ so dass $\operatorname{supp}\eta_k \subset M_{\rho(k)}$. Setze

$$\lambda_\alpha := \sum_{k\in\rho^{-1}(\alpha)} \eta_k$$ (beachte: $\rho^{-1}(\alpha)$ kann abzählbar sein). ∎

Definition 14.6.6

Man sagt, $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ wie im Satz 14.6.5 heißt eine der Überdeckung $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins mit der selben Indexmenge.

<u>Bemerkung</u>: In der Diskussion am Anfang dieses Abschnitts wählen wir

$$M = (a,d)$$
$$U_1 = (a,c)$$
$$U_2 = (b,d)$$

$M = U_1 \cup U_2$. Satz 14.6.5 gibt uns $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \operatorname{supp} \lambda_1 \subset U_1, \ \operatorname{supp} \lambda_2 \subset U_2 \end{cases}$

Daher ist $\lambda_1 = 1$ auf (a,b), $\lambda_2 = 1$ auf (c,d)
$\lambda_1 = 0$ auf (c,d) $\quad \lambda_2 = 0$ auf (a,b).

§ 14.8. Glatt berandete Teilmengen einer Untermanigfaltigkeit

Motivation: Sei $-\infty < a < b < \infty$

Das Intervall $[a,b]$ ist das einfachste Beispiel einer glatten berandeten Teilmenge.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige differenzierbare Funktion. Der Fundamentalssatz über Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Da $df(t) = f'(t)dt$, $\partial[a,b] = \{b, a\}$,
kann man formell die obige Formel umschreiben:

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f$$

Man wollte diese Formel auf den höheren dimensionalen Fall verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung heißt Satz von Stokes, in dem das Intervall $[a,b]$ durch einer glatten berandeten Teilmenge D in $\mathbb{R}^N$ ersetzt wird, und f durch einer Differentialform ω ersetzt wird:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

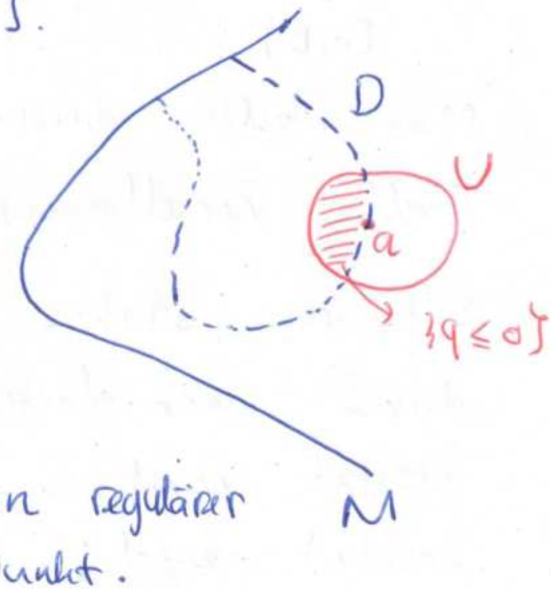
Dimension 1	höhere Dimension
$[a,b]$	glatt berandete Teilmenge einer Umfk.
f	Differentialform
Integration auf Intervalle	Integration auf "Mengen" in $\mathbb{R}^N$.

Wir definieren nun den Begriff von glatt berandete Teilmengen einer Umfk.

<u>Definition 14.8.1</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dim Umfk und $D \subset M$. Wir bezeichnen mit ∂D den Rand von D (als Teilmenge in M).
Ein Punkt $a \in \partial D$ heißt <u>regulärer Punkt</u>, falls $\exists$ Umgebung U von a in M, $\exists$ eine glatte Funktion $q : U \to \mathbb{R}$ mit $dq(x) \neq 0 \ \forall x \in U$, so dass gilt:

$$U \cap D = \{x \in U : q(x) \leq 0\}.$$

Die Funktion q heißt <u>lokal beschreibende Funktion</u> für D um a.



$D \subset M$ heißt <u>glatt berandet</u> wenn $\forall a \in \partial D$: a ist ein regulärer Punkt.
Gilt $\partial D = \emptyset$, so ist D glatt berandet

Beispiel 14.8.2 (i) $D = \overline{B_r(x_0)} \subset \mathbb{R}^n$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}$$

$U := \mathbb{R}^n$, $q : U \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x - x_0\|^2 - r^2$ glatt

Beachte $\quad U \cap D = D = \{x \in U \; q(x) \le 0\}$

und $\quad dq(x) = \sum_{j=1}^{n} 2(x_j - x_0) dx_j(x) \quad \neq 0$

für $x \in \partial D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$
(da $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ nicht gleichzeitig gleich 0 sein können). Es folgt: D ist glatt berandet.

(ii) $D := S^n \cap \{x_{n+1} \le 0\}$, $\left\{ \begin{array}{l} S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ N = (0, 0, \ldots, 0, 1) \\ S = (1, 0, \ldots, 0) \end{array} \right.$

Setze $q : U \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x_{n+1}$, wobei $\left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ U = S^n \setminus \{N, S\} \end{array} \right.$

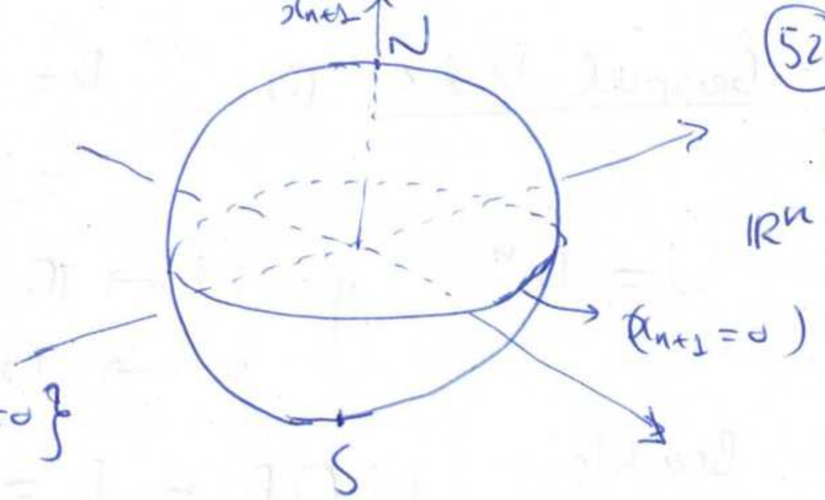
Beachte: U ist eine offene Umgebung von ∂D in S^n
$(\partial D = S^n \cap \{x_{n+1} = 0\})$.

Sei $\tilde{q} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $\quad$ Dann: $q = \tilde{q}|_{S^n}$
$x \longmapsto x_{n+1}$ $\quad$ $dq(x) = dx_{n+1}(x)$

und $\quad dq(x) = d\tilde{q}(x)|_{T_x S^n} \quad \forall x \in S^n$

(siehe Bemerkung 14.4.9) $\quad$ Erinnere
$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, x \rangle = 0\}$

$$dx_{n+1}(x) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto v_{n+1}$$



Deshalb ist

$$\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} : dx_{n+1}(x) \cdot v = 0 \}$$

$\neq T_x S^n$ wenn $x \notin \{S, N\}$.

Anders gesagt gilt $\underbrace{dx_{n+1}(x)\big|_{T_x S^n}}_{= dq(x)} \neq 0 \quad \forall x \in U$

Wir sehen deshalb dass D einen glatten Rand hat.

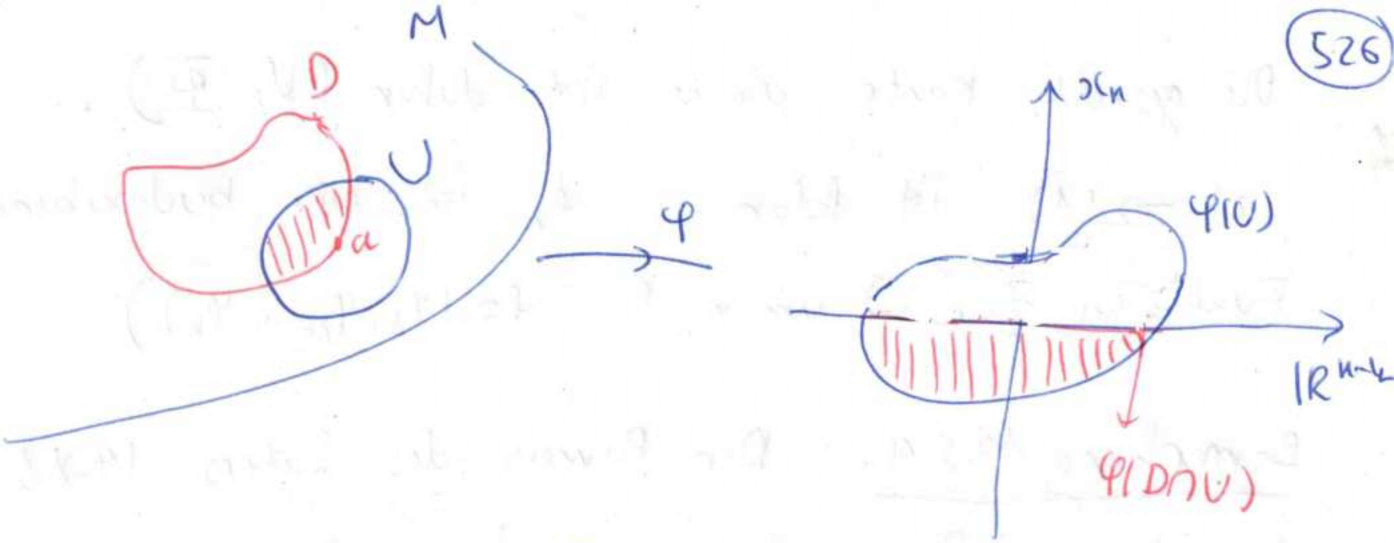
Satz 14.8.3 Seien $M \subset \mathbb{R}^N$ Umfk
$\dim M = n$, $D \subset M$.

Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:

(1) D ist glatt berandet

(2) $\forall a \in \partial D$, $\exists$ $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ Karte auf M
mit $\varphi(D \cap U) = \{ x \in \varphi(U) : x_n \leq 0 \}$

((U,φ) heißt eine D-angepasste Karte)



<u>Beweis</u> (1) ⇒ (2). Sei $a \in \partial D \subset M$

Man muss nur in einer Karte $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ von M um a arbeiten. Durch Diffeomorphismus $\tilde{\varphi}$ kann man OBdA annehmen, dass M eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$. Sei q eine lokale beschreibende Funktion für D um a, d.h. $\exists$ U_1 offene Umgebung von a in M

$$q : U_1 \to \mathbb{R} \text{ mit } \begin{cases} dq(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_1 \quad (*) \\ U_1 \cap D = \{ q(x) \leq 0 \} \end{cases}$$

(*) bedeutet dass q eine Submersion ist.

Satz über lokale Struktur einer Submersion besagt $\exists$ U Umgebung von a in U_1, $\Phi : U \to W_\varepsilon^n(0)$ Diffeo.

So dass

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\Phi"'] & (-\varepsilon, \varepsilon) \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & W_\varepsilon^n(0) \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

π : Projektion nach n-te Koordinaten

$$(\pi(x_1, \dots, x_n) := x_n)$$

Es folgt $U \cap D = \{ x \in U : q(x) \leq 0 \} = \{ x \in U : \Phi_n(x) \leq 0 \}$

Die gesuchte Karte um a ist daher (U, Φ).

$(2) \Rightarrow (1)$ ist klar: φ_n ist eine beschreibende Funktion für D um a ($\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$) ∎

<u>Bemerkung 14.8.4</u> Der Beweis des Satzes 14.8.3 zeigt

(1) $\partial D \cap U = \{x \in U : q(x) = 0\}$ wobei $q : U \to \mathbb{R}$ eine lokal beschreibende Funktion.

(2) D ist abgeschlossen, $\mathring{D} \cap U = \{x \in U : q(x) < 0\}$ ($\mathring{D}$ ist das Innere von D) und

$D = \overline{\mathring{D}}$ (der Abschluss von $\mathring{D}$ in M)

(3) Satz 14.8.3 (2) impliziert dass:

∂D ist eine $(n-1)$-dim Umpk in $\mathbb{R}^N$.

Da $D \subset M$, gilt $T_a(\partial D) \subset T_a M$ $\forall a \in \partial D$. Es folgt: $T_a(\partial D)$ ist ein Hyperebene von $T_a M$.

Ist $q : U \to \mathbb{R}$ eine lokal beschreibende Funktion für D um a, so gilt

$$T_a(\partial D) = \ker dq(a) = \{v \in T_a M : dq(a).v = 0\} = (\mathbb{R}.\operatorname{grad} q(a))^{\perp}$$

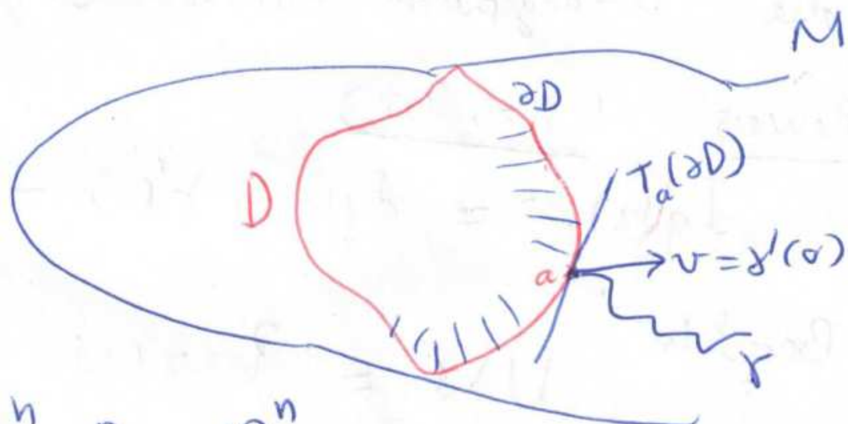
(Satz 14.3.2 (ii), und man benutzt hier die Eigenschaft, dass M lokal zu $\mathbb{R}^n$ bügelbar ist)

Ist $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine D-angepasste Karte (528)

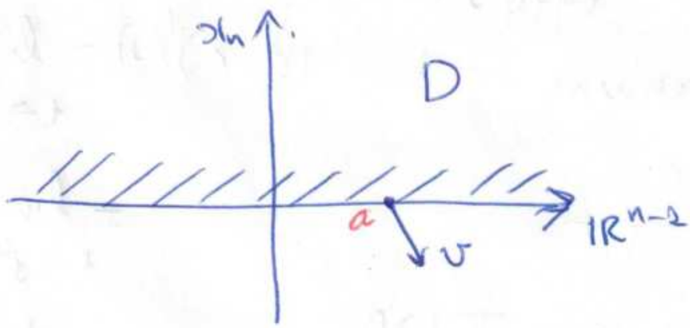
so gilt $\quad T_a(\partial D) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(a) \rangle$

(der von $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(a)\}$ erzeugte Unter-Vektorraum von $T_a M$).

<u>Definition 14.8.5</u> Ein Vektor $v \in T_a M$ ist ein <u>äußerer Vektor zu D</u> in a, wenn $v \notin T_a(\partial D)$ und $\exists \; \gamma : [0, \varepsilon) \to M \setminus \mathring{D}$ mit $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$.



<u>Beispiel</u>: $M = \mathbb{R}^n$, $D := \mathbb{R}^n_+$
$= \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \; x_n \geq 0\}$



$T_a(D) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$
v ist äußerer Vektor $\iff v_n < 0$
$(v = (v_1, \dots, v_n))$

Satz 14.8-6 Die folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) v ist ein äußerer Vektor zu D in a

(ii) $dq(a).v > 0$ $\forall$ alle lokal beschreibenden Funktionen $q: U \to \mathbb{R}$ für D um a.

(iii) $v = v' + \lambda \operatorname{grad} q(a)$, wobei $v' \in T_a(\partial D)$, $\lambda > 0$.

(iv) $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ mit $\lambda_n > 0$ für alle D-angepasste Karte (U, φ) $(\varphi = (x_1, \dots, x_n))$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$dq(a).v = dq(a) \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{dt}(q \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$

Beachte
$$U \setminus \mathring{D} = \{ x \in U : q(x) \geq 0 \}$$

Es folgt $q \circ \gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon)$

Man erhält $(q \circ \gamma)'(0) \geq 0$

(Lokal Extremum in 0: $(q \circ \gamma)'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{q \circ \gamma(t) - q \circ \gamma(0)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{q \circ \gamma(t)}{t} \geq 0 \;)$$

Da $\left\{ \begin{array}{l} \ker dq(a) = T_a(\partial D) \\ v \notin T_a(\partial D) \end{array} \right.$, gilt $dq(a).v > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii).

Man schreibt $\quad v = v' + \lambda \operatorname{grad} q(a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(da $\operatorname{grad} q(a)$ eine Basis von $\left(T_a(\partial D)\right)^{\perp}$ in $T_a M$ ist)

Berechne

$$0 < dq(a).v = dq(a)(v') + \lambda\, dq(a)(\operatorname{grad} q(a))$$
$$= 0 + \lambda \, \|\operatorname{grad} q(a)\|^2$$

Es folgt $\lambda > 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): direkte Anwendung von (iii) auf
$$q(x) = x_n.$$

(siehe Ende der Bemerkung 14.8.4)

(iv) $\Rightarrow$ (i) Setzt man $\gamma(t) := \psi(\varphi(a) + t(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$

wobei $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) := \varphi^{-1}$

$$\gamma'(0) = D\psi(\varphi(a)).(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$= \lambda_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\varphi(a)) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(\varphi(a))$$
$$= v.$$

(da $\lambda_n > 0$, gilt $\varphi(\gamma(t)) \notin \varphi(U \cap \mathring{D}) \Rightarrow \gamma \subset M \setminus \mathring{D}$) ∎

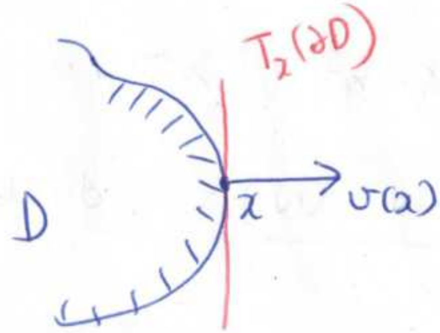
Satz 14.8.7 $\quad \exists$ eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $v : \partial D \to \mathbb{R}^N$ so dass $\forall \ x \in \partial D$ gilt:

(1) $v(x)$ ist ein äußerer Vektor

(2) $v(x) \perp T_x(\partial D)$

(3) $\|v(x)\| = 1$.

Ist $q: U \to \mathbb{R}$ ein lokal beschreibende Funktion, so gilt
$$v(x) = \frac{\operatorname{grad} q(x)}{\|\operatorname{grad} q(x)\|}$$



<u>Beweis</u> Setze $\eta(x) := \operatorname{grad} q(x)$
$$v(x) := \frac{\eta(x)}{\|\eta(x)\|}$$

Wie im Beweis von Satz 14.8.6 gilt
$$dq(x) \cdot v(x) = \frac{\|\eta(x)\|^2}{\|\eta(x)\|} = \|\eta(x)\| > 0$$

da $dq(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial D$. Zudem gilt
$$\|v(x)\| = 1, \quad v(x) \perp T_x(\partial D)$$
(Bemerkung 14.8.4 (3))

$\Rightarrow$ v erfüllt (1), (2), (3).

Eine solche Abbildung ist eindeutig da wenn $\tilde{v}: \partial D \to \mathbb{R}^n$

die Eigenschaften (1) – (3) erfüllt: man hat

$\tilde{\nu}(x) = \lambda(x)\,\nu(x)$ (Beachte: $\nu(x), \tilde{\nu}(x) \in (T_x(\partial D))^\perp$ und die $(T_x(\partial D))^\perp = 1$)

$\Rightarrow |\lambda(x)| = 1$ wegen (3)

Nach (1) ist $\lambda(x) > 0$. Es folgt $\tilde{\nu} \equiv \nu$ ∎

Definition 14.8.8 $\nu(x)$ im Satz 14.8.7 heißt äußerer Normalen-Einheitsvektor von D im x.

Die Abbildung $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^N$ heißt äußeres Normalen-Einheitsvektorfeld von D.

Bemerkung (Ergänzung zum Beweis von Satz 14.8.6)

Im Beweis von (iii) $\Rightarrow$ (iv) von Satz 14.8.6 müssen wir noch erklären:

beachte $\quad dq(a).\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(a)\right) = \frac{\partial}{\partial x_n}(q\circ\varphi^{-1})(\varphi(a)) \geq 0$

(analog wie im Anfang des Beweis für (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$\left.\begin{aligned} &q\circ\varphi^{-1}(\varphi(a)) = 0 \\ &q\circ\varphi^{-1}(\varphi(a)+te_n) \leq 0, \quad t \leq 0 \end{aligned}\right\}$$

Es gilt $\quad \frac{d}{dt}(q\circ\varphi^{-1})(\varphi(a)+te_n) \geq 0$

$$\overset{\|}{dq(a)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(a)\right)} \qquad)$$

zu dem $\frac{\partial}{\partial x_n}(a) \notin T_a\partial D$. Wir bekommen $dq(a)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(a)\right) > 0$

und

$\frac{\partial}{\partial x_n}(a) = w + \tilde{\lambda}\cdot \operatorname{grad} q(a)$ für $w \in T_a\partial D$, $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt $\tilde{\lambda} > 0$, und

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a) + w}_{\in T_a \partial D} + \tilde{\lambda} \lambda_n \operatorname{grad} g(a)$$

Nach (iii) muss $\tilde{\lambda} \lambda_n > 0$ sein. Daher gilt

$\lambda_n > 0$.

§15. Differentialformen

§15.1. Alternierende Multilinearformen

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension n.

Definition 15.1.1 Unter einen alternierenden k-Form auf V ($k \in \mathbb{N}$) versteht man eine Abbildung

$$\omega : V^k \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaft:

i) ω ist multilinear, d.h. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$ $\forall\ v', v'' \in V$ gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_{j-1}, \lambda v' + \mu v'', v_{j+1}, \dots, v_k)$$
$$= \lambda\, \omega(v_1, \dots, v_{j-1}, v', v_{j+1}, \dots, v_k)$$
$$+ \mu\, \omega(v_1, \dots, v_{j-1}, v'', v_{j+1}, \dots, v_k)$$

$\forall\ v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k \in V$.

ii) $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) . \omega(v_1, \dots, v_k)$

$\forall\ (v_1, \dots, v_k) \in V^k$, $\forall\ \sigma$ Permutation von $\{1, 2, \dots, k\}$

wobei $\varepsilon(\sigma)$ das Vorzeichen von σ ist.

Eine alternierende 0-form auf V ist per Definition eine reelle Zahl.

$\forall\ k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $\Lambda^k V^*$ die Menge aller ~~ke~~ alternierenden k-Formen auf V.

15.1.2
Bemerkung: 1) $k = 0$, $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$

2) $\Lambda^1 V^* = V^* =$ Dualraum von V

3) $\Lambda^k V^*$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

4) Sei σ eine Permutation von $\{1, 2, \dots, k\}$.
Erinnere: $$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

wenn $A_\sigma :=$ Anzahl der Paar (i,j)
mit $1 \le i < j \le k$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$,
so gilt $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{A_\sigma}$.
Wenn σ eine Transposition ist (d.h.
σ ist eine Permutation, die genau zwei Elemente miteinander verstauscht und alle anderen Elemente unverändert lässt), so gilt $\varepsilon(\sigma) = -1$.
Daher wenn $\omega \in \Lambda^k V^*$, $(v_1, \dots, v_k) \in V$

gilt $$\omega(v_1, \dots, \underline{v_i}, \dots, \underline{v_j}, \dots, v_k)$$
$$= -\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, \underline{v_j}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, \underline{v_i}, v_{j+1}, \dots, v_k)$$

5) Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V.
Sei $v_1, \dots, v_n \in V$. Schreibe
$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_i^j e_j, \quad v_i^j \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \le i \le n$$
Dann ist $$\omega : V^n \to \mathbb{R}$$
$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det (v_i^j)_{1 \le i, j \le n}$$
eine alternierende n-form auf V

Definition 15.1.3 (Dachprodukt oder Äußeres Produkt von Linearformen)

Seien $f_1, f_2, \dots, f_k \in V^*$ Linearformen. Dann wird die Abbildung $f_1 \wedge \dots \wedge f_k : V^k \to \mathbb{R}$

definiert durch

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{bmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_k) \\ f_2(v_1) & \cdots & f_2(v_k) \\ \vdots & & \\ f_k(v_1) & \cdots & f_k(v_k) \end{bmatrix}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt unmittelbar, dass $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \in \Lambda^k V^*$.

Bemerkung 15.1.4. Man sieht leicht auch, dass:

1) Das Dachprodukt ist linear in jedem Argument:

d.h.
$$f_1 \wedge \dots \wedge (\lambda f_i' + \mu f_i'') \wedge \dots \wedge f_k$$
$$= \lambda (f_1 \wedge \dots \wedge f_i' \wedge \dots \wedge f_k) + \mu (f_1 \wedge \dots \wedge f_i'' \wedge \dots \wedge f_k)$$

2) Das Dachprodukt ist alternierend, d.h.

$$f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) \cdot f_1 \wedge \dots \wedge f_k$$

$\forall\ \sigma$ Permutation von $\{1, 2, \dots, k\}$.

Satz 15.1.5 Sei $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ eine Basis von V^*.

Dann bilden die Elemente

$$e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k} \quad \text{für } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Insbesondere gilt

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

und für $k > n$ ist $\Lambda^k V^* = 0$.

Beweis Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die zu $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ duale Basis von V, d.h. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$.

Aus der Definition des Dachprodukts folgt dann $\forall\ i_1 < \dots < i_k$ und $j_1 < \dots < j_k$ g.:

$$A := \left(e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}\right)\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (*)$$

weil

$$A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Per}_k} \varepsilon(\sigma) \cdot \underbrace{e^*_{i_1}\left(e_{\sigma(j_1)}\right) \dots e^*_{i_k}\left(e_{\sigma(j_k)}\right)}_{\neq 0 \text{ nur wenn}}$$

$i_s = \sigma(j_s)$ $\forall s$, d.h. $\sigma = \mathrm{Id}$ und $i_s = j_s$ $\forall s$

wobei Per_k die Menge der Permutationen von $\{j_1, \dots, j_k\}$ ist.

Sei $\omega \in \Lambda^k V^*$ beliebig. Aus $(*)$ folgt

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\, e^*_{i_1}\wedge\dots\wedge e^*_{i_k} \qquad (**)$$

In der Tat sind beide Seiten gleich an der Stelle $(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$ $\forall\, j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}$.

Da $\{(e_{j_1},\dots,e_{j_k})\}_{1\le j_1,\dots,j_k\le n}$ eine Basis von V^k ist, gilt $(**)$.

Nach $(*)$, $(**)$ folgt die Behauptung. ∎

<u>Satz 15.1.6</u> Seien $f_1,\dots,f_k \in V^*$ und $g_1,\dots,g_k \in V^*$ mit

$$g_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j \quad \forall 1\le i\le k$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g_1\wedge\dots\wedge g_k = \det[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le k}}\, f_1\wedge\dots\wedge f_k$$

$$\left([a_{ij}] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \right)$$

<u>Beweis</u>: Sei Per_k die Gruppe aller Permutationen von $1,\dots,k$. Erinnere

$$\det[a_{ij}] = \sum_{\sigma\in \mathrm{Per}_k} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{k\sigma(k)}$$

Daher gilt

$$g_1 \wedge \dots \wedge g_k = \Big(\sum_{j_1=1}^{k} a_{1j_1} f_{j_1}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{j_k=1}^{k} a_{kj_k} f_{j_k}\Big)$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{k} (a_{1j_1} \cdots a_{kj_k})\, f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Per}_k} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)}\, f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(k)}$$

(beachte: die Forme $f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k} = 0$ wenn die Zahlen $j_1, \dots, j_k$ nicht paarweise verschieden sind)

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Per}_k} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)}\, f_1 \wedge \dots \wedge f_k$$

$$= \det[a_{ij}]\, f_1 \wedge \dots \wedge f_k$$

∎

Satz 15.1.7 (Dachprodukt von k- und l-Formen)

Es gibt genau eine Abbildung $(k, l \in \mathbb{N})$

$$\Lambda^k V^* \wedge \Lambda^l V^* \longrightarrow \Lambda^{k+l} V^*$$

$$(\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $\omega \wedge \eta$ ist linear in jedem Faktor, d.h.

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$$

$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$

$\lambda(\omega \wedge \eta) = (\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ii) Sind $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l \in V^*$ so gilt

$(f_1 \wedge \dots \wedge f_k) \wedge (g_1 \wedge \dots \wedge g_l) = f_1 \wedge \dots \wedge f_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l$

Beweis

Sei $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ eine Basis von V^*. Man definiere für

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

$$\eta = \sum_{j_1 < \dots < j_l} b_{j_1 \dots j_l} e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_l}^*$$

das Produkt $\omega \wedge \eta$ durch

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} a_{i_1 \dots i_k} b_{j_1 \dots j_l} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_l}^*$$

Man sieht leicht dass das Produkt die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

Man muss nun die Eindeutigkeit vom Produkt zeigen.

Diese ist klar (Nach der Linearität-Eigenschaft (i) muss man das Produkt $\omega \wedge \eta$ definieren für

$\omega = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, \ \eta = e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_l}^*$

in diesem Fall ist $\omega \wedge \eta = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_l}^*$ nach (ii).)

Bemerkung: wir definieren auch $\omega \wedge \eta$ für $k = 0$ oder $l = 0$

sei $a \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$
$\eta \in \Lambda^k V^*$

Definiere $a \wedge \eta = \eta \wedge a = a \cdot \eta$.

Man sieht dass die beide Eigenschaften (i), (ii) erfüllt sind für $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\eta \in \Lambda^l V^*$, $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Satz 15.1.8 (i) Für $\omega_1 \in \Lambda^{k_1} V^*$, $\omega_2 \in \Lambda^{k_2} V^*$, $\omega_3 \in \Lambda^{k_3} V^*$ gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

Folglich kann man das Produkt

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k := \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k)$$

induktiv definieren für ~~Differ~~ Formen $\omega_1, \dots, \omega_k$. und es gilt

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_s) \wedge (\omega_{s+1} \wedge \dots \wedge \omega_k) \quad \forall\ 1 \leq s \leq k-1.$$

(ii) Sei $\omega \in \Lambda^k V^*$ und $\eta \in \Lambda^l V^*$. Dann gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega$.

Beweis zu (i)

Nach der Linearität-Eigenschaft von Dachprodukt muss man (i) überprüfen nur für

$$w_1 = f_1 \wedge \dots \wedge f_{k_1}$$
$$w_2 = g_1 \wedge \dots \wedge g_{k_2}$$
$$w_3 = h_1 \wedge \dots \wedge h_{k_3}$$

wobei $f_1, \dots, f_{k_1}, g_1, \dots, g_{k_2}, h_1, \dots, h_{k_3} \in V^*$

In diesem Fall ist (i) offensichtlich nach (ii) von Satz 15.1.7.

zu (ii) Wie im (i) müssen wir (ii) nur für

$$w = f_1 \wedge \dots \wedge f_k \quad \text{überprüfen}$$
$$\eta = g_1 \wedge \dots \wedge g_\ell$$

Die Formel $w \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge w$ in diesem Fall folgt aus der Tatsache dass das Vorzeichen von der Permutation

$$(1, \dots, k, k+1, \dots, k+\ell) \mapsto (k+1, \dots, k+\ell, 1, \dots, k)$$

gleich $(-1)^{k\ell}$ ist. ∎

Bemerkung 15.1.9 Seien $w \in \Lambda^k V^*$, $\eta \in \Lambda^\ell V^*$

Es gilt

$\forall\, v_1, v_2, \dots, v_{k+\ell} \in V$:

$(\ast)$

$$(\omega\wedge\eta)(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$
$$= \frac{1}{k!\,l!}\sum_{\sigma\in \mathrm{Per}_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\,\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\cdot\eta(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

wobei Per_{k+l} die Gruppe der Permutationen von Zahlen $1,2,\dots,k+l$.

<u>Beweis</u> (Skizzierung)

Seien $e_1,\dots,e_n$ eine Basis von V
$e_1^*,\dots,e_n^*$ die zu $\{e_1,\dots,e_n\}$ duale Basis von V^*.

Beachte: Beide Seiten von $(\ast)$ sind multilinearität in $v_1,\dots,v_{k+l}$. Aus dieser und die Linearität von Dachprodukt folgt:

es genügt, $(\ast)$ zu zeigen für

$$\omega = e_{i_1}^*\wedge\dots\wedge e_{i_k}^*,\quad \eta = e_{j_1}^*\wedge\dots\wedge e_{j_l}^*$$

und $v_s = e_s \quad \forall\ 1\le s\le k+l$

(Nach Umnummerierung wenn es nötig ist)

Nach Berechnungen im Beweis vom Satz 12.1.4 sieht man dass beide Seiten von $(\ast)$ nicht null sind nur wenn $\{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l\} = \{1,2,\dots,k+l\}$

Sei $\sigma_0\in \mathrm{Per}_{k+l}$ mit $\begin{cases}\sigma_0(s) = i_s & 1\le s\le k\\ \sigma_0(s) = j_s & k+1\le s\le k+l\end{cases}$

Es gilt

$$\omega\wedge\eta\,(e_1,\dots,e_{k+l}) = (\varepsilon(\sigma_0))^{-1}\,\omega\wedge\eta\,(e_{i_1},\dots,e_{i_k},e_{j_1},\dots,e_{j_l})$$
$$= \varepsilon(\sigma_0).$$

Andererseits gilt

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\, \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{wenn } \sigma(\{1, \dots, k\}) \neq \{i_1, \dots, i_k\} \\ & \text{oder } \sigma(\{k+1, \dots, k+l\}) \neq \{j_1, \dots, j_l\} \\ \varepsilon(\sigma_0^{-1} \circ \sigma) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei man beachte, dass (in diesem Fall) $\sigma_0^{-1} \circ \sigma|_{\{1,\dots,k\}}$ eine Permutation von $\{1, \dots, k\}$ ist

und $\sigma_0^{-1} \circ \sigma|_{\{k+1, \dots, k+l\}}$ eine Permutation von $\{k+1, \dots, k+l\}$ ist

Es gibt genau $k!\, l!$ Permutationen $\sigma \in \mathrm{Per}_{k+l}$

mit $\begin{cases} \sigma(\{1, \dots, k\}) = \{i_1, \dots, i_k\} \\ \sigma(\{k+1, \dots, k+l\}) = \{j_1, \dots, j_l\} \end{cases}$ $(**)$

Daher erhält man

Die rechtige Seite von $(*)$

$$= \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \text{ mit Eigenschaft } (**)} \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma_0^{-1} \circ \sigma)$$

$$= \frac{1}{k!\, l!} \cdot k!\, l!\; \varepsilon(\sigma_0^{-1}) = \varepsilon(\sigma_0)$$

Daraus folgt $(*)$ ∎

Definition 15.1.10. Sei $v \in V$, $\omega \in \Lambda^k V^*$.
Die Form $i_v \omega = v \lrcorner \omega \in \Lambda^{k-1} V^*$ definiert durch für $w_1, \dots, w_{k-1} \in V$

$$(i_v \omega)(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1})$$

heißt inneres Produkt von ω mit dem Vektor v.

Beispiel 15.1.11 Sei $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$$

Dann gilt

$$(v \lrcorner \omega)(w_1, \dots, w_{n-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{n-1})$$

$$= \det [v, w_1, \dots, w_{n-1}]$$

($v, w_1, \dots, w_{n-1}$ werden als Spaltenvektor geschrieben)

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} A_j v_j$$ (Entwicklungssatz nach der ersten Spalte)

wobei A_j die Determinante der Matrix ist, die aus $A = [v, w_1, \dots, w_{n-1}]$ durch streichen der ersten Spalte und j-ten Zeile entsteht.

Beachte, A_j = die Determinante der Matrix, die aus $[w_1, \dots, w_{n-1}]$ durch Streichen der j-ten Zeilen entsteht. Daher gilt, nach Definition 15.1.3,

$$A_j = e_1^* \wedge \dots \wedge \widehat{e_j^*} \wedge \dots \wedge e_n^*(w_1, \dots, w_{n-1})$$

wobei der Hut auf $\widehat{e_j^*}$ bedeutet, dass e_j^* weggelassen ist.

$$\begin{array}{c} \\ \\ j\text{-te} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots \\ v_2 & \\ \vdots & \cdots \\ \hline \vdots & \cdots \\ v_n & \end{bmatrix} \longrightarrow A_j$$

Definition 15.1.11 (zurückholen von Formen)

Ist $A: V \to W$ eine lineare Abbildung, so definieren wir $A^*: \Lambda^k W^* \to \Lambda^k V^*$ durch

$$A^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(Av_1, \dots, Av_k)$$

$\forall\, \omega \in \Lambda^k W^*,\ v_1, \dots, v_k \in V$.

Man sieht leicht dass $A^*\omega \in \Lambda^k V^*$ und A^* eine lineare Abbildung ist. Für $k=0$ setze man $A^*\omega := \omega$, $\omega \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R} = \Lambda^0 W^*$

- Für $k=1$ gilt $A^*\omega = \omega \circ A$.
- Ist $B: W \to W'$ linear, so gilt

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B \circ A"'] & W \arrow[r, "B"] & W' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k W'^* \arrow[r, "B^*"'] \arrow[rr, bend right, "A^* \circ B^*"'] & \Lambda^k W^* \arrow[r, "A^*"'] & \Lambda^k V^* \end{tikzcd}$$

- Für $Id : V \to V$ Identitätsabbildung, gilt: $Id^*: \Lambda^k V^* \to \Lambda^k V^*$ Identitätsabbildung von $\Lambda^k V$. Es folgt, A^* ist ein Isomorphismus wenn A ein Isomorphismus ist.
- Erinnere: $\dim \Lambda^n V^* = 1$

Satz 15.1.12 Sei $A : V \to V$ linear. Dann $\exists$ $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $A^* \omega = c\,\omega$, $\forall\, \omega \in \Lambda^n V^*$. Wir schreiben $\det A := c$. Man nennt $\det A$ die Determinante von A.

Bemerk.: Sei $e_1, \dots, e_n$ Basis von V
$e_1^*, \dots, e_n^*$ die duale Basis von V^*

Nach Satz 15.1.5 ist $\dim \Lambda^n V^* = 1$ und $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ eine Basis von $\Lambda^n V^*$.
Daher kann man schreiben

$$\omega = \lambda \cdot e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

Sei $\tilde{A}$ die Matrix von A bzgl. $\{e_1, \dots, e_n\}$
Man beachte

$$A^*(e_i^*)(v) = e_i^*(Av) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} v_j$$
$$= \tilde{a}_{ij}\, e_j^*(v)$$

wobei $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$

Es folgt $\quad A^* e_i^* = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, e_j^*$

Man erhält, nach Satz 15.1.6,

$$\underbrace{(A^* e_1^*) \wedge \dots \wedge (A^* e_n^*)}_{\overset{\shortparallel}{A^*(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)}} = \det [\tilde{a}_{ij}]\, e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

$\boxed{6}$

<u>Bemerkung 15.1.13</u> Es gilt für $A : V \to W$ linear, $\omega \in \Lambda^k W^*$, $\eta \in \Lambda^l W^*$:

$$A^*(\omega \wedge \eta) = A^*\omega \wedge A^*\eta \qquad (1)$$

Allgemeiner gilt induktiv

$$A^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_s) = A^*\omega_1 \wedge \dots \wedge A^*\omega_s.$$

Die Formel (1) folgt unmittelbar aus Bemerkung 15.1.9.

<u>Beispiel</u>: Seien $\{e_1, \dots, e_n\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$
$\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ die dazu duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann bekommt man

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$$
$$v \mapsto Av$$

$$A^* : \Lambda^k (\mathbb{R}^n)^* \to \Lambda^k (\mathbb{R}^n)^*$$
$$\omega \mapsto A^*\omega$$

$$A^* e_j^*(v) = e_j^*(Av) = e_j^*\Big(\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k\Big) e_i\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k = \sum_{k=1}^n a_{jk}\, e_k^*(v)$$

Es folgt $A^* e_j^* = \sum_{k=1}^n a_{jk}\, e_k^*$,

§ 15.2. Orientierung. Volumenelement

<u>Definition 15.2.1</u> Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $n = \dim V$

- Wir sagen
$\omega, \omega' \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ sind <u>äquivalent</u>,
geschrieben $\omega \sim \omega'$, wenn $\omega = \lambda \omega'$, für eine $\lambda > 0$.
Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen (da $\Lambda^n V^* \cong \mathbb{R}$)
und jede heißt <u>Orientierung</u> von V.
Ein <u>orientierter Vektorraum</u> $(V, [\omega])$ ist ein Vektorraum
V zusammen mit einer festen Orientierung $[\omega]$
($[\omega]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von ω)
Falls $V = \{0\}$ ($\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$), ist eine Orientierung
auf $V = \{0\}$ einer der Halbgeraden $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$, also
die Wahl einer der Zahlen ± 1.

- Eine geordnete Basis $(e_1, \dots, e_n)$ (die Reihenfolge
der Elementen der Basis ist wichtig hier) in einem
orientierten Vektorraum $(V, [\omega])$ heißt <u>positiv</u>
<u>orientiert</u> (bzw. <u>negativ orientiert</u>) falls $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$ (bzw. < 0)

Das Vorzeichen einer geordneten Basis B von V:

$$\varepsilon(B) = \operatorname{sgn}(\omega(e_1, \dots, e_n)) \in \{\pm 1\}$$

$(B = (e_1, \dots, e_n))$

Zwei Basen B_1, B_2 sind <u>gleich orientiert</u> $:\Leftrightarrow$ $\varepsilon(B_1) = \varepsilon(B_2)$.

<u>Satz 15.2.2</u> (i) Jede Basis $B = (e_1, \dots, e_n)$ definiert eine Orientierung $[\omega]$, so dass B positiv orientiert ist. Nämlich gilt $[\omega] = [e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*]$, wobei $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ die zu B duale Basis von V^*.

(ii) Zwei Basen B, B_1 sind gleich orientiert

$\Leftrightarrow$ $\det M_B^{B_1} > 0$, wobei $M_B^{B_1}$ die Basiswechselmatrix von B_1 nach B ist

<u>Beweis</u> (i) ist klar da

$$e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* (e_1, \dots, e_n) = 1 > 0$$

<u>zu (ii)</u> $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B_1 = (e_1', \dots, e_n')$

B_1 ist gleich orientiert zu B $\Leftrightarrow$

$$e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* (e_1', \dots, e_n') > 0$$

$$\| $$

$$\det [e_1' \dots e_n'] = \det M_B^{B_1}$$

(hier schreibt man e_j' wie Spaltenvektor in der Basis $(e_1, \dots, e_n)$)

Es folgt : $\det M_B^{B_1} > 0$. ∎

<u>Definition 15.2.3</u> Sei $(V, [\omega], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter Skalarproduktraum, $\dim V = n$.

Das <u>Volumenelement</u> ω_V ist die einzige n-Form, die auf jeder positiven orientierten ~~Orthogonal~~ Orthonormal-Basis den Wert 1 annimmt.

<u>Satz 15.2.4</u> Das Volumenelement ist wohl definiert.
Ist $B = (e_1, \dots, e_n)$ eine positive Orthonormalbasis, so gilt $\omega_V = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$.

<u>Beweis</u> Setze $\omega_V := e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$

Sei $B' = (e_1', \dots, e_n')$ eine positive orientierte Orthonormalbasis.

Es folgt $\left\{ \begin{array}{l} \det M_B^{B'} > 0 \text{ (wegen der positiven Orientierung)} \\ |\det M_B^{B'}| = 1 \text{ (wegen der Orthonormalität)} \end{array} \right.$

Man erhält $\det M_B^{B'} = 1$

und $\omega_V(e_1', \dots, e_n') = \det M_B^{B'} = 1$

Daraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit von Volumenelement ∎

Definition 15.2.5 Sei $V = \mathbb{R}^n$
$(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$.

Die Standardorientierung auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\omega_{\mathbb{R}^n} = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* .$$

Das Volumenelement von $\mathbb{R}^n$ ist $\omega_{\mathbb{R}^n}$.

Satz 15.2.6 Sei $(V, [\omega], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter Skalarproduktraum. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann gilt

$$\left(\omega_V(v_1, \dots, v_n)\right)^2 = \det\left(\left[\langle v_i, v_j \rangle \right]_{1 \le i, j \le n} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & & \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}$$

$=:$ Gramsche Determinante
$=: G(v_1, \dots, v_n)$

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so gilt

$$\omega_V = \varepsilon(B) \sqrt{G(v_1, \dots, v_n)} \; v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^* .$$

Beweis Sei $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Dann gilt $\omega_V = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ und $\omega_V(\cancel{\bullet}\, v_1, \dots, v_n) = \det M_{B_0}^{B}$; $B = (v_1, \dots, v_n)$

Zudem gilt

$$\left(\det M_{B_0}^{B}\right)^2 = \det\left((M_{B_0}^{B})^T M_{B_0}^{B} \right)$$

(Für eine Matrix A ist A^T die transponierte Matrix von A)

$$= \det\left([\langle v_i, v_j \rangle] \right) = G(v_1, \dots, v_n)$$

Die Behauptung folgt ■

Definition 15.2.7 Sei $T: (V, [\omega]) \to (W, [\eta])$ lineare Abbildung zwischen orientierter Vektorräume.
T heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend)

falls $\quad T^*\eta = \lambda\omega \quad$ mit $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda < 0$).

Wir setzen $\varepsilon(T) := \begin{cases} 1 & \text{falls } T \text{ orientierungserhaltend} \\ -1 & \text{falls } T \text{ orientierungsumkehrend} \end{cases}$

Beispiel: Seien $V = W = \mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung
$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$v \mapsto Av.$$

Nach Satz 15.1.12 gilt $\quad T_A^* \omega_{\mathbb{R}^n} = (\det A)\, \omega_{\mathbb{R}^n}$

Daher sieht man dass:

T_A ist orientierungserhaltend $\iff$ $\det A > 0$.

§15.3. Differentialformen auf Umfk

<u>Definition 15.3.1</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Umfk, $\dim M = n$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Unter einer <u>Differentialform</u> vom Grad k (kurz. k-Form) auf M, verstehen wir eine Abbildung $\omega : M \to \bigcup_{x \in M} \Lambda^k T_x^* M$

so dass $\omega(x) \in \Lambda^k T_x^* M$.

<u>Beispiel</u>

1) Wegen $\Lambda^0 T_x^* M = \mathbb{R}$ ist eine 0-Form eine Funktion $\omega : M \to \mathbb{R}$.

2) $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \Rightarrow df(x) \in T_x^* M$

Daher ist das Differential
$$df : M \to \biguplus_{x \in M} T_x^* M$$
$$x \mapsto df(x)$$
eine 1-Form. Insbesondere sind die Abbildungen

3)
$$dx_i : \mathbb{R}^n \to \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} T_x^* \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto dx_i(x) \in T_x^* \mathbb{R}^n$$

1-Formen $\forall 1 \leq i \leq n$. Erinnere: $dx_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$v \mapsto v_i$$
wobei v_i die i-te Komponente von v, d.h.
(Satz 14.5.7 angewendet auf $\mathbb{R}^n$) $dx_i(x) = e_i^* \quad \forall i \; \forall x$

3) Für $k>n$ da $\Lambda^k T_x^* M = \{0\}$, sind k-Formen die Abbildung
$$M \to \{0\}$$
$$x \mapsto 0$$

<u>Definition 15.3.2</u>

(i) sind ω, η k-Formen, dann ist
$$\omega + \eta : M \to \bigcup_{x \in M} \Lambda^k T_x^* M$$
$$x \mapsto \omega(x) + \eta(x)$$
eine k-Form.

(ii) sind ω k-Form, η ℓ-Form, dann ist
$$\omega \wedge \eta : M \to \bigcup_{x \in M} \Lambda^{k+\ell} T_x^* M$$
$$x \mapsto \omega(x) \wedge \eta(x)$$
eine $(k+\ell)$-Form. Das Dachprodukt $\omega \wedge \eta$ ist bilinear (auf ω, η), assoziativ und es gilt
$$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega .$$

(iii) Sei $M = \mathbb{R}^n$, $I = (i_1, \dots, i_k)$ eine k-Tupel aus $\{1, 2, \dots, n\}$.
Setze $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$
Ist $I = \emptyset$, setzen wir $dx_I := 1$.

Allgemeiner sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Umpfk, $\dim M = n$
$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M.

$B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right\}$ lokal kanonische Basis von $T_x M$ bzgl. (U, φ). Man hat:

$\{dx_1(x), \dots, dx_n(x)\}$ ist die zu B dual Basis von $T_x^* M$.

Daher bilden

$$dx_I(x) := dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(x)$$

für $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $|I| = k$, $i_1 < \dots < i_k$
$I = \{i_1, \dots, i_k\}$
eine Basis für $\Lambda^k T_x^* M$. Man bekommt

Satz 15.3.3 Sei M, $(U, \varphi = (x_1, \dots x_n))$ wie oben.
Jede k-Form ω auf U hat die Form

$$\omega = \sum_{\substack{|I| = k \\ I = \{i_1, \dots, i_k\} \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} \omega_I \, dx_I$$

wobei $\omega_I(x) = \omega(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(x) \right)$

Bemerkung: Sei $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann hat jede k-Form ω auf U ~~hat~~ die Form

$$\omega = \sum_{\substack{I=(i_1,\dots,i_k)\\ 1\le i_1<\dots<i_k\le n}} \omega_I \, dx_I$$

mit $\omega_I = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ da $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) = e_j$

$\forall j$.

<u>Definition 15.3.7</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine k-Form ω heißt <u>glatt</u> (oder von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$) wenn $\omega_I : U \to \mathbb{R}$ glatt $\forall\ I = (i_1, \dots, i_k)$
$1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

Sei $\Omega^k(U)$ die Menge aller glatten k-Formen auf U. Beachte: $\Omega^k(U)$ ist ein Vektorraum.

Das (äußere) Differential $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ ist definiert durch

$$d\Big(\sum_{\substack{I=(i_1,\dots,i_k)\\ 1\le i_1<\dots<i_k\le n}} \omega_I \, dx_I \Big) := \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$
$$= \sum_I d\omega_I \wedge dx_I .$$

wobei $\sum_I := \sum_{\substack{I=(i_1,\dots,i_k)\\ 1\le i_1<\dots<i_k\le n}}$

<u>Beispiel</u>: 1) Sei $\omega = f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$

$df = d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Wir finden wieder das übliche Differential von f.

2) Sei $\omega = P\,dx + Q\,dy \in \Omega^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$.

Dann gilt

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

<u>Definition 15.3.5</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$X : U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld.

Die Abbildung $i_X : \Omega^k(U) \to \Omega^{k-1}(U)$

$(k \geq 1)$

definiert durch

$$(i_X\, \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = (X \lrcorner\, \omega)(v_1, \dots, v_{k-1})$$

$$= \omega(X, v_1, \dots, v_{k-1})$$

heißt <u>inneres Produkt von ω mit dem Vektorfeld X</u>

<u>Beispiel 15.3.6</u> Wir berechnen

$$(X \lrcorner\, \omega_{\mathbb{R}^n})(v_1, \dots, v_{n-1}) = (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(X, v_1, \dots, v_{n-1})$$

$$= \det[X, v_1, \dots, v_{n-1}] =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} X_j \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \right) (v_1, \dots, v_{n-1})$$

($\widehat{dx_j}$ bedeutet dass dx_j weggelassen ist)

Daher gilt

$$d(X \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} dX_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= (\operatorname{div} X) \, \omega_{\mathbb{R}^n}$$

wobei $\displaystyle \operatorname{div} X := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j}$

div X heißt <u>Divergenz von X</u>.

<u>Satz 15.3.7</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gelten

(i) $d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta \quad \forall\, \omega, \eta \in \Omega^k(U)$

(ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

$\forall\, \omega \in \Omega^k(U), \ \eta \in \Omega^l(U)$

(iii) $d(d\omega) = 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega^k(U)$.

((i) ist klar.)

Beweis zu (ii) Es genügt, die Aussage für

$\omega = f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = f\, dx_I$

$\eta = g\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} = g\, dx_J$

Wegen des Satzes 15.3.3. Dann gilt

$\omega \wedge \eta = fg\ dx_I \wedge dx_J$

$d(\omega\wedge\eta) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J = ((df)g + f\,dg) \wedge dx_I \wedge dx_J$

$= df \wedge dx_I \wedge (g\, dx_J) + f\, \underbrace{dg \wedge dx_I \wedge dx_J}_{(-1)^k dx_I \wedge dg}$

$\Big(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)\, dx_{i_1} \wedge dg \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$= \dots = (-1)^k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \Big)$

$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$

zu (iii) $\omega = f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ wie in (ii).

$d(df) = d\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\Big) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$

$$= \sum_{\substack{i<j \\ 1\le i,j\le n}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

$$= 0 .$$

Nun gilt

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$d(d\omega) = d(df) \wedge dx_I + (-1)^1 \, df \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

$$= 0 + (-1)\, df \wedge d(dx_I)$$

Beachte $d(dx_I) = d(1 \cdot dx_I) = d\,1 \wedge dx_I = 0$

da $d\,1 = 0$ (das Differential der konstante Funktion) ∎

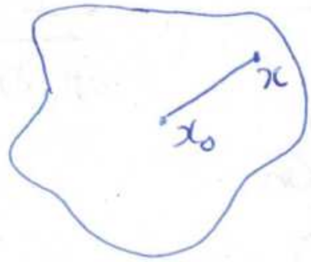
<u>Definition 15.3.8</u> Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(U)$ heißt <u>geschlossen</u> falls $d\omega = 0$ und <u>exakt</u> wenn $\exists$ $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$.

- wenn $k = 1$ heißt η <u>Stammfunktion</u> von ω
- nach Satz 15.3.7 (iii) ist jede exakte Form geschlossen. Die Umkehrung ist falsch: betrachte

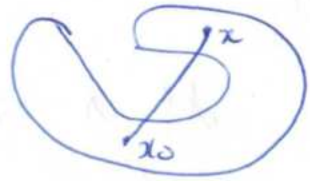
$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

ω ist geschlossen aber nicht exakt.

<u>Definition 15.3.9</u> Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>sternförmig</u> falls $\exists$ $x_0 \in U$ so dass $[x_0, x] \subset U$ $\forall x \in U$



sternförmig



nicht sternförmig.

<u>Satz 15.3.10</u> (Poincaré-Lemma) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Sei $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(U)$ abgeschlossen. Dann $\exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(U)$ mit $d\eta = \omega$.

<u>Beweis</u> Wir erklären nur den Fall $k = 1$.

OBdA nehmen wir an $x_0 = 0$ (der Punkt x_0 in der Definition 15.3.9). Sei:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i, \quad \omega_i \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

$$0 = d\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i$$

Es folgt $\quad \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \forall\, i, j.$

Setze $\quad f(x) := \displaystyle\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx)\, x_i \, dt$

Durch Differentiation unter dem Integral ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(w_i(tx) x_i \right) dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k}(tx) \cdot t x_i + \delta_{ik} \, w_i(tx)\right) dt$$

$\downarrow$ (Kronecker-Delta)

$$= \int_0^1 \left(w_k(tx) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial w_i}{\partial x_k}(tx)\, t x_i}_{\frac{\partial w_k}{\partial x_i}(tx) \cdot t x_i} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t\, w_k(tx)\right) dt = t w_k(tx)\Big|_0^1$$

$$= w_k(x)$$

Es folgt $df = w$ ∎

<u>Definition 15.3.11</u> Sei M_1, M_2 Umgk, $F \in \mathcal{C}^\infty(M_1, M_2)$. Sei w eine k-Form auf M_2. Wir definieren die <u>Zurückholen</u> $F^* w$ von w:

$F^* w$ is eine k-Form auf M_1

$$F^* w(x) := \left(DF(x)\right)^* w(F(x)) \quad \forall x \in M_1$$

(Erinnere $DF(x) : T_x M_1 \to T_{F(x)} M_2$, welche die Abbildung $(DF(x))^* : \Lambda^k T^*_{F(x)} M_2 \to \Lambda^k T^*_x M_1$ induziert)

(siehe Definition 15.1.11)

<u>Beispiel</u> 15.3.12: (1) Falls $k = 0$, $w : M_2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gilt $F^* w = w \circ F$.

(ii) Sei $k=1$. Dann gilt

$$F^*\omega(x) = \omega(x)\circ(DF(x))$$

$$\begin{tikzcd} T_x M_1 \arrow[r, "DF(x)"] \arrow[rr, bend right, "\omega(x)\circ(DF(x))"'] & T_{F(x)} M_2 \arrow[r, "\omega(x)"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$. Man erhält

$$d(F^*g)(x) = d(g\circ F)(x) = dg(x)\circ DF(x)$$
$$= F^*(dg)(x) \quad \forall x \in M_1$$

Daher gilt
$$d(F^*g) = F^*(dg).$$

<u>Satz 15.3.13</u> Seien M_1, M_2 Umfk, $F \in \mathcal{C}^\infty(M_1, M_2)$.

Dann gilt:

(i) $F^*(\omega+\omega') = F^*\omega + F^*\omega' \quad \forall\, \omega, \omega'$ k-Formen

$F^*(\lambda\omega) = \lambda F^*\omega \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $F^*(\omega\wedge\eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta \quad \forall\, \omega$ k-Form, η l-Form

(iii) $(G\circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega) \quad \forall\, \omega$ k-Form, $G: M_2 \to M_3$

<u>Beweis</u> (i) – (ii) sind klar da die Abbildung

$$(DF)^*: \quad \Lambda^k T^*_{F(x)} M_2 \to \Lambda^k T^*_x M_1$$

ähnliche Eigenschaften erfüllt (siehe Seiten 545-547).

(iii) gilt wegen der Kettenregel.

$$D(G \circ F) = DG \circ DF \qquad \square$$

<u>Satz 15.314</u> Seien $M_1 = U \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 = V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$. Dann gilt

(i) $\forall \omega \in \Omega^k(V): d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$

(ii) wenn

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \omega_{i_1 \dots i_k} \, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

$(y = (y_1, \dots, y_m) \subset \mathbb{R}^m)$

und $F = (F_1, \dots, F_m)$, so gilt

$$F^*\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ F) \, dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$$

und

$$dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} \left(\det \frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

wobei

$$\frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_{j_k}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_{i_k}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial F_{i_k}}{\partial x_{j_k}} \end{bmatrix}$$

Insbesondere wenn $m = n$

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

gilt

$$F^*\omega(x) = (f \circ F)(x) \det J_F(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Beweis zu (ii)

- für $k=0$: ist die Aussage schon in Beispiel 15.3.12 (i) bewiesen.
- für $k \geq 1$: nach Satz 15.3.13 (ii) gilt

$$F^*(\omega_{i_1\dots i_k}\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})$$

$$= (\omega_{i_1\dots i_k} \circ F)\, F^* dy_{i_1} \wedge \dots \wedge \underbrace{F^* dy_{i_k}}_{\substack{= d(y_{i_k} \circ F) \\ = F_{i_k}}}$$ (Beispiel 15.3.12 (ii))

$$= (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$$

Andererseits gilt

$$dF_{i_1} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_j} dx_j, \dots, dF_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{i_k}}{\partial x_j} dx_j.$$

Es folgt (Satz 15.1.6)

$$dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{i_k}}{\partial x_j} dx_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \det \frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

zu (i) Nach Linearität-Eigenschaften von F^* und dem äußeren Differential d müssen wir nur die Behauptung für ω von der Form

$$\omega = f\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$ überprüfen.

Es gilt dann

$$F^*\omega = (f \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$$

$$d(F^*\omega) = d(f\circ F) \wedge dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k} + (-1)^0 (f \circ F) \wedge \underbrace{d(dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k})}_{=0}$$

(Man beachte: $d(dF_{i_1}) = 0$

$$d(dF_{i_1} \wedge dF_{i_2}) = d(dF_{i_1}) \wedge dF_{i_2} \quad (-1)^1 dF_1 \wedge d(dF_{i_2}) = 0$$

induktiv gilt $d(dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}) = 0$)

Daraus folgt

$$d(F^*\omega) = d(f \circ F) \wedge dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$$
$$= F^*(df \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})$$
$$= F^*(d\omega) \quad \blacksquare$$

Bemerkung 15.3.15: wenn $\omega \in \Omega^k(V)$ gilt $F^*\omega \in \Omega^k(U)$ wegen Satz 15.3.14 (ii).

Definition 15.3.16 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Umfk, $\dim M = n$, ω k-Form auf M.

ω heißt glatt wenn $\forall$ Parametrisierung $\varphi: D \to M$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) gilt $\varphi^* \omega \in \Omega^k(D)$.

Dies stimmt mit der Definition von Glattheit für k-Formen auf offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ überein (siehe Bemerkung 15.3.15). Der Vektorraum von glatten k-Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet.

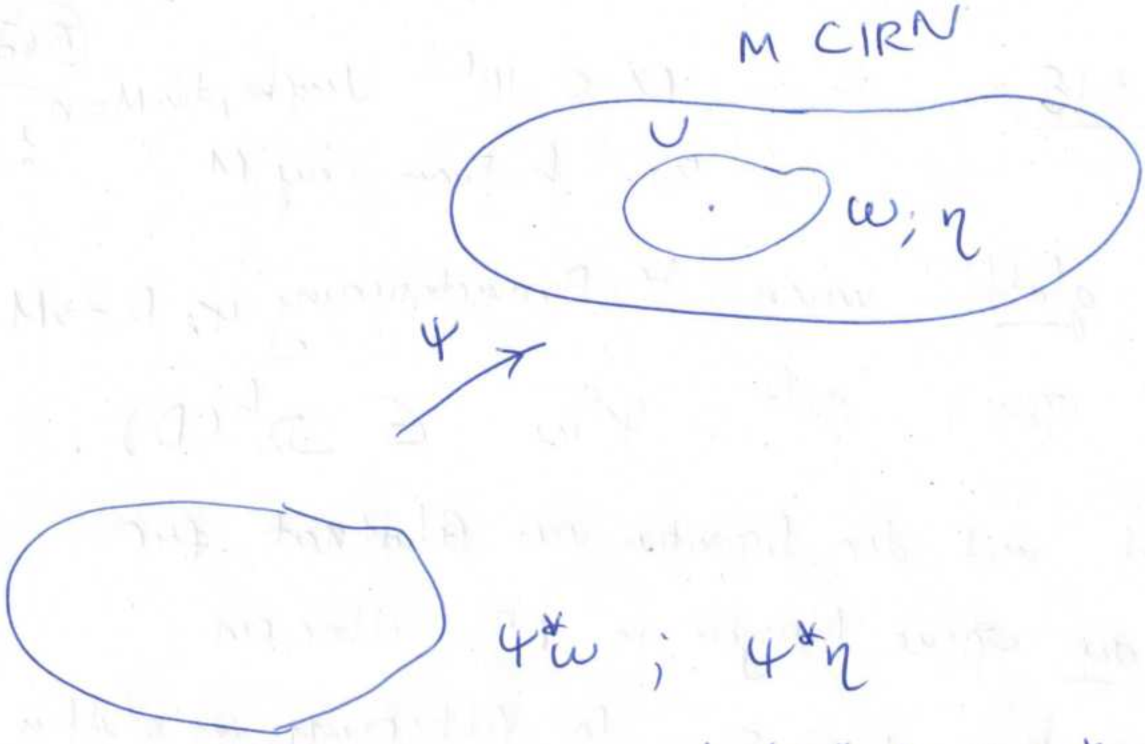
Satz 15.3.17 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Umfk $\dim M = n$
$\omega \in \Omega^k(M)$.

Dann existiert eine eindeutig bestimmte $(k+1)$-Form $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ so dass

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^* \eta$$

$\forall$ Parametrisierung $\varphi: D \to M$. Die Form η heißt das (äußere) Differential von ω und wird mit $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ bezeichnet.

Wenn $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen, findet man wieder das Differential $d\omega$ (siehe Satz 15.3.14)



$$d(\Psi^*\omega) = \Psi^*\eta \quad \text{auf } D$$

<u>Beweis</u>: Sei $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Atlas von M.

Sei $i \in I$ und $\Psi_i := \varphi_i^{-1}$.

Setze $\eta|_{U_i} := \varphi_i^*\left(d(\Psi_i^*\omega)\right) \in \Omega^{k+1}(U_i)$

<u>Behauptung</u>: $\forall\, i,j$ mit $U_i \cap U_j = \emptyset$ gilt

$$\eta|_{U_i} = \eta|_{U_j} \quad \text{auf } U_i \cap U_j$$

In der Tat hat man

$$\begin{aligned}
\eta|_{U_i} &= \varphi_i^*\left(d\left((\Psi_i \circ \Psi_j^{-1})^* \circ \Psi_j^*\omega\right)\right) \\
&= \varphi_i^*\left((\Psi_i \circ \Psi_j^{-1})^*\, d(\Psi_j^*\omega)\right) \\
&= \varphi_i^* \circ (\Psi_i \circ \Psi_j^{-1})^*\left(d(\Psi_j^*\omega)\right) \\
&= (\varphi_i \circ \Psi_i \circ \Psi_j^{-1})^*\left(d(\Psi_j^*\omega)\right) \\
&= \varphi_j^*\left(d(\Psi_j^*\omega)\right) = \eta|_{U_j}
\end{aligned}$$

Definiere $\eta(x) := \eta|_{U_i}(x)$ wenn $x \in U_i$

Man bekommt eine wohl-definierte Form η auf M. ∎

<u>Bemerkung 15.3.18</u> (i) Aus der Definition von $d\omega$ folgt

$$d(F^*\omega) = F^* d\omega$$

$$\forall \begin{cases} F \in \mathcal{C}^\infty(M', M), \ M' \text{ Umgk} \\ \omega \in \Omega^k(M) \end{cases}$$

d.h. Satz 15.3.14 (i) gilt auch für Umgk.

Satz 15.3.~~7~~ gilt auch für Differentialformen auf Umgk:

1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta \quad \forall \omega, \eta \in \Omega^k(M)$

2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
$\forall \omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$

3) $d(d\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^k(M)$.

(ii) Sei $F : M_1 \to M_2$ glatt Abbildung zwischen Umgk. Dann gilt $\forall \omega \in \Omega^k(M_2)$ ist $F^*\omega \in \Omega^k(M_1)$. (siehe Bemerkung 15.3.15)

§ 15.4. Orientierbare Untermannigfaltigkeit

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ Umgfk ($\dim M = n$)

$(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte.

(d.h. $x_1, \dots, x_n$ sind die Komponenten von φ)

wir benutzen auch die Notationen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

dann sind $x_j = \varphi_j \quad \forall\ j = 1, 2, \dots, n$.

Beachte
$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n \in \Omega^n(U)$$
eine glatte n-Form auf U, und es gilt
$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right) = 1$$
(siehe Satz 14.5.7) $\forall\, x \in U$. Es folgt
$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(x) \in \Lambda^n T_x^* M \setminus \{0\} \quad \forall\, x \in U.$$
und $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(x)$ definiert eine Orientierung auf T_xM $\forall\, x \in U$. Da $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist glatt, sagt man dass die von $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(x)$ induzierte Orientierung auf T_xM glatt von $x \in U$ abhängt.

<u>Definition 15.4.1</u> Eine n-dim Umgfk $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt <u>orientierbar</u> falls es nirgends verschwindende

n-Form $\omega \in \Omega^n(M)$ existiert, d.h.

$$\omega(x) \in \Lambda^n T_x^* M \setminus \{0\} \quad \forall x \in M.$$

Seien $\omega, \omega' \in \Omega^n(M)$ zwei solche Formen.

Da $\Lambda^n T_x^* M \cong \mathbb{R}$, $\exists \ \lambda(x) \neq 0$ mit

$$\omega(x) = \lambda(x) \, \omega'(x).$$

Wir schreiben $\omega \sim \omega'$ falls $\lambda(x) > 0 \ \forall x \in M$.

Dies ist eine Äquivalenz und eine Äquivalenzklasse $[\omega]$ heißt Orientierung auf M.

Eine orientierte Umpf ist ein Paar $(M, [\omega])$ von einer Umpf M und einer Orientierung $[\omega]$.

<u>Beispiel</u> 15.4.2: (i) $M = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n) \\ \omega(x) \neq 0 \ \forall x \end{array}\right\}$$

Beachte $\omega_{\mathbb{R}^n}(x) = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* = \cancel{\ldots} \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (siehe Definition 15.2.5).

$[\omega]_{\mathbb{R}^n}$ ist eine Orientierung auf $M = \mathbb{R}^n$.

Diese heißt die <u>Standard Orientierung</u> auf $M = \mathbb{R}^n$

(ii) $\forall$ $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ Karte von M.

Dann ist U orientierbar, da $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n(x) \neq 0$ $\forall x \in U$.

<u>Satz 15.4.3</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ n-dim Umfk

mit $M = \{x \in \mathbb{R}^N : F_1(x) = \cdots = F_{N-n}(x) = 0\}$

wobei 0 ein regulärer Wert von

$F = (F_1, \dots, F_{N-n}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ ist.

Dann ist M orientierbar.

<u>Beweis</u> Erinnere:

0 ist ein regulärer Wert von F

$$\Leftrightarrow \quad J_F(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} F_1(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} F_{N-n}(x) \end{bmatrix} \text{ hat den Rang } N-n \quad \forall x \in M$$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{grad} F_1(x), \dots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x)$

sind linear unabhängig $\forall x \in M$.

Definiere $\omega \in \Lambda^n T_x^* M$ wie folgt

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_n) := \omega_{\mathbb{R}^N}(\operatorname{grad} F_1(x), \dots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x), v_1, \dots, v_n)$$

$\forall x \in M$, $\forall v_1, \dots, v_n \in T_x^* M \subset \mathbb{R}^N$.

Beachte $\omega \in \Omega^n(M)$ (weil: $\operatorname{grad} F_j$ sind glatt)

und $\omega(x) \neq 0$ da $T_x M = \langle \{\operatorname{grad} F_1(x), \dots, \operatorname{grad} F_{N-n}(x)\} \rangle^\perp$

<u>Bemerkung 15.4.4</u>. (i) Seien $M_1 \subset M_2 \subset \mathbb{R}^N$ Umgk und $\omega \in \Omega^k(M_2)$. Sei $i: M_1 \to M_2$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt $i^*\omega \in \Omega^k(M_1)$ und

$$i^*\omega(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(x)(v_1, \dots, v_k)$$

$$\forall\ v_1, \dots, v_k \in T_x^* M_1 \subset T_x^* M_2 \subset \mathbb{R}^N.$$

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Hyperfläche mit

$(i: M \to \mathbb{R}^N$ Inklusionsabbildung$)$

$M = \{ x \in \mathbb{R}^N : F(x) = 0 \}$ wobei $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und 0 ein regulärer Wert von F ist. Die n-Form $(n = N-1)$ ω im Beweis von Satz 15.4.3 ist gleich

$$\omega = i^*\big((\operatorname{grad} F) \lrcorner\ \omega_{\mathbb{R}^N}\big)$$

wobei $\operatorname{grad} F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Gradient von F
$$x \longmapsto \operatorname{grad} F(x)$$

<u>Satz 15.4.5</u> Sei $(M, [\omega])$ eine orientierte Umgk und $D \subset M$ eine glatt berandete Teilmenge. Dann ist ∂D orientierbar und wenn v der äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂D von D ist, so gilt $i^*(v \lrcorner\, \omega) \in \Omega^{n-1}(\partial \Omega)$ eine nirgends verschwindende $(n-1)$-Form auf $\partial\Omega$ $(n = \dim M)$, wobei

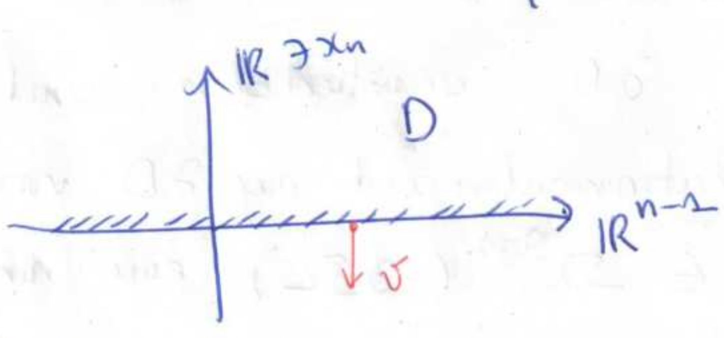
$i: \partial D \to M$ die Inklusionsabbildung.

Die Orientierung $[i^*(v \lrcorner \omega)]$ von ∂D heißt die <u>von $[\omega]$</u> <u>induzierte</u> <u>Randorientierung</u> von ∂D.

<u>Beweis</u> Da v, ω glatt sind, gilt
$i^*(v \lrcorner \omega) \in \Omega^{n-1}(\partial D)$. Sei $x \in \partial D$.
Um zu zeigen dass $i^*(v \lrcorner \omega)(x) \neq 0$ genügt es eine Umgebung U von x in M zu betrachten.
Deshalb O.B.d.A nehmen wir an
$M = U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge
Daher ist ∂D eine Hyperfläche in U.
Die Aussage folgt aus Bemerkung 15.4.4 (ii)
(Beachte: $\omega = \lambda\, \omega_{\mathbb{R}^n}$, $\lambda(x) > 0 \ \forall x \in U$)
und aus Satz 14.8.6 (iv) ∎

<u>Beispiel 15.4.6</u>

(i) Sei $M = \mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$
(mit der Standardorientierung)
$$= \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \begin{array}{l} x_n \geq 0 \\ x_j \in \mathbb{R} \\ 1 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\}$$



$\partial D = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$

$$\nu : \partial D \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto (0, \dots, 0, -1)$$

der Einheitsnormalenfeld auf ∂D.

$T_x M = T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

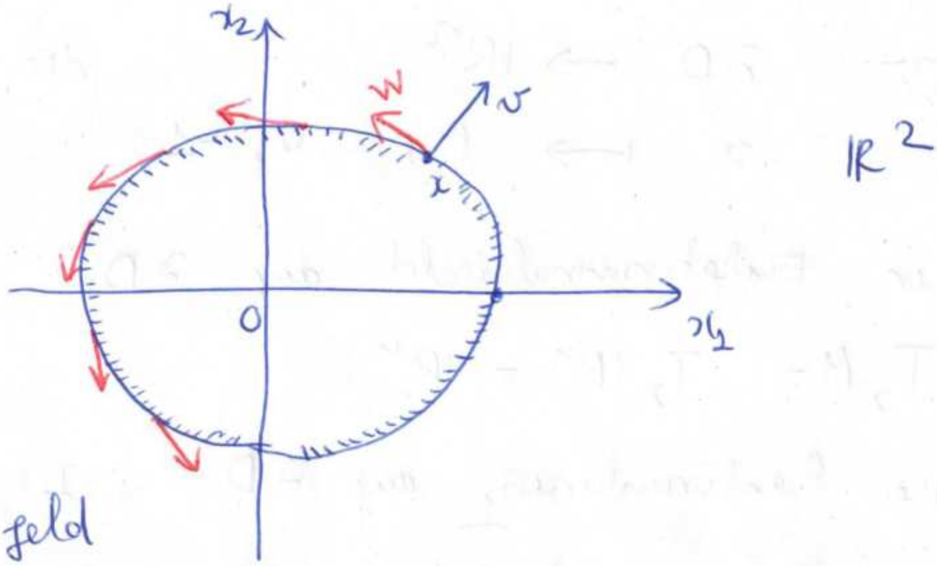
Die Randorientierung auf ∂D ist

$$i^* (\nu \lrcorner (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n))$$
$$= i^* \left((-1)^{n+1} (-1) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \right)$$
$$= (-1)^n \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} .$$

(ii) Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}$ wobei
$\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ in einer Umgebung U von ∂D. Dann induziert

$$\operatorname{grad} f \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

die Randorientierung auf ∂D. Insbesondere wenn $n = 2$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, ist
$[i^* (2x_1 \, dx_2 - 2x_2 \, dx_1)]$ die Randorientierung von $\partial D = S^1$.



Der Einheitsnormalenfeld

$$v(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2)}{\|(x_1, x_2)\|} = (x_1, x_2) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \partial D$$

Sei $w(x) := w(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, $x \in \partial D$.

Beachte $w(x) \in T_x \partial D$ da $\langle w, v \rangle = 0$

$$i^*(2x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)(w(x))$$
$$= (2x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)(w(x))$$
$$= (2x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)\left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}(x) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right)$$
$$= 2x_2^2 + 2x_1^2 = 2 > 0 \quad \forall x \in \partial D = S^1.$$

Daher ist $w(x)$ positiv orientiert auf $T_x S^1$

Der Vektorfeld w gibt uns die geometrische Veranschaulichung der Orientierung auf $\partial D = S^1$.

(iii) Nach (ii) ist $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientierbar.

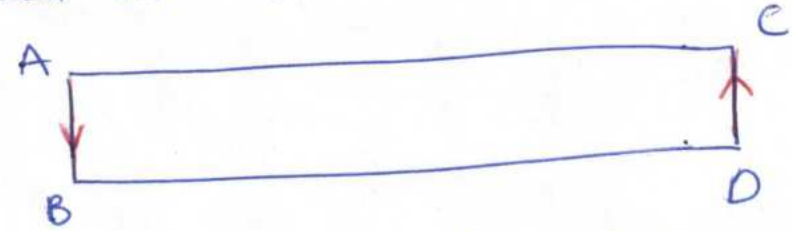
<u>Bemerkung 15.4.7</u>: (i) Ähnlich wie im Beweis von Satz 15.4.5 kann man die folgende Aussage zeigen: $\forall M$ orientierte Umgk, $\forall H \subset M$ Hyperfläche von M (d.h. $\dim H = \dim M - 1$). Dann gilt

H ist orientierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ ein Einheitsnormalenfeld zu H in M, d.h. $\exists$ glatt Abbildung $v: H \to \mathbb{R}^N$ $(M \subset \mathbb{R}^N)$

mit
$$\begin{cases} v(x) \in T_x M & \forall x \in H \\ v(x) \perp T_x H \\ \|v(x)\| = 1 \end{cases}$$

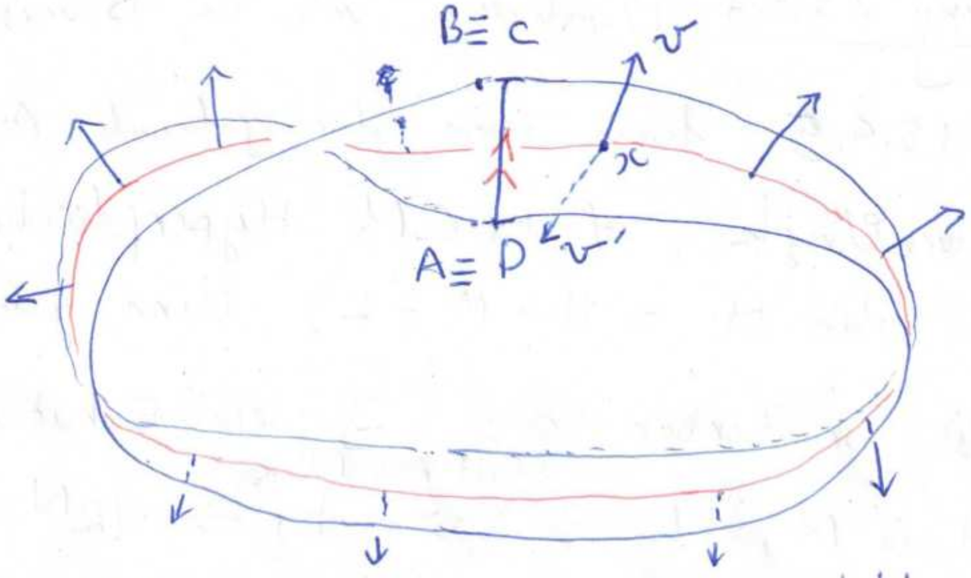
(ii) Es gibt Umgk in $\mathbb{R}^3$, die nicht orientierbar ist. Möbiusband in $\mathbb{R}^3$ ist eine 2-dim Umgk, die nicht orientierbar ist. Man stellt ein Möbiusband her wie folgt:

① Nehmen wir ein Rechteck:



Die Kante AB, CD sind orientiert wie im Bild (rote ~~Pfde~~ Pfeile)

② Kleben wir die Kante AB, CD zusammen so dass die Richtungen von AB, CD übereingestimmt sind.



wir ~~set~~ stellen uns vor: eine Person steht auf dem Band und geht entlang der roten Kurve, nach einem Rund kommt sie wieder im x zurück aber in ~~den~~ der gegenüber Richtung: v' ist die Person nach einem Rund

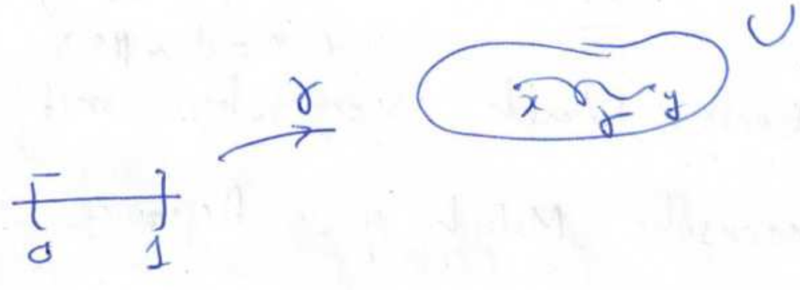
Mathematisch bedeutet dieses Phänomen dass es keinen Einheitnormalenfeld zu dem Möbiusband gibt. Anders gesagt ist das Möbiusband nicht orientierbar.

Erinnere: Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ Teilmenge.

U ist wegzusammenhängende

$\Leftrightarrow \quad \forall \; x, y \in U \; \exists$ stetig Kurve $\gamma : [0,1] \to U$

mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$



Sei U eine wegzusammenhängende Teilmenge in $\mathbb{R}^N$

Dann für jede nirgends verschwindende stetige Funktion f auf U gilt entweder $f(x) > 0 \; \forall x \in U$

oder $f(x) < 0 \; \forall x \in U$.

Definition 15.7.8 Sei $(M, [\omega])$ eine orientierte Umgebung, (U, φ) eine Karte mit U wegzusammenhängend.

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Sei $\varepsilon_{\tilde{x}}(\varphi) := \operatorname{sgn} \lambda(\tilde{x}) \in \{\pm 1\}$

wobei $\quad \omega(\tilde{x}) = \lambda(\tilde{x}) \, d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$, $\tilde{x} \in U$

Da λ stetig, U wegzusammenhängend sind,

ist $\varepsilon_{\tilde{x}}(\varphi)$ konstant: d.h. entweder $\varepsilon_{\tilde{x}}(\varphi) = 1 \; \forall \tilde{x} \in U$

oder $\varepsilon_{\tilde{x}}(\varphi) = -1 \; \forall \tilde{x} \in U$.

(1) Wir bezeichnen mit $\varepsilon(\varphi)$ den Wert $\varepsilon_{\tilde{x}}(\varphi)$.

② Wir sagen (U,φ) positiv orientiert (bzw. negativ orientiert) ist

wenn $\varepsilon(\varphi) = 1$ (bzw. $\varepsilon(\varphi) = -1$)

Satz 15.4.9 Sei $(M, [\omega]) \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte Umgk ($n = \dim M$) vorgesehen mit der induzierten Riemannsche Metrik g. Definiere die n-Form ω_M durch

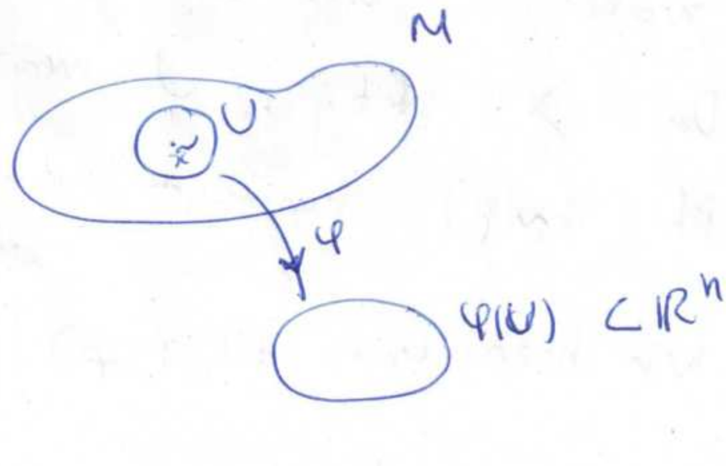
$$\omega_M(x) := dv_M(x) := \omega_{T_xM} \quad \forall x \in M$$

wobei ω_{T_xM} das Volumenelement des orientierten Skalarproduktraumes $(T_xM, [\omega(x)], g_x)$ ist.

Dann ist ω_M glatt, heißt die Volumenform der $(M, [\omega])$, und es gilt $\omega_M \sim \omega$.

Beweis: Sei $(U, \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n))$ eine Karte von M, so dass U wegzusammenhängend ist

z.B. wähle U mit $\varphi(U)$ = eine Kugel in $\mathbb{R}^n$.



Satz 15.2.6 besagt dass

$$\omega_{T_{\tilde{x}}M} = \varepsilon_{\tilde{x}}(\varphi)\sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(\tilde{x})\right)} \cdot d\varphi_1(\tilde{x}) \wedge \dots \wedge d\varphi_n(\tilde{x})$$

(man wendet Satz 15.2.6 auf

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{x}), \dots, v_n = \frac{\partial}{\partial x_n}(\tilde{x})$$

an, und beachte $d\varphi_1(\tilde{x}) = v_1^*, \dots, d\varphi_n(\tilde{x}) = v_n^*$)

Daraus folgt

$$\omega_M(\tilde{x}) = \varepsilon(\varphi)\sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(\tilde{x})\right)}\, d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$$

welche glatt ist, da die Komponentenfunktion von φ und $\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{x})$ glatt sind. ∎

<u>Satz 15.4.10</u> Sei $(M, [\omega])$ orientierte Umgk ω_M die Volumenform. Sei $D \subset M$ glatt berandete Teilmenge. Wir versehen ∂D mit der Randorientierung. Dann gilt

$$\omega_{\partial D} = i^*(\nu \lrcorner\, \omega_M)$$

wobei ν der Einheitsnormalenfeld von ∂D ist, $i : \partial D \to M$ Inklusionsabbildung ist.

<u>Beweis</u> Beachte

$$\omega_{T_x \partial D} = \tilde{i}^* (v(x) \lrcorner \, \omega_{T_x M})$$

wobei $\tilde{i} : T_x \partial D \longrightarrow T_x M$ Inklusionsabbildung.

Es gilt $\tilde{i}$ = das Differential von der Abbildung i.

Daher folgt die Aussage. ■

<u>Beispiel</u> 15.4.11 (1) $M = \mathbb{R}^2$, $D = \overline{B_1(0)}$

$$\partial D = S^1$$

$$v(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = (x,y) \quad \forall (x,y) \in \partial D$$

$$v \lrcorner \, \omega_{\mathbb{R}^2} = -y\, dx + x\, dy$$

$$i^* (v \lrcorner \, \omega_{\mathbb{R}^2}) = i^* (-y\, dx + x\, dy)$$

$$\shortparallel$$

$$\omega_{S^1}$$

Sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi : (\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \to S^1$

$$\theta \mapsto e^{i\theta}$$

eine lokale Parametrisierung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega_{S^1} &= \varphi^* i^* (-y\, dx + x\, dy) \\ &= (i \circ \varphi)^* (-y\, dx + x\, dy) \end{aligned}$$

$$= \varphi^*(-y\,dx + x\,dy) = -\varphi_2\,d\varphi_1 + \varphi_1\,d\varphi_2$$
$$= -\sin\theta\,d\cos\theta + \cos\theta\,d\sin\theta$$
$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = d\theta.$$
$(\varphi = (\varphi_1, \varphi_2))$.

(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte Umgk. mit $\dim M = 1$.
$\varphi: I \to M$ eine positive orientierte ~~Karte~~ Parametrisierung (d.h. $(\varphi(I), \varphi^{-1})$ ist positiv orientiert)
wobei $I \subset \mathbb{R}$ offen. Wir haben

$$\frac{\partial}{\partial t}(x) = \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M, \quad x = \gamma(t)$$

Die Gramsche Determinante $G\left(\frac{\partial}{\partial t}(\gamma(t))\right)$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\gamma(t)), \frac{\partial}{\partial t}(\gamma(t)) \right\rangle = \|\gamma'(t)\|^2$$

Daraus folgt $\omega_M(\gamma(t)) = \|\gamma'(t)\|\,d\varphi$, wobei $\varphi := \psi^{-1}$.
und $\psi^*\omega_M(t) = \|\gamma'(t)\|\,dt$ (1-Form auf I)

<u>Bemerkung zum Satz 15.4.5</u>: Der Vektorfeld v ist nur auf ∂D definiert. Daher ist $v \rfloor \omega$ nur <u>auf ∂D</u> definiert. Deswegen kann man nicht sofort $i^*(v \rfloor \omega)$ betrachten. Um streng zu sein beachte man dass $i(\partial D) = \partial D$ und $\forall x \in \partial D$ ist

$$i^*(v \rfloor w)(x) := (Di)^*(v(x) \rfloor w(x))$$

wohl-definiert. Daher bekommt man $i^*(v \rfloor w)$ eine $(n-1)$-Form auf ∂D.

Zudem sei $\tilde{v}$ eine glatte Fortsetzung von v auf M (d.h. $\tilde{v}: M \to \mathbb{R}^N$ glatt und $\tilde{v}|_{\partial D} = v$)

Eine solche Fortsetzung existiert wegen der Zerlegung der Eins (Übungblatt 4, Aufgabe 4). Es gilt

$$i^*(v \rfloor w)(x) = i^*(\tilde{v} \rfloor w)(x) \quad \forall x \in \partial D$$

Der Punkt ist : die Form $\tilde{v} \rfloor w$ ist global auf M definiert.

<u>Bemerkung zum Satz 15.4.9</u>

Sei $(M, [\omega])$ wie im Satz 15.4.9
$(U, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$ eine Karte mit
U wegzusammenhängend.

Wir bezeichnen hier die Komponentenfunktionen von φ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (statt $x_1, \dots, x_n$) um Verwechslungen mit der Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$ auf $\mathbb{R}^n$ zu vermeiden.

Der Beweis des Satzes 15.4.9 zeigt

$$\omega_M(\tilde{x}) = \varepsilon(\varphi) \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(\tilde{x})\right)} \, d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$$

$\forall \tilde{x} \in U$.

Beachte auch

für $\psi := \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow M$ gilt

$$\psi^* \omega_M = \varepsilon(\varphi) \sqrt{G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \circ \psi} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

denn $\psi^* d\varphi_j = d(\varphi_j \circ \psi) = dx_j$.

$\varphi_j \circ \psi(x) = x_j$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

<u>Beispiel</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Hyperfläche.

Wir berechnen ω_M. Sei $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to M$

eine positive orientierte Parametrisierung.

(d.h. (U, φ) positiv orientiert, wobei $U = \psi(V)$, $\varphi = \psi^{-1}$)

Sei $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$.

Erinnere

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(\varphi(x)) \qquad \forall\, x \in U$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(\varphi(x))$$

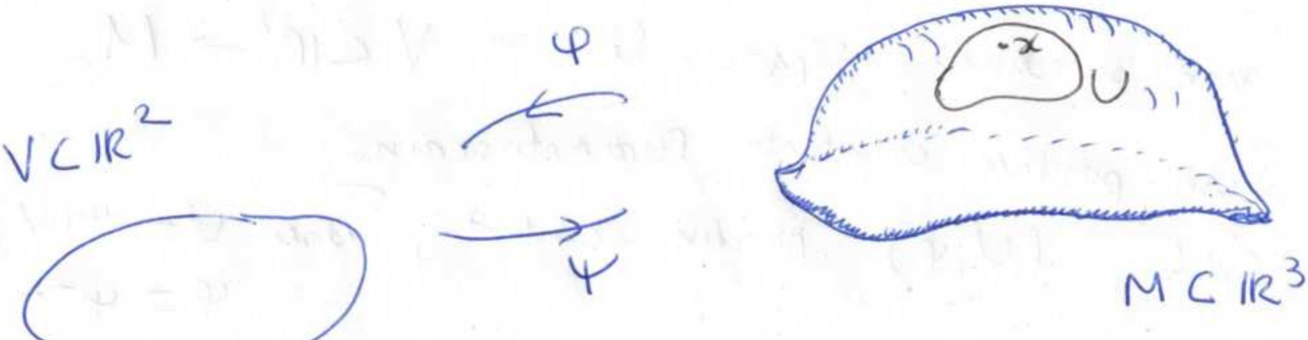
$$G\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(x), \frac{\partial}{\partial u_2}(x)\right) = \det \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial}{\partial u_1}(x), \frac{\partial}{\partial u_1}(x) \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial u_1}(x), \frac{\partial}{\partial u_2}(x) \rangle \\ \langle \frac{\partial}{\partial u_2}(x), \frac{\partial}{\partial u_1}(x) \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial u_2}(x), \frac{\partial}{\partial u_2}(x) \rangle \end{bmatrix}$$

$$= (E F - G^2) \circ \varphi(x)$$

wobei $E := \langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \rangle$, $F := \langle \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \rangle$

$G := \langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \rangle$

Es folgt
$$\omega_M = \sqrt{(EF-G^2)\circ\varphi}\, d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$
$(\varphi = (\varphi_1, \varphi_2))$ und
$$\psi^* \omega_M = \sqrt{EF-G^2}\; du_1 \wedge du_2 \quad \text{(2-Form auf } V\text{)}.$$



$u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$

ω_M 2-Form auf M.

$\psi^* \omega_M \in \Omega^2(V)$

<u>Bemerkung</u>: Sei $(M, [\omega])$ eine n-dim orientierte Umgk. (U, φ) eine Karte, U wegzusammenhängend. $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\tilde{x} \in U$. Für $x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, schreibe $x = (x_1, \dots, x_n)$. Beachte
$$(\varphi^{-1})^*(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \omega_{\mathbb{R}^n}$$
auf $\varphi(U)$. Es folgt

(U, φ) ist positive orientiert $\Leftrightarrow$ $(\varphi^{-1})^* \omega = \lambda(x)\, \omega_{\mathbb{R}^n}$ für eine glatte Funktion $\lambda : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(x) > 0$ $\forall x \in \varphi(U)$.

§ 15.5. Kurvenintegrale von 1-Formen

Definition 15.5.1 Seien $-\infty < a < b < \infty$,

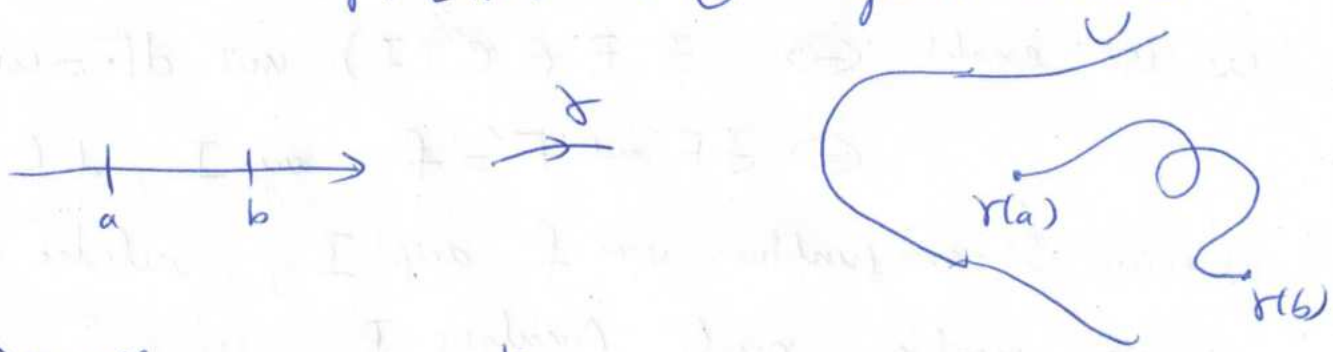
(1) $\omega \in \Omega^1([a,b])$, $\omega = f(t)\,dt$

(die Menge aller glatten 1-Formen $\omega = f(t)dt$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$).

Setze
$$\int_a^b \omega := \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{Riemannsche Integral von } f \text{ über } [a,b]}$$

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^1(U)$

$\gamma : [a,b] \to U$ glatte Kurve



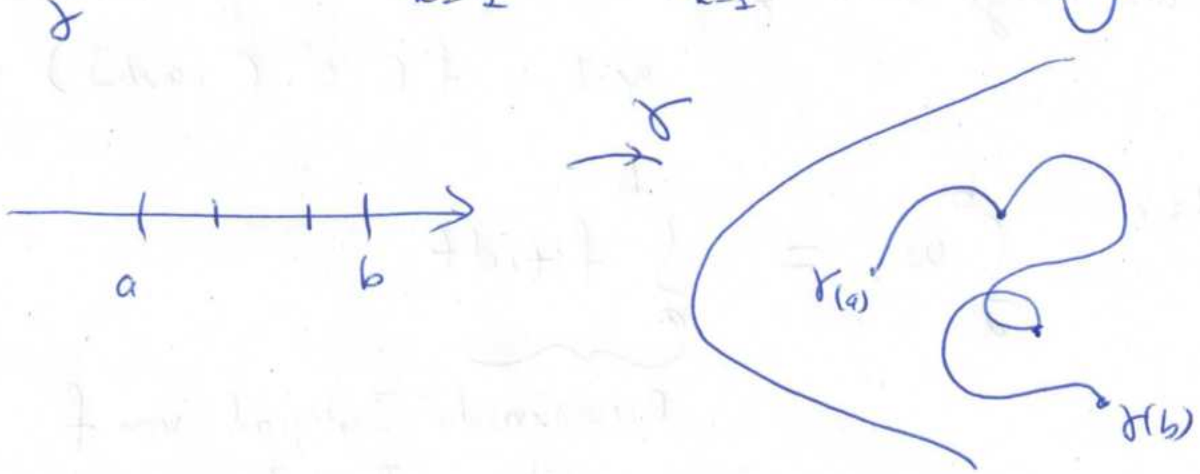
Definiere
$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \underbrace{\gamma^* \omega}_{\text{1-Form auf } [a,b]}$$

Ist $\gamma : [a,b] \to U$ stückweise glatt, d.h. $\exists$ Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ sodass

$\gamma|_{[t_k, t_{k-1}]}$ glatt ist $\forall\ 1 \leq k \leq m$,

dann setzen wir

$$\int_\gamma \omega := \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma^* \omega$$



Bemerkung:

(1) Sei $\omega = f(t)\,dt \in \Omega^1(I)$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall

ω ist exakt $\Leftrightarrow$ $\exists\ F \in C^\infty(I)$ mit $dF = \omega$

$\Leftrightarrow \exists F$ mit $F' = f$ auf I, d.h. $\exists$

eine Stammfunktion von f auf I, welche

immer wahr, nach Analysis I, ist.

Daher ist ω exakt.

(2) Sei $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, dx_j \in \Omega^1(U)$

Es gilt $\gamma^* \omega = \sum_{j=1}^{n} (\omega_j \circ \gamma)\, d\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} (\omega_j \circ \gamma)\, \gamma_j'(t)\,dt$

wobei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

Daher gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n (\omega_j \circ \gamma)(t)\, \gamma_j'(t) \right) dt$$

<u>Satz 15.5.2</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen
$\omega \in \Omega^1(U)$ exakt
und F eine Stammfunktion von ω. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stückweise glatt Kurve. Dann gilt

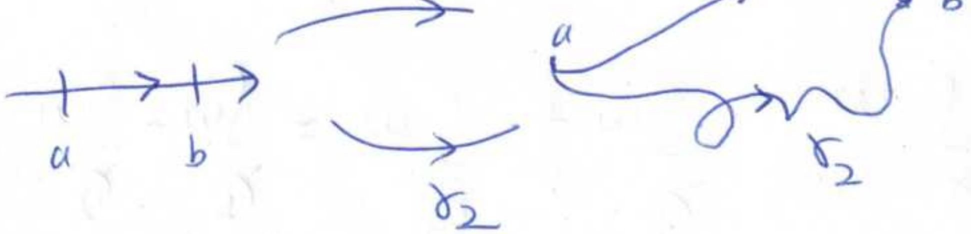
(i) $$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

(ii) Ist γ geschlossen, d.h. $\gamma(b) = \gamma(a)$, so gilt

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

(iii) Sind γ_1, γ_2 zwei (stückweise glatt) Kurven

$\gamma_1 : [a,b] \to U$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$
$\gamma_2 : [a,b] \to U$ $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$,



So gilt $$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \text{(Wegunabhängigkeit)}$$

Beweis: (i) Es genügt glatte Kurve zu betrachten.

Es gilt $\omega = dF$

$$\gamma^* \omega = \gamma^* dF = d(F \circ \gamma)$$

Es folgt

$$\int_a^b \gamma^* \omega = \int_a^b d(F \circ \gamma)$$

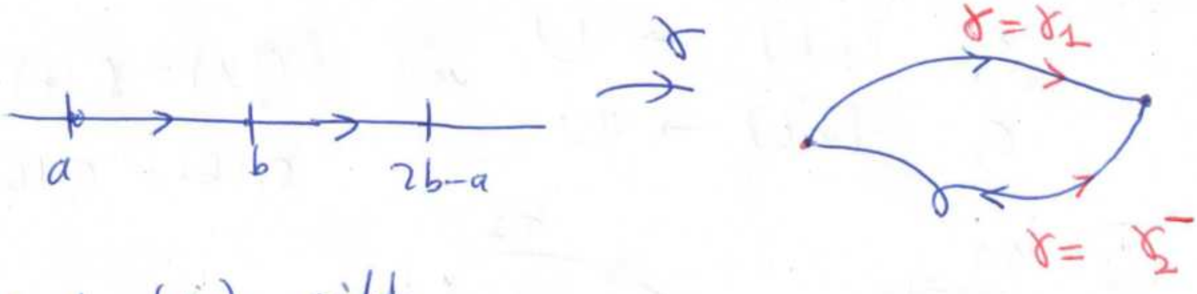
$$= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

(ii) ist klar. Wir zeigen (iii).

Definiere $\gamma : [a, 2b-a] \longrightarrow U$

$$t \longmapsto \gamma_1(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$t \longmapsto \gamma_2(2b-t) \; \forall t \in [b, 2b-a]$$



Nach (ii) gilt

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

wobei $\tilde{\gamma}_2 : [b, 2b-a] \to U$

$$t \longmapsto \gamma_2(2b-t)$$

$\blacksquare$

Satz 15.5.3 Sei $\gamma : [a,b] \to U$

$\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ Diffeo.

$\omega \in \Omega^1(U)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \varepsilon(\varphi) \int_\gamma \omega$$

wobei $\varepsilon(\varphi) = \operatorname{sgn} \varphi'$.

Beweis:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\alpha^\beta (\gamma\circ\varphi)^* \omega = \int_\alpha^\beta \varphi^* \circ \gamma^* \omega$$

$$= \int_\alpha^\beta \varphi^* (f(s) ds)$$

(wobei $\gamma^*\omega = f(s) ds$)

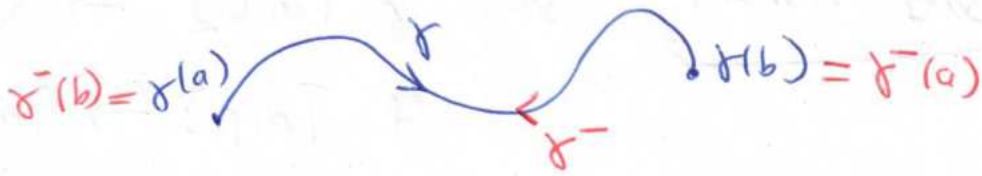
$$= \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\, \varphi'(t)\, dt$$

$$= \varepsilon(\varphi) \int_a^b f(s)\, ds$$

(Substitutionsregel für Integrale einer Variable)

$$= \varepsilon(\varphi) \int_\gamma \omega . \qquad \blacksquare$$

Die Kurve $\gamma\circ\varphi$ heißt Umparametrisierung von γ.
Insbesondere wenn $\varphi(t) = b+a-t$, $t \in [a,b]$, heißt $\gamma\circ\varphi$ die Umorientierte Kurve von γ.



wir setzen
$$\gamma^-(t) := \gamma(b+a-t), \quad t \in [a,b]$$

<u>Folgerung 15.5.4</u> Sei $\gamma : [a,b] \to U$, $\gamma^- : [a,b] \to U$ die umorientierte Kurve von γ, $\omega \in \Omega^1(U)$.

Dann gilt
$$\int_{\gamma^-} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

<u>Beweis</u> Setze $\varphi : [a,b] \to [a,b]$
$$t \mapsto b+a-t$$
$$\varphi'(t) = -1 \ \forall t, \quad \operatorname{sgn} \varphi' = -1. \qquad \blacksquare$$

<u>Satz 15.5.5</u> Sei U wegzusammenhängende offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^1(U)$. Dann gilt

ω ist exakt $\Longleftrightarrow$ das Kurvenintegral von ω in U ist wegunabhängig.

Ist das der Fall, ist eine Stammfkt gegeben durch
$$F(x) = \int_{\gamma_x} \omega, \quad \gamma_x : [0,1] \to U \text{ beliebig mit } \gamma_x(0) = x_0,\ \gamma_x(1) = x$$

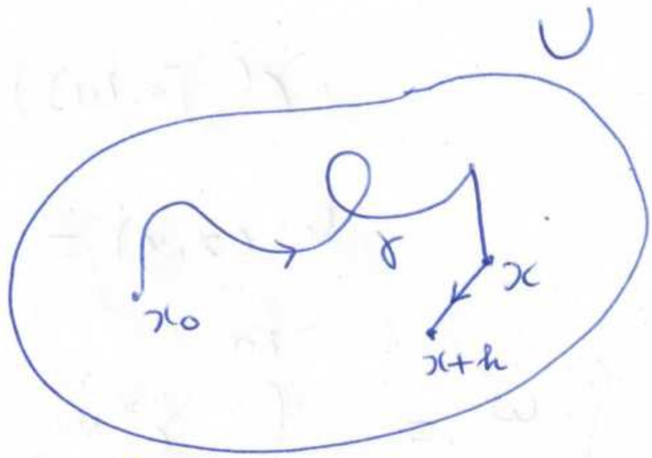
Beweis "$\Rightarrow$" ist schon bewiesen.

Sei $x_0 \in U$ fest. Da U wegzusammenhängend ist,

$\forall x \in U \; \exists \gamma_x : [0,1] \to U$ stückweise glatte Kurve

mit $\gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x$. Setze

$$F(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$



Nach Voraussetzung ist F wohl-definiert.

Wir zeigen $dF = \omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, dx_j$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \omega_j(x).$$

Sei $h \in \mathbb{R}^n$ klein, so dass die Strecke $[x, x+h] \subset U$

Sei γ_{x+h} die Kurve, die x_0 mit x_0+h durch γ und $[x, x+h]$ verbindet. Es gilt

$$F(x+h) = \int_{\gamma_{x+h}} \omega = \int_{\gamma_x} \omega + \int_{[x,x+h]} \omega$$

$$= F(x) + \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x+th) \cdot h_j \cdot dt$$

$$\left(\alpha : [0,1] \to U, \; t \mapsto x + th \quad , \quad \alpha^* \omega(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x+th) \, h_j \cdot dt \right)$$

wähle $h = \lambda e_j$, $\lambda \in \mathbb{R}$, erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \omega_j(x) \qquad \blacksquare$$

<u>Beispiel</u>:

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$\theta \mapsto e^{i\theta}$$

$$\gamma([0, 2\pi)) = S^1$$

$$\omega(x,y) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \gamma^*\omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0.$$

(siehe Beispiel 15.4.11)

Daher ist ω nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

§ 16. Maß - und Integrationstheorie

Motivation: wir setzen die Diskussion am Anfang des § 14.D fort.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $F \in \mathcal{C}^\infty(I)$

$[a,b] \subset I$

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung besagt

$$\int_{[a,b]} dF = F(b) - F(a) =: \int_{\partial[a,b]} F$$

wir wollen den Satz auf höheren Dimensionen verallgemeinern. Es fehlt eine Integrationstheorie für mehreren Variablen.

Eine andere Motivation ist: das Riemannsche Integral gibt uns nicht ausreichend gute Konvergenzeigenschaft: wenn f_n gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert, so gilt

$$\int_a^b f_n(t)dt \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

(Satz 7.4). In der Praxis ist die Bedingung von gleichmäßiger Konvergenz nicht einfach zu überprüfen, manchmal sogar nicht erfüllt.

wir entwickeln in diesem Kapitel die Lebesgue-Integrations-Theorie, die das Riemansche Integral verallgemeinert und viel bessere Konvergenzeigenschaften erfüllt.

§ 16.1. σ-Algebren und Maße

Sei X eine nicht-leere Menge, $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

Definition 16.1.1

- Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Algebra wenn
  (i) $X \in \mathcal{A}$
  (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
  (iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra wenn

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in $\mathcal{A}$

$$\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}.$$

- Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ von $\begin{cases} X \neq \emptyset \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \text{ } \sigma\text{-Algebra} \end{cases}$

heißt <u>messbarer Raum</u>. Eine Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ heißt $(\mathcal{A})$-<u>messbare Menge</u>.

<u>Lemma 16.1.2</u> Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Algebra.

Dann gilt

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B \in \mathcal{A}$

(iii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A} \\ A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A} \end{matrix}$

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so gilt zusätzlich:

(iii)' $(A_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

<u>Beweis</u> $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$

$X\setminus(A\cap B) = (X\setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{A}$

Daraus folgt $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(iii) und (iiii)? sind ähnlich bewiesen. ∎

Beispiel 16.1.3

(i) $\{X, \emptyset\}$, $\mathcal{P}(X)$ sind σ-Algebren.

(ii) $X = \mathbb{R}$
$$\mathcal{A} = \{ A = I_1 \cup \dots \cup I_k : I_1, \dots, I_k \text{ Intervalle} \}$$
ist Algebra aber nicht σ-Algebra da
$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (j, j+1) \notin \mathcal{A}.$$

(iii) $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt Quader wenn $\exists\, I_1, \dots, I_n$ Intervalle in $\mathbb{R}$ mit
$$Q = I_1 \times \dots \times I_n$$
(In dieser Definition sind alle Arten von Intervallen zugelassen: leere, beschränkte, unbeschränkte offene, abgeschlossene, halboffene Intervalle)

Vereinbarung: $\emptyset \times A := \emptyset$.

Ein Quader heißt entartet wenn ein der

Intervalle Einpunktig oder leer ist.

Die Menge der Quadern in $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{Q}_n$ bezeichnet.

$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Figur</u> $:\Leftrightarrow \exists\, Q_1, \dots, Q_k$ Quadern mit $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$.

Die Menge der Figuren wird mit $\mathcal{R}_n$ bezeichnet.

$\mathcal{R}_n$ ist ein Algebra.

<u>Behauptung</u>: Jede Figur $A \in \mathcal{R}_n$ lässt sich als disjunkte Vereinigung von Quadern darstellen:

$\exists\, Q_1', \dots, Q_k'$ Quadern

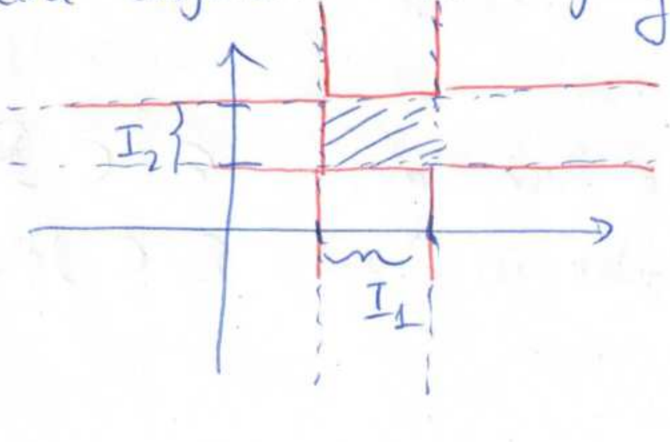
$$Q_i' \cap Q_j' = \emptyset \quad \forall\ i \neq j$$

und $$A = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j' = Q_1' \sqcup \dots \sqcup Q_k'$$

($\sqcup$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung)

<u>Beweis</u>: beachte $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader $\Rightarrow$

Q^c ist eine disjunkte Vereinigung von Quadern:



- P, Q Quadern $\Rightarrow$ $P^c = \biguplus_{k=1}^{m} P_k$

$$Q^c = \biguplus_{l=1}^{m'} Q_l$$

Es folgt

$$P \cup Q = \underbrace{(P \cap Q)}_{\text{Quader}} \uplus (P^c \cap Q) \uplus (Q^c \cap P)$$

$$P^c \cap Q = \biguplus_k \underbrace{(P_k \cap Q)}_{\text{Quader}}$$

■

(iv) $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, $i \in I$

$\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ist σ-Algebra.

<u>Definition 16.1.4</u> (i) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht-leer. Dann ist

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ σ-Algebra}, \ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}} \mathcal{A}$$

ein σ-Algebra, genannt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

(Man beachte hier dass $\mathcal{P}(X)$ ein σ-Algebra ist, und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$)

(ii) Sei X ein metrischer Raum.

$\mathcal{O}(X) =$ die Menge aller offenen Teilmengen von X.

Setze $\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X))$

$\mathcal{B}(X)$ heißt <u>Borelsche σ-Algebra</u> von X

$A \in \mathcal{B}(X)$ heißt Borelmenge.

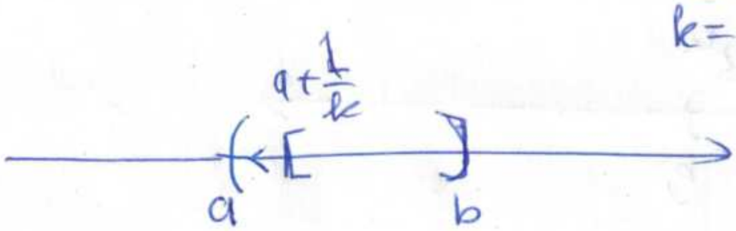
<u>Beispiel</u>: (i) offene Menge, abgeschlossene sowie ihre abzählbare Vereinigung / Durchschnitt sind Borelmenge.

(ii) $X = \mathbb{R}$. Dann sind alle Intervalle Borelmenge.

$$I = [a,b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

wenn $I = (a,b]$. Schreibe

$$I = \bigcup_{k=M}^{\infty} [a+\tfrac{1}{k}, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$



$\left(M > 0 \text{ groß so dass } a + \frac{1}{M} < b \right)$

Allgemeiner sind Quadern Borelmengen in $\mathbb{R}^n$.

Satz 16.1.5 Es gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n)$$
$$= \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)$$

wobei $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) := \{ K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ kompakt} \}$

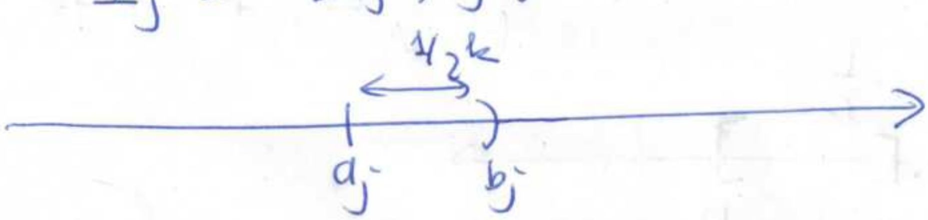
Beweis Zuerst gilt

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$$
$$\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Wir zeigen $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Zerlege $\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ wobei $|I_j| = \frac{1}{2^k}$

$$I_j = [a_j, b_j)$$



Dann gilt

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \bigsqcup \underbrace{I_{j_1} \times \dots \times I_{j_n}}$$
$$= \bigsqcup Q_\ell$$

wobei Q_ℓ halb-offenen Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$

Sei $\mathcal{W}(k)$ die Menge aller dieser Würfel.

Sei $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ und

$$A_k := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_A(k)} W$$

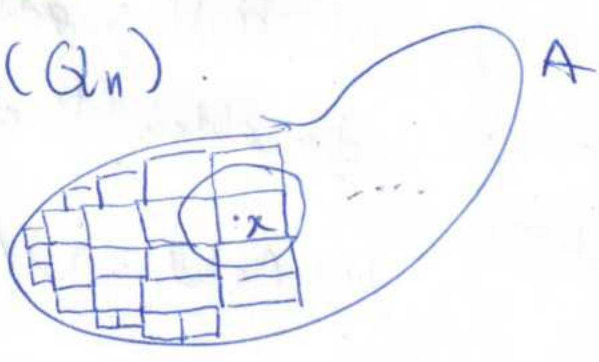
wobei $\mathcal{W}_A(k) := \{ W \in \mathcal{W}(k) : W \subset A \}$
(abzählbare Menge)

Beachte $A_k \subset A \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Daher

gilt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset A$; und $A_k \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n)$

Zudem für $x \in A$, $\exists\, r > 0$ mit $B_r(x) \subset A$
(A offen ist) $\Rightarrow \exists k \; \exists W \in \mathcal{W}(k)$
mit $W \subset B_r(x) \subset A$. Daraus folgt

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}_n).$$



$\blacksquare$

<u>Vereinbarung</u>: Rechnenregeln in $[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad \forall a \in [0,\infty]$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Aus $a_n \uparrow a$, $a_n \in [0,\infty]$

$b_n \uparrow b$, $b_n \in [0,\infty]$

folgt

$$\left.\begin{aligned} a_n \cdot b_n &\longrightarrow ab \\ a_n + b_n &\to a+b \end{aligned}\right. \quad \text{für } n \to \infty.$$

Diese Eigenschaft ist der Grund für die obige Vereinbarung.

<u>Definition 16.1.6</u> Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra.
Ein <u>Inhalt</u> auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung
$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ so dass

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) μ ist endlich additiv, d.h. für alle paarweise disjunkten Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$

μ heißt <u>σ-Inhalt</u> oder <u>Prämaß</u> wenn

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) μ ist σ-additiv, d.h. $\forall (A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen in $\mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

- Ein Triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aus einer nicht-leeren Menge X, einer Algebra $\mathcal{A}$ und einem Prämaß μ auf $\mathcal{A}$, heißt Prämaßraum.
- Ein Prämaß auf einer σ-Algebra heißt Maß.
- Ein Prämaßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.
- Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine meßbare Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt Nullmenge.

Bemerkung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty \quad \text{wenn}$$

entweder $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_n) = \infty$

oder $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mu(A_n) < \infty$ und die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ divergent ist.

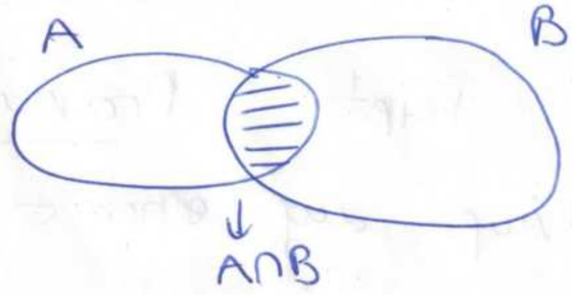
<u>Satz 16.1.7</u> (Eigenschaften von Inhalten)

Sei $\mathcal{A}$ ein Algebra und $\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ Inhalt.

Dann gilt

(i) $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A}:\ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$



(iii) $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$:
$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \le \mu(A_1) + \dots + \mu(A_k)$$

<u>Beweis</u>

<u>zu (i)</u> $\quad B = A \sqcup (B \setminus A)$

Es folgt $\quad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

<u>zu (ii)</u>
$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A) = A \sqcup (B \setminus A)$$

Es folgt
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

da $B = (B \setminus A) \sqcup (B \cap A)$.

zu (iii) Nach (ii) gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Induktiv bekommt man

$$\mu(A_1 \cup .. \cup A_k) = \mu((A_1 \cup .. \cup A_{k-1}) \cup A_k)$$

$$\leq \mu(A_1 \cup .. \cup A_{k-1}) + \mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j).$$

■

Satz 16.1.8 (Eigenschaften von Prämaße)

Sei $\mathcal{A}$ ein Algebra und $\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ Prämaß.

Dann gilt

(i) $$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$\forall (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ (σ-Subadditivität)

(ii) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_j \subset A_{j+1} \subset \cdots$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

(Stetigkeit von unten)

(iii) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \cdots$

und $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$

(Stetigkeit von oben)

Beweis <u>zu (i)</u> Setze $B_1 := A_1$

$$B_2 := A_2 \setminus A_1$$

$$\ldots, B_k := A_k \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}), \ldots$$

Es folgt
$$\left.\begin{array}{l} B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j \\ \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \end{array}\right.$$

Nach der Definition von Inhalt gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

<u>zu (ii)</u> Seien $B_1, B_2, \ldots$ wie vorher.

Es gilt
$$\mu(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Daraus folgt
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)}_{=\mu(A_n)} = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$$

<u>zu (iii)</u> Setze $B_j := A_1 \setminus A_j$.

Beachte $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ (aufsteigende Folge)

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j) = A_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big)$$

Nach (ii) gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(B_n)}_{\mu(A_1)-\mu(A_n)}$$

$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad (*)$$

(da $\mu(A_1) < \infty$, gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ existiert und die obere Gleichung ist wahr)

Zudem erhält man

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\Big)$$

$$= \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \quad (**)$$

Setzen $(*)$, $(**)$ zusammen erhalten wir (iii). ∎

<u>Folgerung 16.1.9</u> Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Nullmengen. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ auch eine Nullmenge.

<u>Beweis</u> Nach Satz 16.1.8 (i) gilt

$$0 \leq \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$ ∎

<u>Definition 16.1.10</u> Sei μ ein Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A}$ über X.

μ heißt <u>endlich</u> falls $\mu(X) < \infty$.

<u>σ-endlich</u> falls $\exists$ eine Folge von Mengen

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$ mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

und $\mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge selbst meßbar ist: d.h. $\forall A \subset \mathcal{A}$ eine Nullmenge, $\forall B \subset A$ gilt: $B \in \mathcal{A}$.
(daher $\mu(B) = 0$, weil $0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = 0$)

Beispiel 16.1.11

(i) Sei X beliebige Menge

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$$

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$$

$A \mapsto |A|$ (Anzahl der Elemente von A)

falls A endlich ist,

$A \mapsto \infty$ falls A unendlich ist.

Dann ist μ ein Maß, welches vollständig ist.
Es ist endlich wenn X endlich ist
σ-endlich wenn X abzählbar ist.

(ii) Das Dirac-Maß: Sei $a \in X$

$$\delta_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$$

$A \mapsto 1$ falls $a \in A$

$A \mapsto 0$ sonst

(iii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

Die Länge von I ist definiert durch

$$\lambda_1(I) := \sup I - \inf I \in [0,\infty]$$

z.B. $I = (a,b]$, $\sup I = b$, $\inf I = a$

$$\lambda_1(I) = b-a.$$

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader: $Q = I_1 \times \dots \times I_n$

Wir definieren sein elementar-geometrisches Volumen durch

$$\lambda_n(Q) := \lambda_1(I_1) \times \dots \times \lambda_1(I_n) \in [0,\infty]$$

z.B. $Q = [0,1]^n \Rightarrow \lambda_n(Q) = 1$

$Q = [0,\infty) \times [0,1]^{n-1} \to \lambda_n(Q) = \infty \cdot 1^{n-1} = \infty.$

Ist $R \in \mathcal{R}_n$ ein Figur, so gibt es eine Zerlegung $R = Q_1 \sqcup Q_2 \sqcup \dots \sqcup Q_m$ in Quader.

Definiere

$$\lambda_n(R) := \lambda_n(Q_1) + \lambda_n(Q_2) + \dots + \lambda_n(Q_m),$$

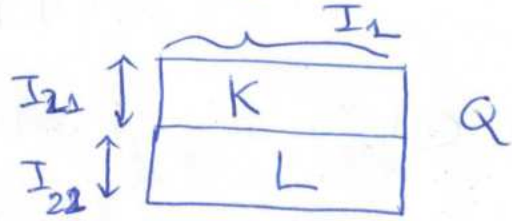
genannt das elementar-geometrische Volumen von R.

Satz 16.1.12 Die Abbildung $\lambda_n : \mathcal{R}_n \to [0,\infty]$ ist wohl-definiert und ist ein σ-endliche Prämaß, genannt Lebesguesche Prämaß auf $\mathcal{R}_n$.

<u>Beweis</u> wir besprechen nur Hauptideen im Fall <u>$n=2$</u>. Diese Ideen funktionieren auch für beliebige Dimension n aber die genaue Argumente werden komplizierter aufzuschreiben.

<u>Schritt 1</u> Sei $Q, K, L \subset \mathcal{Q}_2$ mit $Q = K \sqcup L$

z. B.



$Q = I_1 \times I_2$

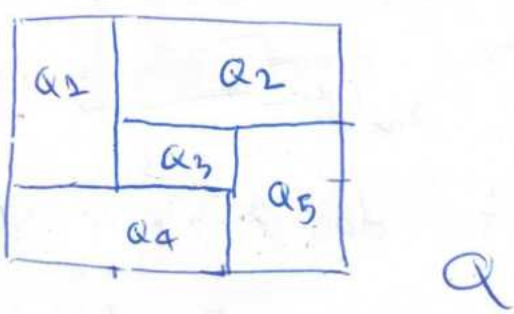
$K = I_1 \times I_{21}$, $L = I_1 \times I_{22}$, $I_1 = I_{11} \sqcup I_{22}$

$$\begin{aligned} \lambda_2(Q) &= \lambda_1(I_1) \times \lambda_1(I_2) \\ &= \lambda_1(I_1)\, \lambda_1(I_{21}) + \lambda_1(I_1)\, \lambda_1(I_{22}) \\ &= \lambda_2(K) + \lambda_2(L) \end{aligned}$$

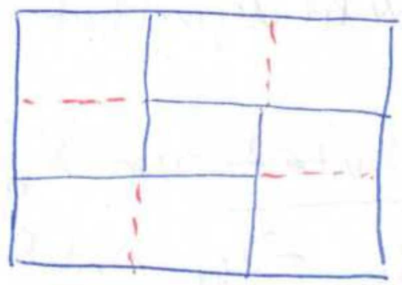
<u>Schritt 2</u> Allgemeinerer wenn $Q, Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}_2$ mit $Q = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_m$. Wir müssen zeigen

$$\lambda_2(Q) = \lambda_2(Q_1) + \dots + \lambda_2(Q_m).$$

z. B.



Die Argumente im Schritt 1 funktionieren nicht da keine zwei Quadern $Q_1, \dots, Q_5$ einen größeren Quader bilden. Um das zu lösen teilen wir $Q_1, \dots, Q_5$ auf kleinere Quadern wie folgt:



Nach Schritt 1 ist $\lambda_2(Q_j)$ die Summe der Volumen von kleinen Quadern, die im Q_j enthalten sind, und analog für $\lambda_2(Q)$.

Deswegen gilt $\lambda_2(Q) = \sum_{j=1}^{5} \lambda_2(Q_j)$.

<u>Schritt 3</u> Im Allgemeinen Sei $R \in \mathcal{R}_n$

$$R = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_m$$
$$= L_1 \sqcup \dots \sqcup L_{m'}$$

Zerlegung auf disjunkte Quadern. Wir müssen zeigen

$$\lambda_2(Q_1) + \dots + \lambda_2(Q_m) = \lambda_2(L_1) + \dots + \lambda_2(L_{m'})$$

Aus Schritt 2 folgt

$$\lambda_2(Q_j) = \sum_{s=1}^{m'} \lambda_2(Q_j \cap L_s) \quad \forall j$$

daher gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_2(Q_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m'} \lambda_2(Q_j \cap L_s)$$
$$= \sum_{s=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m} \lambda_2(Q_j \cap L_s)$$
$$= \sum_{s=1}^{m'} \lambda_2(L_s)$$

Das zeigt die Wohldefiniertheit von λ_2.

Schritt 4 Additivität von λ_n. Argumente im Schritt 3

zeigen: $\forall \begin{cases} R, S \in \mathcal{R}_n \\ R \cap S = \emptyset \end{cases}$ gilt $\lambda_n(R) + \lambda_n(S) = \lambda_n(R \cup S)$

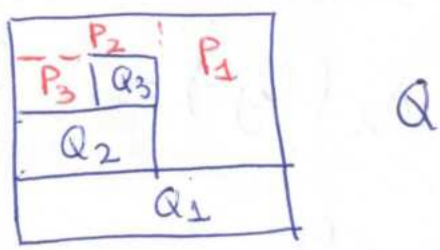
Schritt 5 σ-Additivität von λ_n

Es genügt zu zeigen: $\forall Q, Q_1, \dots, Q_k, \dots \in \mathcal{Q}_n$ Quadern mit $Q_i \cap Q_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ und $Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, gilt

$$\lambda_n(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)$$
$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_n(Q_j)$$

Beachte $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \ P_1, \dots, P_{m_k}$ paarweis disjunkte Quadern mit

$$Q = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_k \sqcup P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m_k}$$



Es folgt

$$\lambda_n(Q) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_n(Q_j) + \lambda_n(P_1) + \dots + \lambda_n(P_{m_k})$$
$$\geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_n(Q_j) \qquad \forall k$$

Wir erhalten $\lambda_n(Q) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)$.

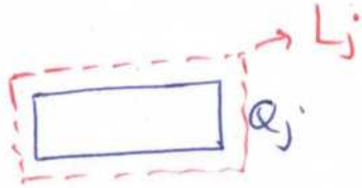
wir zeigen $\lambda_n(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $L_j \in \mathcal{Q}_n$ offene Quader mit

$$\overline{Q_j} \subset L_j \quad \text{und} \quad \lambda_n(L_j) \leq \lambda_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \forall j$$

Es gilt

$$Q \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L_j$$

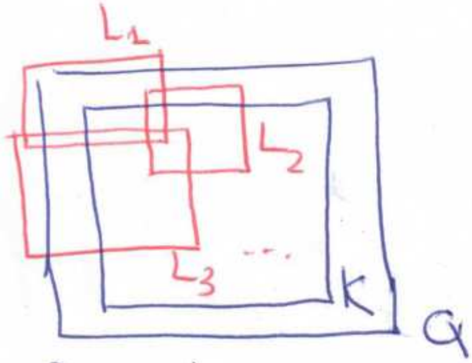


Sei $K \subset Q$ ein Quader, welcher kompakt ist so dass $\lambda_n(K) \geq \lambda_n(Q) - \varepsilon$.

Es folgt $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L_j$

Nach Kompaktheit von K gilt: $\exists\, j_1, \dots, j_m$ mit $K \subset L_{j_1} \cup \dots \cup L_{j_m}$

(Überdeckungseigenschaft: Bemerkung 8.4.5)



Daraus folgt

$$\lambda_n(K) \leq \lambda_n(L_{j_1}) + \dots + \lambda_n(L_{j_m})$$

$$\leq \lambda_n(Q_{j_1}) + \dots + \lambda_n(Q_{j_m}) + \varepsilon$$

Das liefert

$$\lambda_n(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

Zum Schluss erhält man $\lambda_n(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)$.

Schritt 6: λ_n ist σ-endlich da

$$\lambda_n(Q_k) = (2k)^n < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

wobei $Q_k := [-k, k]^n$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k .$$

$\blacksquare$

§ 16.2. Konstruktion von Maßräume

Wir beschreiben nun ein Verfahren, mit dem man Maßräume konstruieren kann.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Prämaßraum.

<u>Ziel</u>: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zu einem Maßraum $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ zu erweitern: d.h. eine σ-Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$, ein Maß $\tilde{\mu}$ zu finden so dass

$$\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}} \text{ und } \tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu.$$

<u>Definition 16.2.1</u> Eine Abbildung $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt äußeres Maß auf X, wenn

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall\ A \subset B \subset X$, gilt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) μ^* ist σ-subadditiv, d.h. $\forall\ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

Beachte: jedes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist ein äußeres Maß, aber es gibt äußere Maße, die nicht Maße sind.

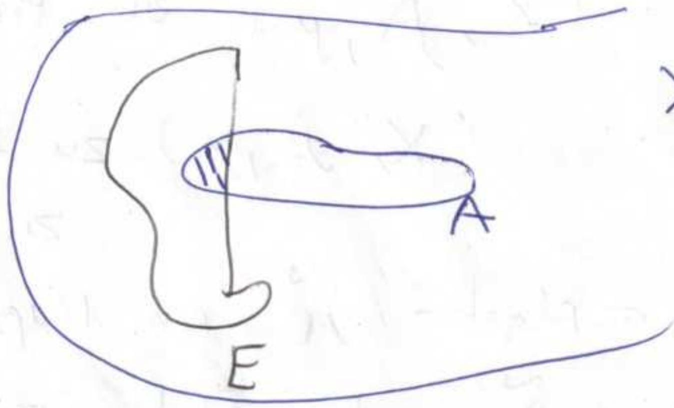
z.B. $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\emptyset \longmapsto 0$$
$$A \longmapsto 1 \text{ wenn } A \neq \emptyset.$$

ist äußeres Maß aber kein Maß. (wenn X mindestens 2 verschiedene Elemente hat)

Definition 16.2.2 (Carathéodory) Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt μ^*-meßbar, falls $\forall\ E \subset X$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A))$$



Beachte: es gilt stets

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A)) \qquad (*)$$

da $\quad E = (E \cap A) \sqcup (E \setminus (X \setminus A))$

Daher ist eine μ^*-meßbare Menge . eine "gute" Teilmenge A von X so dass $\forall$ Teilmenge von E gilt die Gleichheit in der Ungleichung $(*)$.

Wir bezeichnen die Menge aller μ^*-meßbaren Teilmengen von X mit $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

Satz 16.2.3 (Carathéodory)

Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$ ein vollständiger Maßraum, d.h. $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ist eine σ-Algebra und

$\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}} : \mathcal{A}_{\mu^*} \to [0,\infty]$ ist ein Maß.

und $\forall\ A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(A) = 0$ gilt:

$\forall B \subset A$ ist auch ein Element in $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

Der Beweis ist sehr technisch und wird nicht besprochen.

Die Bedeutung vom Satz 16.2.3 ist: in der Praxis stellt man sehr einfach äußere Maße her, Satz 16.2.3 erlaubt uns dann ... Maße aus äußeren Maßen zu konstruieren.

<u>Satz 16.2.4</u> Sei $\mu: \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{R}$ über X. Definiere $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\ A_k \in \mathcal{R}\ \forall k \end{array} \right\}$$

Dann gilt

(i) μ^* ist ein äußeres Maß; μ^* heißt <u>das von μ erzeugte äußere Maß</u>

(ii) $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iii) Ist μ ein Prämaß, so gilt

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{R}}.$$

Beachte, $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$

da $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{R}$ enthält. Es folgt

$$(X, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}) \text{ ist eine}$$

Fortsetzung von $(X, \mathcal{R}, \mu)$.

<u>Beweis</u> <u>zu (i)</u> $\mu^*(\emptyset) = 0$ da $\mu(\emptyset) = 0$

Sei $A, B \in \mathcal{P}(X)$ sei $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ beliebig

mit $B \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j \Rightarrow A \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j$.

Es folgt $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j)$

daher gilt $\mu^*(A) \leq \inf_{(B_j)_j} \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) = \mu^*(B)$

Die σ-Subadditivität ist ähnlich bewiesen:

Sei $\varepsilon > 0$, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$

$(B_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\begin{cases} A_k \subset \bigcup_j B_{kj} \\ \mu^*(A_k) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu(B_{kj}) - \frac{\varepsilon}{2^k} \end{cases}$

Es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_{kj})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon$$

$\forall \varepsilon$. Daher folgt die σ-subadditivität von μ^*.

(wir haben in der obigen Ungleichungen den Umordnungssatz benutzt: Ist $\sum_{n \geq 1} a_n$ absolut konvergent, dann ist jede Umordnung $\sum_{n \geq 1} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent und gilt

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} a_{\tau(n)} \quad)$$

<u>zu (ii)</u> Sei $A \subset \mathcal{R}$. wir zeigen $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, d.h. $\forall E \subset X$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A))$$

Es genügt, die Ungleichung

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A)) \quad (*)$$

zu zeigen. Sei $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit

$$E \subset \bigcup_j E_j \ , \quad \mu^*(E) \geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\right) - \varepsilon$$

Da $E_j \in \mathcal{R}$, μ ein Inhalt ist, gilt

$$\mu(E_j) = \mu(E_j \cap A) + \mu(E_j \cap A^c)$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A)\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A^c)$$

$$\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Wir erhalten ~~da~~ also

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ (**) folgt.

<u>Zu (iii)</u> Sei $A \in \mathcal{R}$, $\varepsilon > 0$. $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

mit $\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \varepsilon$.

Beachte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap A)$$

$$\geq \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A)\right)$$

$$= \mu(A)$$

(Satz 16.1.8 (ii))

Es folgt $\quad \mu^*(A) \geq \mu(A) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Daher gilt $\quad \mu^*(A) \geq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{R}$.

Andererseits da $A \subset A$ gilt

$\mu^*(A) \leq \mu(A)$

Man erhält $\quad \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{R}$. ∎

Wir vergleichen nun

$$(X, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})})$$

mit $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$

Definition 16.2.5 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}^\circ := \{ N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0 \}$.

Definiere
$$\mathcal{A}^\mu := \{ E \subset X : E = A \cup N \text{ wobei } A \in \mathcal{A},\ N \subset N_0 \in \mathcal{A}^\circ \}$$

$$\bar{\mu} : \mathcal{A}^\mu \to [0, \infty]$$
$$E \mapsto \bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$

Die Abbildung $\bar{\mu}$ ist wohl-definiert und ist ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}^\mu$.
Der Raum $(X, \mathcal{A}^\mu, \bar{\mu})$ heißt Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$

Satz 16.2.6 (i) $(X, \mathcal{A}^\mu, \bar{\mu})$ ist vollständig.
(ii) ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig, so ist $\mathcal{A}^\mu = \mathcal{A}$
$\bar{\mu} = \mu$.

Beweis offensichtlich.

Satz 16.2.7 Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß.
Ist μ σ-endlich, dann ist: $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$

die Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})})$.

Beweis (nur für Weiterlesen)

Es genügt den Fall $\mu(X) < \infty$ zu betrachten.

Sei $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ d.h.

$$(1) \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subset X.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$

$(A_{jk})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{jk}) - \frac{1}{2^k}$$

Wenden wir (1) auf $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{jk}$ an,

erhalten wir

$$\infty > \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{jk}\Big) = \mu^*(A) + \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{jk} \setminus A\Big)$$

(da $\mu(X) < \infty$)

Es folgt $\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{jk} \setminus A\Big) \leq \frac{1}{2^k}$

Setze $A' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{jk}\Big) \supset A$

Beachte $A' \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$

$$\mu^*(A' \setminus A) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{jk} \setminus A\Big) \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k$$

d.h. $\mu^*(A' \setminus A) = 0$.

Man bekommt $A = A' \setminus N$, $N := A' \setminus A$ mit $\mu^*(N) = 0$.

Da $\mu^*(N)=0$ $\exists$ $N_{jk} \in \mathcal{R}$
mit $N \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_{jk} \right)$ und

$$\mu^*\Big(\underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_{jk} \right)}_{:=\tilde{N} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})} \Big) = 0.$$

Es gilt

$$A' \supset A = A' \setminus N \supset A' \setminus \tilde{N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^c = (A')^c \cup N \\ N \subset \tilde{N} \end{cases} \text{mit} \begin{cases} \mu^*(\tilde{N}) = 0 \\ \tilde{N} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \end{cases}$$

Daher gilt $A^c \in \mathcal{A}^{\mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}}$

und $A = (A^c)^c \in \mathcal{A}^{\mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}}$ ∎

<u>Satz 16.2.8</u> Sei μ ein σ-endlicher Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{R}$. Dann existiert genau ein Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$, welches μ fortsetzt.

<u>Beweis</u> (nur für Weiterlesen, nicht in der Vorlesung besprochen)

Wir haben schon bewiesen dass $(X, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})})$ den Raum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ fortsetzt. Es bleibt, die Eindeutigkeit von $\tilde{\mu}$ zu zeigen. Dazu genügt es anzunehmen dass $\mu(X) < \infty$.

da μ schon σ-endlich ist.

Sei $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ ~~se~~ zwei Maße die μ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen, d.h.

$$\tilde{\mu}_1(A) = \tilde{\mu}_2(A) = \mu(A) \quad (1)$$

$\forall A \in \mathcal{R}$.

Sei $\mathcal{A} := \{ A \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) : \tilde{\mu}_1(A) = \tilde{\mu}_2(A) \}$

Es gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ (nach (1)). Wir zeigen $\mathcal{A}$ ist ein σ-Algebra. Es ist klar, $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

zweite, sei $A \in \mathcal{A}$

Dann $\tilde{\mu}_1(A^c) = \tilde{\mu}_1(X) - \tilde{\mu}_1(A)$ (da $\tilde{\mu}_1(X) < \infty$)

$$= \tilde{\mu}_2(X) - \tilde{\mu}_2(A)$$

$$= \tilde{\mu}_2(A^c)$$

Es folgt $A^c \in \mathcal{A}$.

Nun sei $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

Setze $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$

$B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots,$

$B_j := A_j \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} A_s, \ldots$

Die Mengen $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sind paarweis disjunkt und gehören zu $\mathcal{A}$.

Es folgt

$$\tilde{\mu}_1\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \tilde{\mu}_1\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big)$$
$$= \sum_j \tilde{\mu}_1(B_j)$$
$$= \sum_j \tilde{\mu}_2(B_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}_2(\cup B_j)$$
$$= \tilde{\mu}_2\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)$$

Man erhält

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Daher ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \supset \mathcal{A}$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$$

und $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ ∎

<u>Zusammenfassung</u>:

äußeres Maß

$$(X, \mathcal{R}, \mu) \longrightarrow (X, \mathcal{P}(X), \mu^*)$$

σ-endliches Prämaß

$$\downarrow$$

$$(X, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}), \tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})})$$

$$(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}) \longleftarrow$$

Vervollständigung

§ 16.3. Das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$

Betrachte den Prämaßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \lambda_n)$

wobei $\mathcal{R}_n$ = Algebra der Figuren

λ_n = das elementar-geometrische Volumen

$\lambda_n : \mathcal{R}_n \to [0, \infty]$ ist ein σ-endliche Prämaß.

Sei $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$

das von λ_n erzeugte äußere Maß, d.h.

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{R}_n \right\}$$

<u>Definition 16.3.1</u>

(i) λ_n^* heißt <u>äußeres Lebesgue-Maß</u> in $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_{\lambda_n^*} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ heißt σ-Algebra der <u>Lebesgue-meßbaren</u> Mengen.

(iii) $\lambda_n := \lambda_n^* |_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ heißt <u>Lebesgue-Maß</u> in $\mathbb{R}^n$

<u>Bemerkung 16.3.2</u>

(1) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

(2) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist vollständig und ist eine Forsetzung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \lambda_n)$.

(3) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n |_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)})$: $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar

(Satz 16.2.7) $\Leftrightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, N Lebesgue-Nullmenge mit $A = B \cup N$.

(4) Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

($A \subsetneq B$ bedeutet A eine echte Teilmenge von B ist d.h. $A \subset B$, $A \neq B$).

<u>Satz 16.3.3</u> (Charakterisierung von Lebesgue-messbaren Mengen)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. Betrachte die folgende Bedingungen:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \supset A$ mit $\lambda_n^*(U \setminus A) \leq \varepsilon$

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge $F \subset A$ mit $\lambda_n^*(A \setminus F) \leq \varepsilon$.

Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so sind (i), (ii) erfüllt.

Ist mindestens eine von (i), (ii) erfüllt, so ist

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Beweis</u> Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Wir zeigen (i).

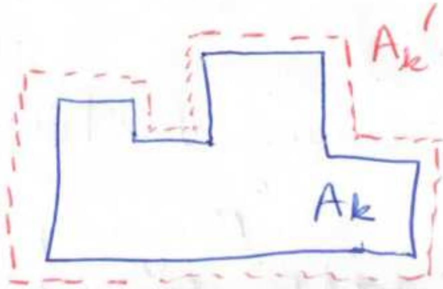
<u>Fall 1</u> : $\lambda_n(A) = \lambda^*_n(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ fest.

Definition von λ_n^* $\Rightarrow$ $\exists\ (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_n$ mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(A_k) \leq \lambda_n(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

wir vergrößern A_k zu A_k' wobei

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k' \text{ offene Figur} \\ A_k \subset A_k' \\ \lambda_n(A_k) \geq \lambda_n(A_k') - \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} \end{array} \right.$$



Es folgt $\quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k' = B$ offen

$$\lambda_n(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_n(B_k) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \lambda_n(B) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \lambda_n(B) - \varepsilon.$$

Man bekommt (i).

<u>Fall 2</u>. $\lambda_n(A) = \infty$. Sei $W_k := [-k,k]^n \subset \mathbb{R}^n$

Setze $A_k = A \cap W_k$. Es gilt $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Da $\lambda_n(A_k) < \infty$, nach Fall 1, $\exists\, U_k$ offen mit $U_k \supset A_k$ und $\lambda_n(U_k \setminus A_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Setze $U := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. Man erhält

$$A \subset U \quad \text{und} \quad \lambda_n(U \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(U_k \setminus A_k) \leq \varepsilon$$

Daraus folgt (i).

Wir zeigen (ii). Sei $A' := A^c$

Wenden wir (i) auf A' an, erhalten wir $\exists\, U$ offen mit $A' \subset U$ und

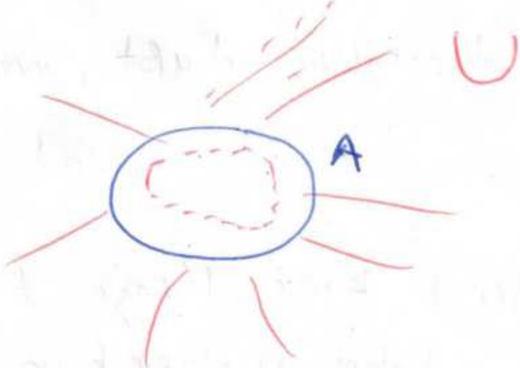
$$\lambda_n(U \setminus A') \leq \varepsilon.$$

Da

$$A \setminus (\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus U}_{=:F}) = U \setminus A'$$

gilt

$$\lambda_n(A \setminus F) = \lambda_n(U \setminus A') \leq \varepsilon$$



Nun angenommen dass (i) wahr ist.
Zu jedem $k \in \mathbb{N}$, sei U_k offen mit $A \subset U_k$,

$\lambda_n^*(U_k \setminus A) \leq \frac{1}{2^k}$. Setze $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$

Es folgt $\left\{ \begin{array}{l} A \subset B, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ B \setminus A \subset U_k \setminus A \quad \forall k \end{array} \right.$

Daher gilt $\quad \lambda_n^*(B\setminus A) \leq \lambda_n^*(U_k \setminus A) \leq \frac{1}{2^k} \; \forall k$

Daraus folgt $\quad \lambda_n^*(B\setminus A) = 0$

und $\quad B\setminus A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

(da λ_n vollständig ist). Es gilt deshalb

$$A = B \setminus (B\setminus A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

Fall (ii) gilt, argumentiert man analog. ∎

<u>Folgerung 16.3.4</u>

(i) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-meßbar wenn sie sich in der Form

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cup N$$

darstellen läßt, wobei $F_k \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen sind und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

(ii) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn $\exists\, N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge $N \cap A = \emptyset$ $U_k \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $A \cup N = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$.

(iii) Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann (Lebesguesche) Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Familie $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Würfeln in $\mathbb{R}^n$ gibt so dass

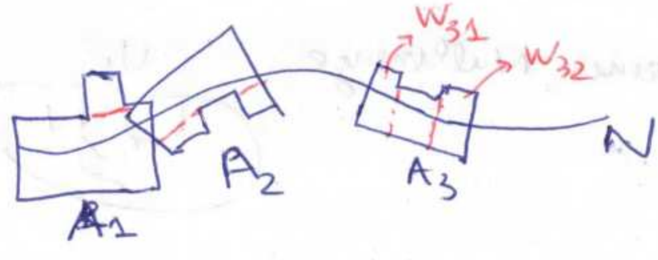
$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(W_j) \leq \varepsilon$$

<u>Beweis</u> (ii) wurde im Beweis von Satz 16.33 gezeigt. Analog für (i). Wir zeigen (iii)

$$\lambda_n(N) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ Figuren } (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \left\{ \begin{array}{l} N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(A_k) \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Da jede Figur sich als die disjunkte Vereinigung von endlich viele Würfeln lässt, bekommt man (iii):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \bigsqcup_{j=1}^{m_k} W_{jk}, \quad W_{jk} \text{ Würfeln} \\ N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_k} W_{jk} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_n(W_{jk}) \leq \varepsilon \end{array} \right.$$



∎

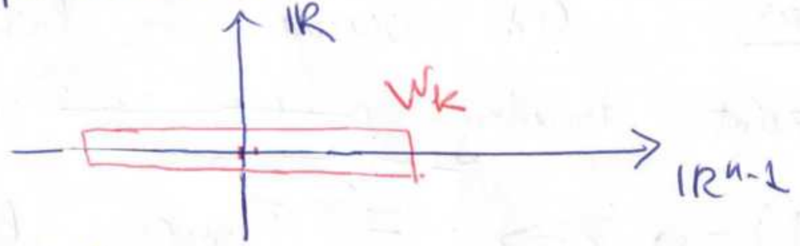
Beispiel 16.3.5

(i) jede abzählbare Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-Nullmenge: $N = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$

$$\lambda_n(\{a_j\}) = 0 \quad \forall j$$

daher gilt $\lambda_n(N) = 0$.

(ii) Jede Hyperebene H in $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge



O.B.d.A angenommen $H = \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$

wähle $W_k = [-k, k]^{n-1} \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^k \cdot k^{n-1}}, \frac{\varepsilon}{2^k \cdot k^{n-1}}\right]$

$k \in \mathbb{N}$

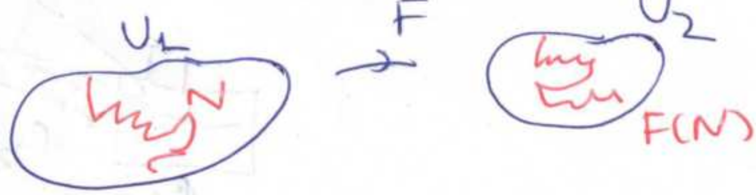
Da $H \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2^k \cdot k^{n-1}}$$

$$= 2^n \cdot \varepsilon ,$$

gilt $\lambda_n(H) = 0$.

(iii) Sei $F: U_1 \to U_2$ stetig differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Sei $N \subset U_1$ Nullmenge. Dann ist $F(N)$ auch eine Nullmenge

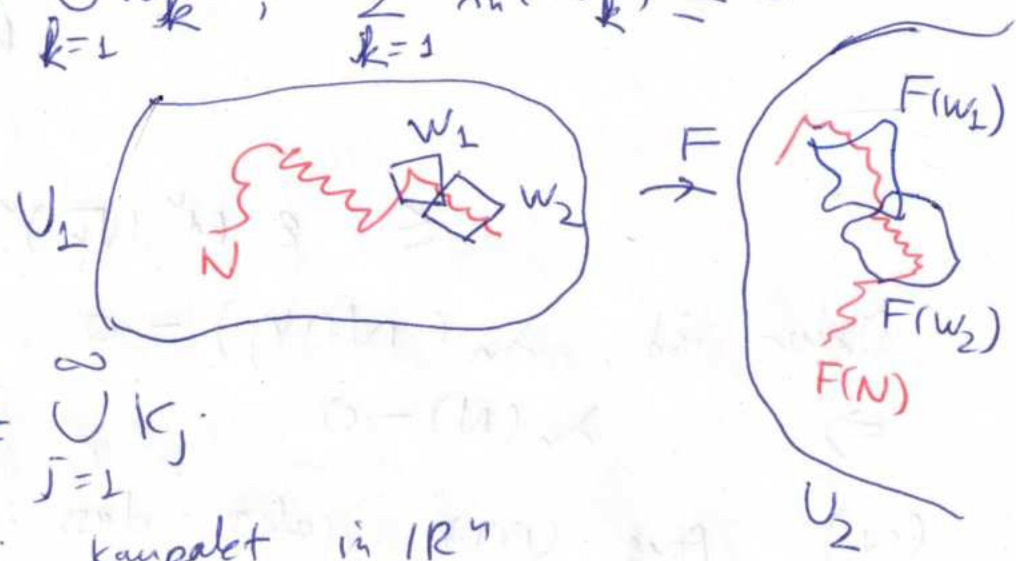


Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$, nach Folgerung 16.3.4 (iii)

$\exists$ Würfeln $W_1, W_2, \dots, W_k, \dots$ in $\mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \ , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) \leq \varepsilon$$



Schreibe $\left\{ \begin{array}{l} U = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} K_j \\ K_j \text{ kompakt in } \mathbb{R}^n \end{array} \right.$

Es genügt zu zeigen dass $\lambda_n(F(N \cap K_j)) = 0$

da $\quad F(N) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(N \cap K_j)$

Setze $\quad M := \max_{x \in K_j} \|DF(x)\| < \infty \quad$ (da $F \in \mathcal{C}^1$, K_j kompakt)

Es folgt $\quad \forall\ x, y \in F(W_k \cap K_j)$:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M \|x - y\| \leq M \cdot s_k \cdot \sqrt{n}$$

(s_k ist die Länge der Kante von W_k)

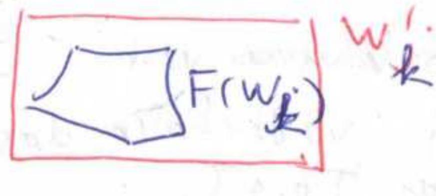
Man sieht daher

$$F(W_k \cap K_j) \subset W_k' \text{, wobei } W_k'$$

eine Würfeln mit Kanten von Länge $M \sqrt{n} \cdot s_k$.

Daraus folgt

$F(N \cap K_j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k'$



und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k') = \sum_{k=1}^{\infty} M^n (\sqrt{n})^n s_k^n$$

$$= M^n (\sqrt{n})^n \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} s_k^n}_{= \lambda_n(W_k)}$$

$$\leq \varepsilon \cdot M^n (\sqrt{n})^n$$

Daher ist $\lambda_n(N \cap K_j) = 0 \quad \forall j$

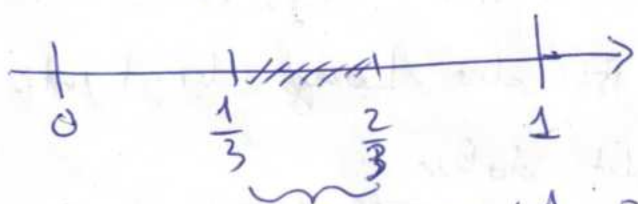
$\Rightarrow \qquad \lambda_n(N) = 0.$

(iv) Aus (iii) folgt dass: $\forall$ Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ von Dimension $m < n$ gilt

$$\lambda_n(M) = 0.$$

(v) Wir zeigen nun ein Beispiel von Nullmenge in $\mathbb{R}$, die überabzählbar ist. Wir konstruieren nun die <u>Cantorsche Menge</u> in $[0,1]$:

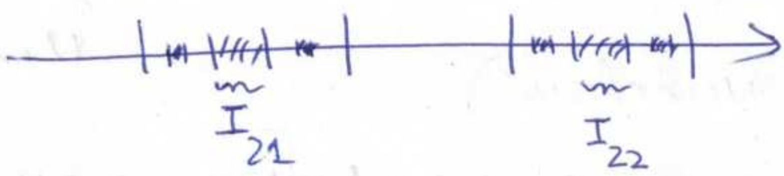
(1) Teilen $[0,1]$ auf 3 Intervalle von gleichen Längen.



$I_{11} := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(2) Streichen I_{12} aus $[0,1]$ bekommen wir $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

(3) widerholen das Verfahren für I_{11}, I_{13} anstelle von $[0,1]$,



erhalten wir die Menge

$$C := [0,1] \setminus U, \text{ wobei}$$

$$U = I_{11} \sqcup (I_{21} \sqcup I_{22}) \sqcup (I_{31} \sqcup I_{32} \sqcup I_{33} \sqcup I_{34}) \sqcup \dots \sqcup \dots$$

(Beachte: U ist offen)

Daher ist C kompakt, also eine Borelmenge.

Berechne

$$\lambda_1(U) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Es folgt $\lambda_1(C) = 0$, anders gesagt C ist eine Nullmenge. Man kann zeigen dass

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, \; a_j \in \{0,2\} \right\}$$

Daher gilt

C ist bijektiv zu $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, welche bijektiv zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist, und da $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind gilt: C und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind. Das impliziert: C ist überabzählbar

(vi) (Beispiel einer nicht Lebesgue-messbaren Mengen)

(nur für Weiterlesen)

Seien $x, y \in [0,1]$. Wir schreiben: $x \sim y$ wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Das ist eine Äquivalenzrelation auf $[0,1]$.

Sei $[0,1]/_\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen.

Für jede Äquivalenzklasse α, wähle ein $x_\alpha \in \alpha \subset [0,1]$. Man bekommt $E = \{ x_\alpha : \alpha \in [0,1]/_\sim \} \subset [0,1]$.

Daher gilt $\forall q \in \mathbb{Q}$ sind die Mengen $E + q := \{ x + q : x \in E \}$ paarweis disjunkt. Schreibe $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_1, q_2, \dots q_n, \dots \}$

Setze $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} (E + q_n)$

Beachte $[0,1] \subset A \subset [-1, 2]$. Es folgt

$$1 = \lambda_1([0,1]) \leq \lambda_1^*(A) \leq \lambda_1([-1,2]) = 3$$

Falls $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ gilt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ und

$$\lambda_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E + q_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E).$$

(es gilt: $\forall B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R} : \lambda_1(B+x) = \lambda_1(B)$)

$$= \begin{cases} 0 & \text{wenn } \lambda_1(E) = 0 \\ \infty & \text{wenn } \lambda_1(E) \neq 0 \end{cases}$$

Man erhält eine Widerspruch da

$$1 \leq \lambda_1(A) \leq 3.$$

§ 16.4. Messbare Funktionen

Erinnerung: $(X, \mathcal{A})$ ist messbarer Raum $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ Menge } X \neq \emptyset \\ \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \end{array} \right.$

Definition 16.4.1 Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ meßbare Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt meßbar (genauer $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbar), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}$.

Man schreibt auch

$$f: (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$$

für eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbare Abbildung $f: X \to Y$.

Beispiel 16.4.2 (i) Konstante Abbildung von X nach Y sind stets messbar.

(ii) Sei $A \in X$. Definiere

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion genannt die <u>charakteristische Funktion von A</u>.

$\mathbb{1}_A$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-meßbar $\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{A}$.

<u>Lemma 16.4.3</u> Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$$

Dann gilt

$f : X \to Y$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbar $\Leftrightarrow$

$\forall B \in \mathcal{E} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

<u>Beweis</u>: Sei $\mathcal{B}' := \{ B' \subset Y : f^{-1}(B') \in \mathcal{A} \}$

Beachte $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}'$. Daher gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$

und $\forall B' \in \mathcal{B} : f^{-1}(B') \in \mathcal{A}$. ∎

<u>Definition 16.4.4</u> (i) Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Die Ordnung von $\mathbb{R}$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortgesetzt durch

$$-\infty < a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Man setzt

$$a - \infty = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ oder } a = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} -\infty, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

Die Vereinbarung mit ∞ in der Seite 603 gilt auch.
(siehe auch Definition 2.3.7 Skript der Analysis I)

Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$ sind nicht definiert.

(ii) Eine Abbildung $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt <u>numerische Funktion</u>.

Sei $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{ B \cup E : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$
$E \in \{-\infty, \infty\} \}$

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist σ-Algebra, die <u>Borelsche σ-Algebra</u> auf $\overline{\mathbb{R}}$ heißt.

Eine numerische Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt <u>$\mathcal{A}$-messbar</u> wenn f: $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar ist.

Man sagt f messbar statt $\mathcal{A}$-messbar wenn $\mathcal{A}$ klar vom Kontext ist

(iii) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Wenn $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-messbar ist, heißt f <u>Lebesgue-messbar</u>

(iv) Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. $c \in \mathbb{R}$

Sei $\{f > c\} := \{x \in X : f(x) > c\} = f^{-1}((c, \infty])$

analog seien die Mengen $\{f \geq c\}$, $\{f < c\}$, $\{f \leq c\}$ definiert.

<u>Beispiel</u>: (1) Seien X, Y metrische Räume
$f: X \to Y$ stetige Abbildung.

Dann ist f $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$-meßbar.

(ii) Seien $f: (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$
$g: (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ meßbar

Dann ist $g \circ f: (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$ meßbar

da $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

Satz 16.4.5 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Eine numerische Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\{f > c\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$,

(ii) $\{f \geq c\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$,

(iii) $\{f < c\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$,

(iv) $\{f \leq c\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$.

Beweis

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) weil:

$$\{f \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > c - \tfrac{1}{k}\}$$

$$\{f > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \geq c + \tfrac{1}{k}\}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) da $\{f > c\} = X \setminus \{f \leq c\}$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) da $\{f \geq c\} = X \setminus \{f < c\}$

Es bleibt zu zeigen dass

die Messbarkeit von $f \iff$ (ii).

Wegen des Lemma 16.4.3 genügt es zu zeigen

dass
$$(\ast) \quad \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}_\sigma\left(\{[c,\infty] : c \in \mathbb{R}\}\right) =: \tilde{\mathcal{A}}$$

Beachte
$$[c,b) = [c,\infty] \setminus [b,\infty] \in \tilde{\mathcal{A}} \quad \forall\ c<b \in \mathbb{R}$$
$$[c,b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} [c, b+\tfrac{1}{k}) \in \tilde{\mathcal{A}}$$

Deshalb $\tilde{\mathcal{A}} \ni \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(Satz 16.1.5). Zudem gilt
$$\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} [k,\infty] \in \tilde{\mathcal{A}}$$
$$-\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\overline{\mathbb{R}} \setminus [k,\infty]) \in \tilde{\mathcal{A}}$$

Daher gilt $(\ast)$. ∎

<u>Satz 16.4.6</u> Sei $(X,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Seien $f,g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Dann liegen die Mengen
$\{f>g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f=g\}$ und $\{f \neq g\}$ in $\mathcal{A}$.

Beweis Sei $x \in X$. Da $f(x) > g(x)$ genau dann, wenn eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ existiert mit $f(x) > r > g(x)$, folgt

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{f > r\} \cap \{r > g\} \right) \in \mathcal{A}$$

(da f, g $\mathcal{A}$-messbar sind).

Daraus folgt weiter

$$\{f \geq g\} = \{g > f\}^c \in \mathcal{A}$$

$$\{f = g\} = \{f \geq g\} \setminus \{f > g\} \in \mathcal{A}$$

$$\{f \neq g\} = \{f = g\}^c \in \mathcal{A} \quad \blacksquare$$

Satz 16.4.7 Seien $f, g : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:

(i) cf $\quad \forall c \in \mathbb{R}$

(ii) f^p $\quad \forall p \in \mathbb{R}, p > 0$. $(\infty^p := \infty, p > 0)$

(iii) $f + g$

(iv) $f \cdot g$

Beweis: Die Abbildungen $y \mapsto cy$ von $[0, \infty]$
$y \mapsto y^p$
sind messbar. Da cf die Zusammensetzung von $x \mapsto f(x)$, und $y \mapsto cy$ ist, so ist cf messbar. Analog für f^p.

Zu (iii): Ist g messbar, so auch $-g$ und $c-g$ für $\forall c \in \mathbb{R}$. Die Behauptung folgt aus $\{f+g > c\} = \{f > c-g\}$.

Zu (iv):

Sei $A := \{f=\infty\} \cup \{g = \infty\} \in \mathcal{A}$.

Beachte $\{f \cdot g = \infty\} = A \setminus (\{f=0\} \cup \{g=0\}) \in \mathcal{A}$.

Deshalb genügt es zu zeigen, dass die Einschränkung von $f \cdot g : X \setminus A \to [0,\infty]$ messbar (beachte $X\setminus A \in \mathcal{A}$; nach Bemerkung 14.6.8 ist $(X \setminus A, \mathcal{A}|_{X\setminus A})$ wieder ein messbarer Raum). Dies ist klar da

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right) \quad \text{auf } X \setminus A,$$

welche messbar wegen (i) + (iii) ist. ∎

Bemerkung 16.4.8 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Sei $A_0 \in \mathcal{A}$. Die Menge

$$\mathcal{A}|_{A_0} := \{ B \cap A_0 : B \in \mathcal{A} \} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(A_0)$$

ist eine σ-Algebra über A_0, die die von $\mathcal{A}$ induzierte σ-Algebra über A_0 heißt.

Deshalb ist $(A_0, \mathcal{A}|_{A_0})$ ein messbarer Raum. Wir betrachten immer die σ-Algebra $\mathcal{A}|_{A_0}$ für eine messbare Menge $A_0 \subset X$, sofern nicht anders angegeben.

z.B. $[0,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \quad \left([0,\infty],\ \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big|_{[0,\infty]}\right) \text{ messbarer Raum.}$$

Weiter ist μ ein Maß auf X. Dann ist

$$\mu|_{A_0} : \mathcal{A}|_{A_0} \to [0,\infty] \qquad \text{ein Maß}$$
$$A \mapsto \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}|_{A_0}.$$

und ist $(A_0, \mathcal{A}|_{A_0}, \mu|_{A_0})$ ein Maßraum.

<u>Definition 1.6.4.9</u> Sei $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$

(i) Setze
$$\max(f,g) : X \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto \max(f(x), g(x))$$

$$\min(f,g) : X \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto \min(f(x), g(x))$$

(ii) Allgemeiner sei $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \geq 1$

Definiere
$$\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)(x) := \sup\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)(x) := \inf\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(Erinnerung: sei $A \subset \overline{\mathbb{R}}$

$\sup A$ = die kleinste obere Schranke von A in $\overline{\mathbb{R}}$

$\inf A$ = die größte untere Schranke von A in $\overline{\mathbb{R}}$.

daher wenn $\infty \in A \Rightarrow \sup A = \infty$

$-\infty \in A \Rightarrow \inf A = -\infty$)

Weiter definiert man die Funktionen

$$\limsup_{k\to\infty} f_k \,,\quad \liminf_{k\to\infty} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

durch

$$\limsup_{k\to\infty} f_k := \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq m} f_k \right)$$

$$\liminf_{k\to\infty} f_k := \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq m} f_k \right)$$

(iii) Positiv- und Negativteil $f_+, f_- : X \to [0,\infty]$ einer Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind definiert durch

$$f_+ := \max(f,0) \,,\quad f_- := -\min(f,0) = \max(-f,0)$$

Es gilt $f = f_+ - f_-$.

<u>Satz 16.4.10</u> Sei $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum

$\left.\begin{array}{l} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}, (k\geq 1) \\ f, g : X \to \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\}$ messbare Funktionen

Dann sind auch die folgende Funktionen messbar:

$\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $\sup\limits_k f_k$, $\inf f_k$,

$\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$.

<u>Beweis</u>: $\{\sup\limits_{k\geq 1} f_k \leq c\} = \bigcap\limits_{k\geq 1} \{f_k \leq c\} \in \mathcal{A}$

$$\{\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k \geq c\} = \bigcap_{k\geq 1} \{f_k \geq c\} \in \mathcal{A} \qquad \blacksquare$$

<u>Folgerung 16.4.11</u> Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Dann gilt

f ist messbar $\Longleftrightarrow$ f_+ und f_- sind messbar.

<u>Beweis</u>: Aus

$$\left\{\begin{array}{l} f_+ = \max(f, 0) \\ f_- = -\min(f, 0) \\ f = f_+ - f_- \end{array}\right.$$

und Satz 14.6.10 folgt die Behauptung.

§ 16.5. Integration messbarer Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum

und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Wir wollen das Integral $\int_X f \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$

definieren. Das Integral sollt das Maß zurückliefern;

d.h. wenn $f = \mathbb{1}_A$ ist, so gilt

$$\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A).$$

Wir definieren zuerst das Integral für einfache Funktionen. Wir sehen später dass

wenn f Riemannsche integrierbar auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ ist, $\mu = \lambda_1$ (Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$), so gilt

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda_1 = \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{Riemannsches Integral}}$$

Definition 16.5.1 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt einfach falls endlich viele Werte annimmt und es gelte

$$c \in f(X) \Rightarrow f^{-1}(c) \in \mathcal{A}.$$ (es folgt, einfache Funktionen sind messbar)

Bemerkung: (i) f ist einfach $\Leftrightarrow \exists\, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$

$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ mit

$$f = c_1 \mathbb{1}_{A_1} + c_2 \mathbb{1}_{A_2} + \dots + c_m \mathbb{1}_{A_m}.$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig bestimmt: z.B. $\mathbb{1}_A = \frac{1}{2}\mathbb{1}_A + \frac{1}{2}\mathbb{1}_A$

(ii) $X = [a,b]$, $\mu = \lambda_1$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R})|_{[a,b]}$.

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, so ist f einfach. (siehe Seite 220 Skript Analysis I).

Die Umkehrung ist falsch: die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$

ist einfache Funktion aber keine Treppenfunktion.

Sei $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$

Definition 16.5.2 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Sei $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine einfache Funktion. Definiere

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{c \in f(X)} c \cdot \mu(f^{-1}(c))$$

$\int_X f \, d\mu$ heißt das Integral von f (bzgl. μ).

Lemma 16.5.3 Ist $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{A_j}$, $(c_j \geq 0)$

so gilt

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} c_j \, \mu(A_j) \quad (*)$$

Folglich wenn f, g einfache Funktionen sind, gilt

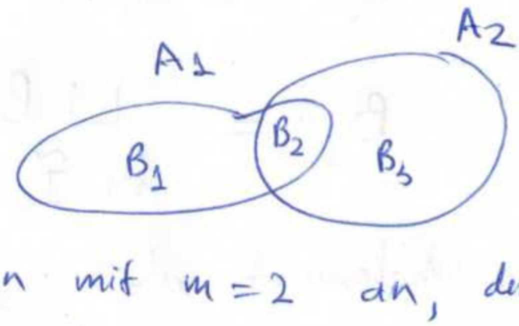
$$\int_X (af + bg) \, d\mu = a \int_X f \, d\mu + b \int_X g \, d\mu$$

$\forall \, a, b \in [0, \infty)$.

<u>Beweis</u>: Es genügt den Fall $c_j > 0$ zu betrachten denn der Wert 0 keinen Beitrag zu der rechtigen Seite von $(*)$ hat. Zerlege $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$ zu kleineren disjunkten Teilmengen $(B_k)_{k \in I}$ (wobei I eine endliche Indexmenge ist) so dass

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$$

und $\quad A_j = \bigsqcup_{k \in I_j} B_k \quad \forall \, 1 \leq j \leq m$



(um das zu sehen, fängt man mit $m = 2$ an, der allgemeine Fall folgt aus Induktion über m und dem Fall $m = 2$)

Daraus folgt

$$\mathbb{1}_{A_j} = \sum_{k \in I_j} \mathbb{1}_{B_k}$$

$$\mu(A_j) = \sum_{k \in I_j} \mu(B_k)$$

Man erhält also

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \sum_{k \in I_j} \mu(B_k)$$

$$= \sum_{k \in I} \underbrace{\Big(\sum_{j : k \in I_j} c_j \Big)}_{=: \tilde{c}_k} \mu(B_k)$$

und $$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{k \in I} \tilde{c}_k \, \mathbb{1}_{B_k}$$

Zerlege $$I = \tilde{I}_1 \sqcup \dots \sqcup \tilde{I}_\ell$$

so dass $\forall \; 1 \leq s \leq \ell \quad \exists$ paarweis verschiedene $(b_s)_s \subset \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}_k = b_s \quad \forall \; k \in \tilde{I}_s$.

Sei

$$C_s := \bigsqcup_{k \in \tilde{I}_s} B_k$$

Man bekommt also

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{s=1}^{\ell} b_s \cdot \mathbb{1}_{C_s}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \, \mu(A_j) = \sum_{s=1}^{\ell} b_s \, \mu(C_s)$$

$$= \sum_{b \in f(X)} b \, \mu(f^{-1}(b))$$

da $f(X) = \{ b_1, b_2, \dots, b_\ell \}$

Die Behauptung folgt. ∎

Beispiel: (i) $\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) \in [0, \infty]$.

(ii) f, g sind einfache Funktionen $\Rightarrow$ $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ sind auch einfache Funktionen.

Satz 16.5.~~4~~ Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. $f: X \to [0, \infty]$ messbar.

Dann $\exists$ eine aufsteigende Folge $(\varphi_k)_k$ von einfachen Funktionen mit

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1} \leq \dots \\ \varphi_k(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in X \end{array} \right.$$

Beweis Für $k \geq 1$ sei $C_k := \{ f \geq k \}$

$$A_{kv} := \{ v 2^{-k} \leq f < (v+1) 2^{-k} \}$$

$$\forall v \in \mathbb{N}_0, \quad v \leq k \cdot 2^k - 1$$

Definiere

$$\varphi_k := \sum_{0 \leq v < 2^k k} v \cdot 2^{-k} \cdot \mathbb{1}_{A_{kv}} + k \, \mathbb{1}_{C_k}$$

Man bekommt

$$0 \leq f(x) - \varphi_k(x) \leq 2^{-k} \quad \text{falls } f(x) < k$$

$$\varphi_k(x) = k \quad \text{falls} \quad f(x) \geq k.$$

Daher gilt $\varphi_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

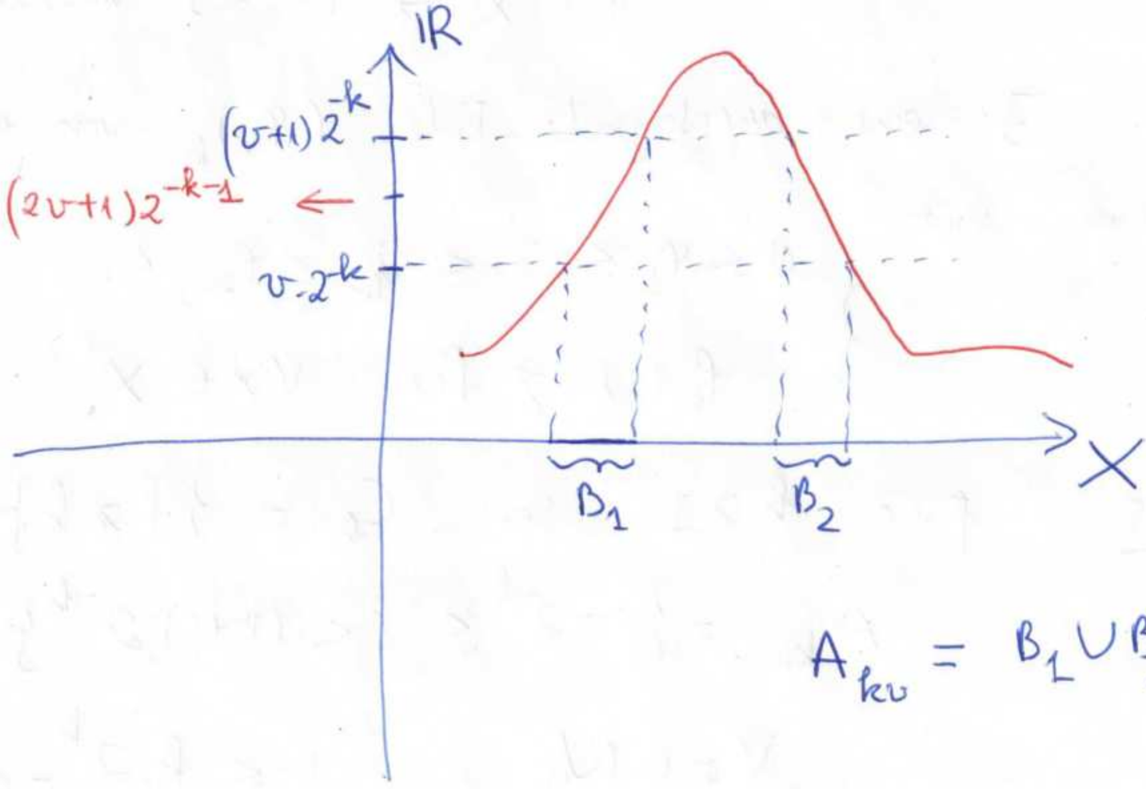
Die Folge $(\varphi_k)_k$ ist aufsteigend, denn

$$A_{kv} = A_{k+1,2v} \sqcup A_{k+1,2v+1}$$

und

$$v \cdot 2^{-k} \mathbb{1}_{A_{kv}} = v \cdot 2^{-k} \mathbb{1}_{A_{k+1,2v}} + v \cdot 2^{-k} \mathbb{1}_{A_{k+1,2v+1}}$$

$$\leq (2v) \cdot 2^{-k-1} \mathbb{1}_{A_{k+1,2v}} + (2v+1) 2^{-k-1} \mathbb{1}_{k+1,2v+1}$$



$$A_{kv} = B_1 \cup B_2.$$

Definition 16.5.5 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ messbar.

Definiere

$$\int_X f\,d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi\,d\mu : \begin{array}{l} \varphi: X \to [0,\infty) \\ \text{einfache Funktion} \\ \text{mit } \varphi \le f \end{array} \right\}.$$

(Die Menge unter dem Supremum ist nicht leer wegen des Satzes 16.5.3)

Wir nennen $\int_X f\,d\mu$ das (Lebesgue-) <u>Integral</u> von f über X bzgl. μ.

Ist $A \in \mathcal{A}$, definieren wir

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A\,d\mu$$

<u>Bemerkung</u>: Da $(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$ ein Maßraum ist, kann man das Integral $\int_A f\,d(\mu|_A)$ betrachten, welches eigentlich gleich $\int_A f\,d\mu$ ist, weil die Aussage schon wahr für einfache Funktionen (siehe Lemma 16.5.3) ist.

Satz 16.5.6 Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar.

Dann gilt

(i) $f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$

(iii) A Nullmenge $\Rightarrow \int_A f d\mu = 0$

(iv) $\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu \quad \forall c \in [0, \infty)$

(v) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Insbesondere gilt

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B g d\mu$$

falls $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{A}$.

(vi) $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f > 0\}) = 0$

Beweis (i) ist trivial.

(ii) ist eine direkte Folgerung von (i)

(iii) und (iv) sind auch offensichtlich.

<u>wir zeigen (vi)</u> "$\Leftarrow$" ist klar

(Falls $\varphi \leq f$ eine nicht-negative einfache Funktion ist, so gilt

$$\int_X \varphi d\mu = 0 \cdot \mu(\varphi^{-1}(0)) + \sum_{\substack{c \in \varphi(X) \\ c > 0}} c \cdot \mu(\varphi^{-1}(c))$$

$$= 0$$

da $\varphi^{-1}(c) \subset \{f > 0\}$, welche eine Nullmenge ist)

wir prüfen "$\Rightarrow$". Angenommen, $\mu(\{f > 0\}) > 0$

Da $\{f > \frac{1}{k}\} \nearrow \{f > 0\}$ für $k \to \infty$,

erhalten wir $\mu(\{f > \frac{1}{k}\}) \to \mu(\{f > 0\})$

für $k \to \infty$.

Daher $\exists\ k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\{f > \frac{1}{k}\}) > 0$.

Es folgt
$$\int_X f d\mu \geq \int_{\{f > \frac{1}{k}\}} f d\mu \geq \frac{1}{k} \int_{\{f > \frac{1}{k}\}} 1 \cdot d\mu$$

$$= \frac{1}{k} \mu(\{f > \frac{1}{k}\}) > 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

Deshalb folgt die Behauptung ■

Es bleibt noch (v) zu zeigen.
(diese wird nach den Ferien in der Vorlesung besprochen)

Sei $\varphi_1, \varphi_2 : X \to [0, \infty)$ einfach
mit $\varphi_1 \leq f$, $\varphi_2 \leq g$.

Daher gilt $f + g \geq \varphi_1 + \varphi_2$

und
$$\int_X (f+g)\,d\mu \geq \int_X (\varphi_1 + \varphi_2)\,d\mu = \int_X \varphi_1\,d\mu + \int_X \varphi_2\,d\mu$$
(Lemma 16.5.3)

Daraus folgt
$$\int_X (f+g)\,d\mu \geq \sup_{\varphi_1, \varphi_2} \left(\int_X \varphi_1\,d\mu + \int_X \varphi_2\,d\mu \right)$$
$$\geq \sup_{\varphi_1} \int_X \varphi_1\,d\mu + \sup_{\varphi_2} \int_X \varphi_2\,d\mu$$
$$= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Wir zeigen nun $\int_X (f+g)\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$.

Sei $\varphi : X \to [0,\infty)$ einfache Funktion mit
$$\varphi \leq f+g.$$

$(\varphi_k)_k$, $(\tilde{\varphi}_k)_k$ aufsteigende Folgen von einfachen Funktionen mit $\varphi_k \geq 0$, $\tilde{\varphi}_k \geq 0$

und $\varphi_k(x) \uparrow f(x)$, $\tilde{\varphi}_k(x) \uparrow g(x)$ $\forall x$.

<u>Hilfslemma</u>: Sei $\varphi: X \to [0,\infty)$ einfache
$\varphi_k : X \to [0,\infty)$ Funktionen

$\forall k \in \mathbb{N}$. Es gelte
$$\varphi_k \leq \varphi_{k+1} \quad \forall k$$
und
$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in X.$$
Dann gilt
$$\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k \, d\mu \geq \int_X \varphi \, d\mu$$

<u>Beweis</u>: Setze $\tilde{\varphi}_k := \min\{\varphi_k, \varphi\}$

Dann ist $(\tilde{\varphi}_k)$ aufsteigend und $\tilde{\varphi}_k \leq \varphi_k$,
$\tilde{\varphi}_k \uparrow \varphi$ (punktweise)

Beachte $\tilde{\varphi}_k$ ist auch einfach, und
$$\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k \, d\mu \geq \int_X \tilde{\varphi}_k \, d\mu \quad \forall k$$

<u>Behauptung</u>: $\lim_{k\to\infty} \int_X \tilde{\varphi}_k \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu$

<u>Beweis</u> <u>Fall 1</u> $\int_X \varphi \, d\mu = \infty$

In diesem Fall gibt es $c > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ mit

$$\varphi \geq c \, \mathbb{1}_A \text{ und } \mu(A) = \infty$$

Definieren $A_k := \{ \tilde{\varphi}_k \geq \frac{c}{2} \}$

Da $\tilde{\varphi}_k \uparrow \varphi$, gilt $A_k \uparrow A$, also

$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \infty$. Zudem gilt $\varphi_k \geq \frac{c}{2} \mathbb{1}_{A_k}$

Es folgt $\int_X \varphi_k \, d\mu \geq \frac{c}{2} \mu(A_k)$, welche gegen ∞ konvergiert für $k \to \infty$. Daher gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k \, d\mu = \infty$$

<u>Fall 2</u>: $\int_X \varphi \, d\mu < \infty$.

Definiere $h_k := \varphi - \tilde{\varphi}_k \geq 0$

Es gilt $h_k \downarrow 0$ und

$$\int_X h_k \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu - \int_X \tilde{\varphi}_k \, d\mu$$

(66.1)

Setze

$$S := \{x \in X : h_1(x) > 0\}$$

$$M := \max_X h_1 \in [0, \infty)$$

Da $\int_X h_1 \, d\mu < \infty$ gilt $\mu(S) < \infty$

(man argumentiert analog wie Beweis von (vi))

Sei $\varepsilon > 0$ und $S_k := \{x \in S : h_k(x) \leq \varepsilon\}$

Wegen $h_k \downarrow 0$ folgt $S_k \uparrow S$, also

$\mu(S_k) \uparrow \mu(S)$ (man benutzt $\mu(S) < \infty$ hier).

Folglich hat man

$$h_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in X \setminus S \\ \leq M & \text{für } x \in S \setminus S_k \\ \leq \varepsilon & \text{für } x \in S_k \end{cases}$$

also

$$\int_X h_k \, d\mu \leq 0 \cdot \mu(X \setminus S) + M \cdot \mu(S \setminus S_k) + \varepsilon \mu(S_k),$$

welche gegen $\varepsilon \mu(S)$ konvergiert. Deswegen bekommt man

$$\limsup_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu \leq \varepsilon \mu(S) \quad \forall \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int_X h_k \, d\mu = 0 \quad \text{da } h_k \geqslant 0$$

Die Behauptung folgt. Der Beweis des Hilfslemma ist fertig.

Wir wenden nun das Hilfslemma auf
$$\varphi_k := \psi_k + \tilde{\psi}_k$$
an, um zu erhalten

dass
$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \int_X (\psi_k + \tilde{\psi}_k) \, d\mu}_{\int_X \psi_k d\mu + \int_X \tilde{\psi}_k d\mu} \geqslant \int_X \varphi \, d\mu$$

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu \geqslant$$

Deshalb folgt (V). ∎

Satz 16.5.7 Seien $f_k : X \to [0,\infty]$ messbar $\forall k \in \mathbb{N}$

(Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)

$g : X \to [0,\infty]$ messbar

mit $f_k \uparrow g$ (punktweise). Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X g \, d\mu \qquad (1)$$

Insbesondere sind $(g_k)_k$ einfache Funktionen

$g_k : X \to [0,\infty]$ mit $g_k \uparrow g$, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X g \, d\mu . \qquad (2)$$

Beweis: wir zeigen zuerst (2).

Seien $\tilde{g}_k : X \to [0,\infty)$ einfach mit $\tilde{g}_k \uparrow g$

und
$$\int_X g \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \tilde{g}_k \, d\mu$$

(nach Definition von Supremum).

Nach Hilfslemma im Beweis vom Satz 16.5.6

für jede $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_X \tilde{g}_l \, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu$$

da $g_k \uparrow g$ $(\Rightarrow \lim_{k\to\infty} g_k \geq \tilde{g}_l \ \forall l)$

Lassen $\ell \to \infty$ in der obigen Ungleichung erhalten wir $\int_X g \, d\mu \leq \lim_k \int_X g_k \, d\mu$

$$\leq \int_X g \, d\mu$$

da $g_k \leq g$. Daher folgt (2).

Wir zeigen (1). Seien $f_{k\ell} : X \to [0,\infty)$ einfache Funktionen mit $f_{k\ell} \uparrow f_k$ für $\ell \to \infty$.

Setze $\varphi_m := \sup \{ f_{k\ell} : k, \ell \leq m \}$

so folgt $\varphi_m \uparrow g$ punktweise. Aus (2) folgt

$$\lim_{m\to\infty} \int_X \varphi_m \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_X f_m \, d\mu \geq$$

(da $\varphi_m \leq f_m \ \forall m$). Zudem gilt

$$\int_X f_m \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu \quad \forall m.$$

Daraus folgt die Behauptung ∎

<u>Erinnerung</u>: Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f_+ = \max(f, 0)$$

$$f_- = -\min(f, 0) = \max(-f, 0)$$

es gilt: $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.

<u>Definition 16.5.8</u> Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion.

Die Funktion f heißt <u>μ-integrierbar</u> (oder kurz integrierbar) wenn gilt $\int_X f_+ \, d\mu < \infty$ und

$$\int_X f_- \, d\mu < \infty$$

Man setzt dann

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu .$$

genannt das (Lebesgue)-Integral von f über X bzgl. μ.

Setze $\mathcal{L}^1(X, \mu) := \{ f: X \to \mathbb{R} \ \mu\text{-integrierbar} \}$

Ist $A \in \mathcal{A}$, so sagen wir f <u>μ-integrierbar über A</u> wenn $\int_A f_+ \, d\mu < \infty$, $\int_A f_- \, d\mu < \infty$

Setze dann $\int_A f \, d\mu := \int_A f_+ \, d\mu - \int_A f_- \, d\mu$.

Man beachte $\int_A f \, d\mu$ ist gleich genau dem Integral von f über A bzgl. $\mu|_A$

(erinnere $(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$ ist ein Maßraum).

Bemerkung: Sei $f: X \to [0, \infty]$ messbar

Das Integral $\int_X f \, d\mu \in [0, \infty]$.

f ist μ-integrierbar $\iff \int_X f \, d\mu < \infty$.

Satz 16.5.9 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktion.

(i) f ist integrierbar $\iff \int_X |f| \, d\mu < \infty$

(ii) Es gebe nicht-negative messbare Funktionen

$$f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$$

mit $f = f_1 - f_2$ und $\int_X f_k \, d\mu < \infty$

für $k = 1, 2$. Dann ist f integrierbar mit

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_2 \, d\mu.$$

Beweis zu (i)

Da $|f| = f_+ + f_-$, ist f integrierbar, so gilt

$\int_X |f| \, d\mu < \infty$. Umgekehrt wenn $\int_X |f| d\mu < \infty$

gilt $\int_X f_+ \, d\mu < \infty$ und $\int_X f_- \, d\mu < \infty$

wegen $f_+ < |f|$, $f_- < |f|$.

zu (ii) Da $|f| \leq f_1 + f_2$, folgt

$\int_X |f| \, d\mu < \infty$. Daher ist f integrierbar.

Außerdem gilt $f_1 \geq f_+$, also ist

$g := f_1 - f_+$ (welche gleich auch $f_2 - f_-$ ist)

eine nicht-negative Funktion mit $\int_X g \, d\mu < \infty$.

Wegen des Satz 16.5.6 (v) gilt

$$\int_X f_1 \, d\mu = \int_X (f_+ + g) \, d\mu$$

$$= \int_X f_+ \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

$$\int_X f_2 \, d\mu = \int_X (f_- + g) \, d\mu = \int_X f_- \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

Daraus folgt
$$\int_X f_1\,d\mu - \int_X f_2\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu$$
$$= \int_X f\,d\mu \quad \blacksquare$$

<u>Satz 16.5.10</u> Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen.

(i) $\forall\, c \in \mathbb{R}$ ist $c \cdot f$ integrierbar mit
$$\int_X (cf)\,d\mu = c \int_X f\,d\mu$$

(ii) Ist $f+g$ auf ganz X definiert, so ist auch $f+g$ integrierbar mit
$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu .$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ ein $\mathbb{R}$ Vektorraum.

(iii) Aus $f \leq g$ folgt $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$

(iv) Es gilt $\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$

<u>Beweis</u>: <u>Zu (i)</u>
Es genügt zu beachten dass für $c \geq 0$ gilt

$$(cf)_+ = cf_+ , \quad (cf)_- = cf_-$$

für $c<0$ gilt $(cf)_+ = -cf_-$

$$(cf)_- = -cf_+$$

zu (ii) Setze $F := f+g$. Es folgt

$$F = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-).$$

Aus Satz 16.5.9 (ii) ist F integrierbar

mit

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X F\,d\mu$$

$$= \int_X (f_+ + g_+)\,d\mu - \int_X (f_- + g_-)\,d\mu$$

$$= \left(\int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu\right)$$

$$+ \left(\int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu\right).$$

$$= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

zu (iii) Falls $f \leq g$, folgt $f_+ \leq g_+$

und $f_- \geq g_-$. Daraus ergibt sich

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \leq \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu$$

$$= \int_X g \, d\mu .$$

zu (iv) Dies folgt aus (iii) da

$$-|f| \leq f \leq |f| \qquad \blacksquare$$

Sprechweise: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum $P(x)$ eine Aussage über die Punkte $x \in X$.

Man sagt, P gelte μ-fast überall (kurz fast überall oder f.ü.) falls die Menge der Punkte $x \in X$, für die $P(x)$ falsch ist, eine Nullmenge ist.

z.B. Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar mit $\int_X f \, d\mu = 0$. Nach Satz 16.5.6 weißt man dass $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$

d.h. $f = 0$ (μ-) fast überall.

Satz 16.5.11 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(i) Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbar Funktion, so gilt $|f| < \infty$ fast überall (d.h. $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) = 0$)

(ii) Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen, so dass $f = g$ fast überall. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn g integrierbar ist und es gilt in diesem Fall

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

(grob gesagt, die Werte von f auf einer Nullmenge hat kein Beeinflussung zu dem Integral von f)

<u>Beweis</u>. <u>zu (i)</u>

Sei $M := \int_X |f| \, d\mu < \infty$

$S := \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $k \cdot \mathbb{1}_S \leq |f|$. Daraus folgt

$$\underbrace{k \int_X \mathbb{1}_S \, d\mu}_{= k\,\mu(S)} \leq \int_X |f| \, d\mu = M$$

$\forall k$.

Also, $\mu(S) = 0$ ∎

<u>zu (ii)</u> Sei $S := \{x : f(x) \neq g(x)\}$

Definiere $h: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$h(x) := \begin{cases} f(x) = g(x), & \text{falls } x \in X \setminus S \\ 0 & \text{, falls } x \in S \end{cases}$$

$$f_1 := f \, \mathbb{1}_S .$$

Die Funktionen h, f_1 sind messbar und es gilt $\int_X |f_1| \, d\mu = 0$ da $\mu(S) = 0$ (Satz 16.5.6 (iii)) (wegen (i)).

Zudem gilt $f = h + f_1$. Daher gilt

f ist integrierbar $\Leftrightarrow$ h ist integrierbar

analog gilt auch

g ist integrierbar $\Leftrightarrow$ h ist integrierbar.

Daraus folgt die Behauptung. ∎

<u>Bemerkung 16.5.12</u> Sei $N \subset X$ eine Nullmenge.

Sei $f: X \setminus N \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion.

Definiere $\tilde{f}: X \to [0,\infty]$

$$x \mapsto f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$$
$$x \mapsto 0 \quad x \in N$$

und $\int_X f \, d\mu := \int_X \tilde{f} \, d\mu$

(welche gleich $\int_{X \setminus N} f \, d\mu$ ist, wegen Satz 16.5.11)

Nach Satz 16.5.11 beachtet man dass $\forall$ jede Fortsetzung F von f auf X (d.h. $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $F|_{X \setminus N} = f$) gilt $\int_X F \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

<u>Satz 16.5.13</u> (Lemma von Fatou) Seien $f_n: X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

(i) $$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

(ii) Ist $\sup_{n \geq 1} f_n$ integrierbar, dann ist

$$\limsup_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_{n \to \infty} f_n \, d\mu.$$

<u>Beweis</u> <u>zu (i)</u>: Setze $g_k := \inf_{n \geq k} f_n$, $g_k \leq f_n \ \forall n \geq k$

Man bekommt: $(g_k)_k$ ist monoton wachsend

und $g_k \uparrow \liminf_{n \to \infty} f_n$ für $k \to \infty$

Satz von Levi impliziert

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X g_k \, d\mu$$

$$\leq \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} \int_X f_n \, d\mu =$$

(da $g_k \leq f_n \ \forall n \geq k$)

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu .$$

Zu (iii): Setze $h_k := \sup_{n \geq k} f_n$, $h_k \geq f_n \; \forall n \geq k$

Es gilt: $h_k \downarrow \limsup_{n\to\infty} f_n$ für $k \to \infty$.

h_1 ist integrierbar.

Definiere $\tilde{h}_k := h_1 - h_k \geq 0$

$$\tilde{h}_k \uparrow h_1 - \limsup_{n\to\infty} f_n := \tilde{h}_\infty$$

(punktweise außer der Nullmenge

$N := \{ \limsup_{n\to\infty} f_n = \infty \}$; man

beachte: $\limsup_{n\to\infty} f_n \leq h_1$, welche integrierbar ist)

Satz von Levi impliziert

$$\int_{X\setminus N} \tilde{h}_k \, d\mu \to \int_{X\setminus N} \tilde{h}_\infty \, d\mu$$

$$= \int_X \tilde{h}_\infty \, d\mu$$

$$= \int_X h_1 \, d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

Da $\int_{X\setminus N} \tilde{h}_k \, d\mu = \int_X \tilde{h}_k \, d\mu = \int_X h_1 \, d\mu - \int_X h_k \, d\mu$

$$\leq \int_X h_1 \, d\mu - \sup_{n \geq k} \int_X f_n \, d\mu$$

Es folgt $$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$ ∎

Satz 16.5.14 (Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue)

Seien $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ messbar, so dass

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall

(ii) $\exists\, g : X \to [0,\infty]$ integrierbar, so dass

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n| \leq g$ μ-fast überall.

Dann sind f_n, f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Beweis: Seien $f_{n,+} := \max\{f_n, 0\}$

$f_{n,-} := \max(-f_n, 0)$

Es folgt $f_{n,+} \to f_+$ fast überall

$f_{n,-} \to f_-$ ——

und $|f_{n,+}| \leq g, \quad |f_{n,-}| \leq g$

$$|f_n - f| \leq |f_{n,+} - f_+| + |f_{n,-} - f_-|$$

Daher genügt es, den Fall $f_n \geq 0, f \geq 0$ zu betrachten.

Seien $h_k := \sup_{n \geq k} f_n$ ($\Rightarrow h_1 \leq g$ f.ü. $\Rightarrow h_1$ ist integrierbar)

$$g_k := \inf_{n \geq k} f_n$$

Da die Nullmengen keinen Beitrag zum Integral haben (Satz 16.5.11 (ii)), ~~kann~~ O.B.d.A nehmen wir an dass $f_n \to f$ punktweise auf ganz X.

Daher gilt $f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ (punktweise).

Lemma von Fatou impliziert

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

Es folgt $\int_X f\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$

$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$ (f_n, f sind integrierbar wegen (ii))

Nun beachte: $\forall n \geq k$ gilt

$$f_n - f \leq h_k - f$$
$$\leq h_k - g_k$$

analog
$$f - f_n \leq h_k - f_n \leq h_k - g_k$$

Daraus folgt $$|f - f_n| \leq h_k - g_k$$

und $$\int_X |f - f_n| \, d\mu \leq \int_X (h_k - g_k) \, d\mu$$
$$\xrightarrow{k \to \infty} \int_X (f - f) \, d\mu = 0$$

(wegen des Beweises von Satz 16.5.13) ∎

Das Merkmal von Satz von Lebesgue ist:

Er zeigt:

Punktweise Konvergenz + (gleichmäßige) Integrierbarkeit
(Bedingung (i)) (Bedingung (iii))

$\Longrightarrow$ Konvergenz von der Folge von Integralen.

In der Praxis ist dieses hinreichende Kriterium viel leichter zu überprüfen als die gleichmäßige Konvergenz von der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

§16.6. Vergleich zwischen Lebesgue- und Riemannsches Integral

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

λ_1 das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Ziel: $\int_{[a,b]} f \, d\lambda_1$ und $\int_a^b f \, dt$

vergleichen, falls beide Integrale wohl-definiert sind.

Beispiel: Sei $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$. Man weisst schon

$$\int_{[a,b]} \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]} \, d\lambda_1 = 0$$

aber $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$ ist nicht (Riemann-) integrierbar. (Aufgabe)

Erinnerung: f heißt Riemann-integrierbar

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$

mit
$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \varepsilon \\ \varphi \leq f \leq \psi \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folgen von Treppenfunktionen

$(\varphi_n)_n, \ (\psi_n)_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

mit : $\exists M > 0$ mit $|\varphi_n| \le M$, $|\psi_n| \le M$ $\forall n$ und

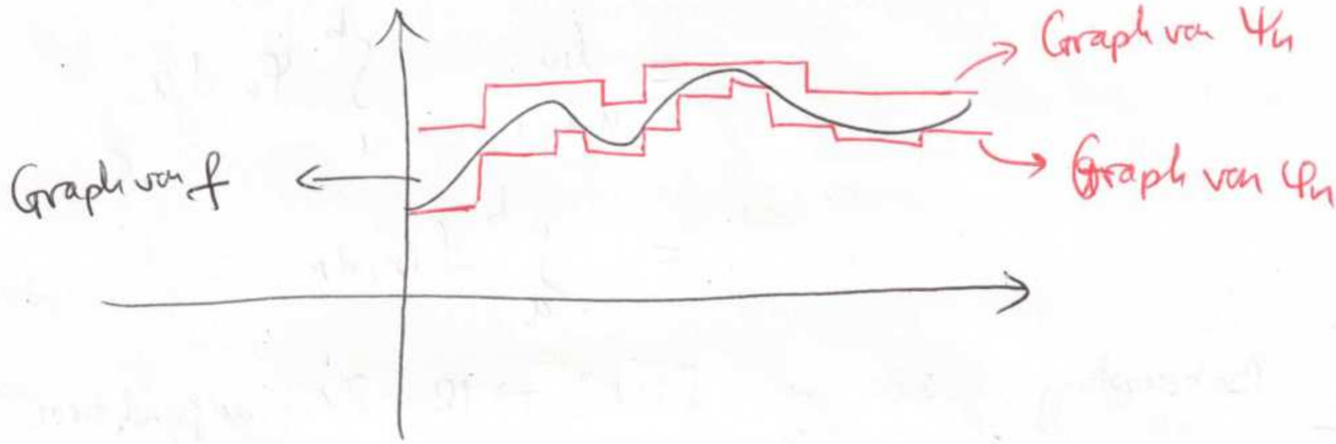
(i) $(\varphi_n)_n$ ist monoton wachsend

(ii) $(\psi_n)_n$ ist monoton fallend

(iii) $\varphi_n \le f \le \psi_n$

(iv) $\int_a^b \psi_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$



<u>Satz 16.6.1</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f Lebesgue-messbar und das Riemannsches Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda_1$$

Beweis: Seien $(\varphi_n)_n$, $(\psi_n)_n$ wie oben.

Setze $\varphi := \lim_{n\to\infty} \varphi_n$, $\psi := \lim_{n\to\infty} \psi_n$

Es gilt $\varphi \leq f \leq \psi$

und $$\int_{[a,b]} \varphi \, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, d\lambda_1$$

(Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)

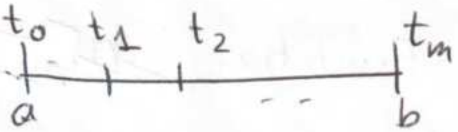
$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, dx$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

[Behauptung: sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion

dann gilt $\int_a^b g(x)\,dx = \int_{[a,b]} g \, d\lambda_1$

Beweis.



Sei $g = \alpha_j$ auf $[t_j, t_{j+1})$

für $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \,(t_{j+1} - t_j)$$

$$\int_{[a,b]} g \, d\lambda_1 = \int_{[a,b]} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \, \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})} \Big) d\lambda_1$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \quad \lambda_1 ([t_j , t_{j+1}))$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \ (t_{j+1} - t_j) = \int_a^b g(x) dx$$

Analog gilt $\int_{[a,b]} \psi \, d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx$

Es folgt $\left. \begin{array}{l} \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \, d\lambda_1 = 0 \\ \psi - \varphi \geq 0 \end{array} \right.$

Satz 16.5.6 (vi) impliziert $\psi - \varphi = 0$ fast überall.

Da $\varphi \leq f \leq \psi$, erhält man

$f = \varphi = \psi$ fast überall. Es folgt:

f ist Lebesgue-messbar und

$$\int_{[a,b]} f \, \lambda_1 = \int_{[a,b]} \varphi \, d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx$$

$\blacksquare$

Ergänzung zum Satz 16.6.1

Bemerkung 16.6.2:

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall
$f: I \to \mathbb{R}$ so dass die uneigentliche Integrale von $|f|$ und f über I existieren. Dann ist f Lebesgue-integrierbar (d.h. λ_1-integrierbar) und stimmt das uneigentliche Integral von f über I mit dem Lebesgue-Integral überein.

z.B. $I = (a, b]$.

Existieren $\int_a^b |f|\, dx$ und $\int_a^b f dx$, so gilt

$$\int_a^b f\, dx = \int_{(a,b]} f\, d\lambda_1$$

(ii) Wenn nur das uneigentliche Integral von f über I existiert, im Allgemeinen muss f nicht unbedingt Lebesgue-integrierbar über I sein.

Beweis von (i) und Beispiel für (ii) werden in der Übung besprochen.

§ 16.7. Produktmaße und der Satz von Fubini

Definition 16.7.1 Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Die Produkt σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ist die von $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ induzierte σ-Algebra, wobei

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} := \{ A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$$

Bemerkung 16.7.2 (i) $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ (Borelsche σ-Algebra), $Y = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

Dann gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+k})$$

Beweis: Die Inklusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+k})$ ist klar. Anderseits nach Satz 16.1.5 gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+k}) &= A_\sigma(\{\text{Quadern in } \mathbb{R}^{m+k}\}) \\
&= A_\sigma(\mathcal{Q}_{m+k}) \\
&= A_\sigma(\mathcal{Q}_m * \mathcal{Q}_k) \\
&\subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{Q}_m * \mathcal{Q}_k = \{ Q_1 \times Q_2 : Q_1 \in \mathcal{Q}_m, \; Q_2 \in \mathcal{Q}_k \}$$

(ii) Es gilt

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathscr{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}^{k+m})$$

(echte Teilmenge)

Beweis: Seien $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k)$, $B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$.

Bemerkung 16.3.2 $\Rightarrow$ $\exists\ A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$
$N_1 \subset \mathbb{R}^k$, $N_2 \subset \mathbb{R}^m$

mit $\left\{ \begin{array}{l} A = A' \sqcup N_1, \quad B = B' \sqcup N_2 \\ \lambda_k(N_1) = 0, \quad \lambda_m(N_2) = 0 \end{array} \right.$

Es folgt $N_1 \times \mathbb{R}^m$ ist λ_{k+m}-Nullmenge
$\mathbb{R}^k \times N_2$ ist λ_{k+m}-Nullmenge

Es gilt

$$A \times B = \underbrace{(A' \times B')}_{\substack{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m}) \\ \text{(nach (i))}}} \cup \underbrace{(N_1 \times B) \cup (A \times N_2)}_{\lambda_{k+m}\text{-Nullmengen}}$$

$$\in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{k+m}).$$

Sei nun $E \subset \mathbb{R}^k$ aber $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^k)$
(siehe Beispiel 16.3.5 (vi) oder Übungsblatt)

Sei $N \subset \mathbb{R}^m$ mit $\lambda_m(N) = 0$ ($\Rightarrow \mathbb{R}^k \times N$ ist λ_{k+m}-Nullmenge)

Daraus folgt $\lambda_{k+m}(E \times N) = 0$

$\Rightarrow \quad E \times N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+m})$. Aber $E \times N$ ist kein Element in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

(Siehe Lemma 16.7.3)

<u>Lemma 16.7-3</u> Sei $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Seien $a \in X$, $b \in Y$, und

$$M_a := \{ y \in Y : (a, y) \in M \}$$
$$M^b := \{ x \in X : (x, b) \in M \}.$$

Dann sind $M_a \in \mathcal{B}$, $M^b \in \mathcal{A}$.

Weiter für jede messbare Abbildung

$$f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$$

sind die Schnitte $f(a, \cdot) : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$

und $f(\cdot, b) : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$

wieder messbar.

<u>Beweis</u>: Definiere

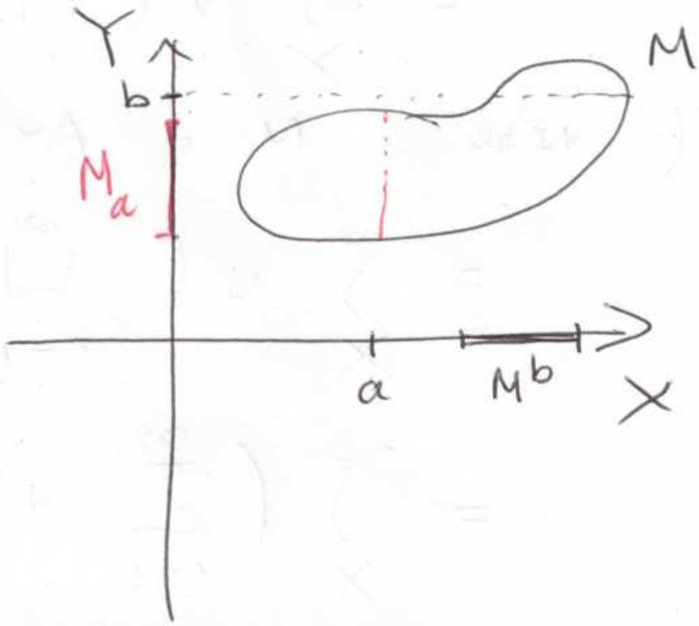
$$\mathcal{M} := \{ M \subset X \times Y : M_a \in \mathcal{B}, M^b \in \mathcal{A} \ \forall a \in X, b \in Y \}$$

$\subset \mathcal{P}(X \times Y)$

Beachte $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra (da $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Algebren sind) und

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} \subset \mathcal{M}.$$

Es folgt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Daher ist die erste Behauptung wahr. Die zweite Behauptung folgt direkt aus der ersten. ∎



Satz 16.7.4 Es gibt ein Maß

$$\rho : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

so dass $\rho(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)$ $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$.

Beweis. Definiere
$$\rho : \mathcal{A} * \mathcal{B} \to [0, \infty]$$
$$A \times B \mapsto \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Wir zeigen ρ ist σ-additiv

Sei $A \times B = \biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)$, $A, A_n \in \mathcal{A}$, $B, B_n \in \mathcal{B}$

Es gilt

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) = \int_X \nu(B)\, \mathbb{1}_A(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_X \nu(M_x)\, d\mu(x)$$

(wobei $M := A \times B$)

$$= \int_X \nu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)_x \right) d\mu(x)$$

$$= \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu\left((A_n \times B_n)_x \right) \right) d\mu(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu\left((A_n \times B_n)_x \right) d\mu(x)$$

(Satz von Levi angewendet auf

$$f_k(x) := \sum_{n=1}^{k} \nu((A_n \times B_n)_x) \Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n \times B_n).$$

Daher ist ρ σ-additiv. Daraus folgt dass ρ eine wohldefinierte σ-additive Abbildung auf der Algebra $\mathcal{E} := \{$ endliche Vereinigung von Elementen in $\mathcal{A} * \mathcal{B}\}$

(ähnlich wie Satz 16.1.12).

Der Fortsetzungssatz (Satz 16.2.4) gibt uns ein Maß $\rho : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$, das $\rho : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ erweitert. (da $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$) ∎

<u>Satz 16.7.5</u> Seien μ und ν σ-endlich. Dann gilt:

(i) $\exists !$ ein Maß $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$

mit $\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}$
(*) $\qquad \forall B \in \mathcal{B}$.

Das Maß $\mu \otimes \nu$ heißt <u>Produktmaß</u> von μ und ν.

(ii) $\forall M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sind die Funktionen

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow [0,\infty] \\ x &\longmapsto \nu(M_x) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} Y &\longrightarrow [0,\infty] \\ y &\longmapsto \mu(M^y) \end{aligned}$$

messbar und gilt

$$(\mu \otimes \nu)(M) = \int_X \nu(M_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(M^y)\, d\nu(y)$$

(Prinzip von Cavalieri)

<u>Beweis</u> Das Maß ρ aus Satz 16.7.4 ist ein Maß, das die Bedingung $(\forall)$ erfüllt.

Sei nun $\xi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein Maß so dass $(\forall)$ gilt:

$$\xi(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)$$

$\forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$. Es folgt

$$\xi = \rho \quad \text{auf} \quad \mathcal{A} * \mathcal{B}$$

daher gilt auch $\xi = \rho$ auf $\mathcal{E}$, die Algebra im Beweis von Satz 16.7.4.

Zudem ist ρ und ξ σ-endlich.

(da μ, ν σ-endlich sind: $\exists (A_n)_n \subset \mathcal{A}$, $(B_n)_n \subset \mathcal{B}$ mit
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$
und $\mu(A_n) < \infty$, $\nu(B_n) < \infty$ $\forall n$, gilt
$$\xi(A_i \times B_j) = \rho(A_i \times B_j) = \mu(A_i) \times \nu(B_j) < \infty$$
$$X \times Y = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (A_i \times B_j) \quad)$$

Daraus folgt, nach Satz 16.2.8, dass
$$\xi = \rho \quad \text{auf} \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Zu (ii) Der Beweis für die Messbarkeit von Funktionen $X \to [0,\infty]$, $x \mapsto \nu(M_x)$, $Y \to [0,\infty]$, $y \mapsto \mu(M^y)$ wird nicht besprochen. Die Idee ist ähnlich wie dem Beweis von Lemma 16.7.3 aber schwieriger.

Wir zeigen nur das Prinzip von Cavalieri.

Definiere

$$\tilde{\rho} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$$
$$M \mapsto \int_X \nu(M_x)\, d\mu$$

Man überprüft leicht dass $\tilde{\rho}$ ein Maß ist (ähnliche Argumente wie im Beweis von Satz 16.7.4)

Zusätzlich gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(A \times B) &= \int_X \nu\left((A\times B)_x\right) d\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_A \cdot \nu(B)\, d\mu \\ &= \nu(B)\,\mu(A) = \mu\otimes\nu(A\times B)\end{aligned}$$

Nach dem ersten Teil gilt $\tilde{\rho} = \mu \otimes \nu$.

Das zeigt die erste Gleichung im Prinzip von Cavalieri. Die zweite Gleichung für $\mu(M^y)$ wird analog bewiesen. ∎

<u>Folgerung 16.7.6</u> $\forall M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mu \otimes \nu(M) = 0$

(ii) $\nu(M_x) = 0$ μ-fast überall in X

(iii) $\mu(M^y) = 0$ ν-fast überall in Y.

<u>Beweis</u> ~~klar~~ klar aus Prinzip von Cavalieri und Satz 16.5.6 (vi).

<u>Beispiel 16.7.7</u>

(i) $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$Y = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

Es gilt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$

$$\lambda_{k+m}(A \times B) = \lambda_k(A)\,\lambda_m(B) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$
$$= \lambda_k \otimes \lambda_m(A \times B) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

(<u>weil</u>: die Gleichheit gilt für Quadern, daher für Borelsche Mengen)

Daraus folgt $\lambda_{k+m} = \lambda_k \otimes \lambda_m$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$. Deshalb ist $(\mathbb{R}^{k+m}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+m}), \lambda_{k+m})$

die Vervollständigung von $\left(\mathbb{R}^{k+m}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \lambda_k \otimes \lambda_m \right)$.

$\forall\ M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+m})\ \exists\ \tilde{M} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$ und

$\tilde{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$ und $N \subset \tilde{N}$ mit

$\lambda_{k+m}(N) = 0$ und $M = \tilde{M} \sqcup N$.

Nach Folgerung 16.7.6 gilt

$$\lambda_k(M^y) = \lambda_k(\tilde{M}^y) \text{ f.ü}$$

$$\left(M^y = \tilde{M}^y \sqcup N^y;\ \lambda_k(N^y) = 0 \quad \lambda_m\text{-f.ü.} \right)$$

$$\lambda_m(M_x) = \lambda_m(\tilde{M}_x) \text{ f.ü.}$$

Prinzip von Cavalieri besagt

$$\lambda_{k+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_k(M^y)\, d\lambda_m$$

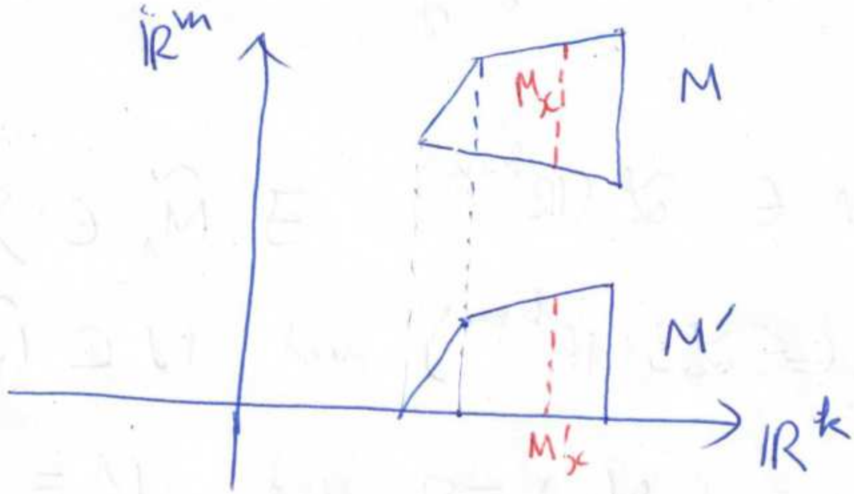
$$= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_m(M_x)\, d\lambda_k$$

Daher $\forall\ M, M' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+m})$: ist

$\lambda_m(M_x) = \lambda_m(M'_x)$ λ_k-f.ü, so gilt

$$\lambda_{k+m}(M) = \lambda_{k+m}(M'_x)$$

analog für M^y und M'^y.



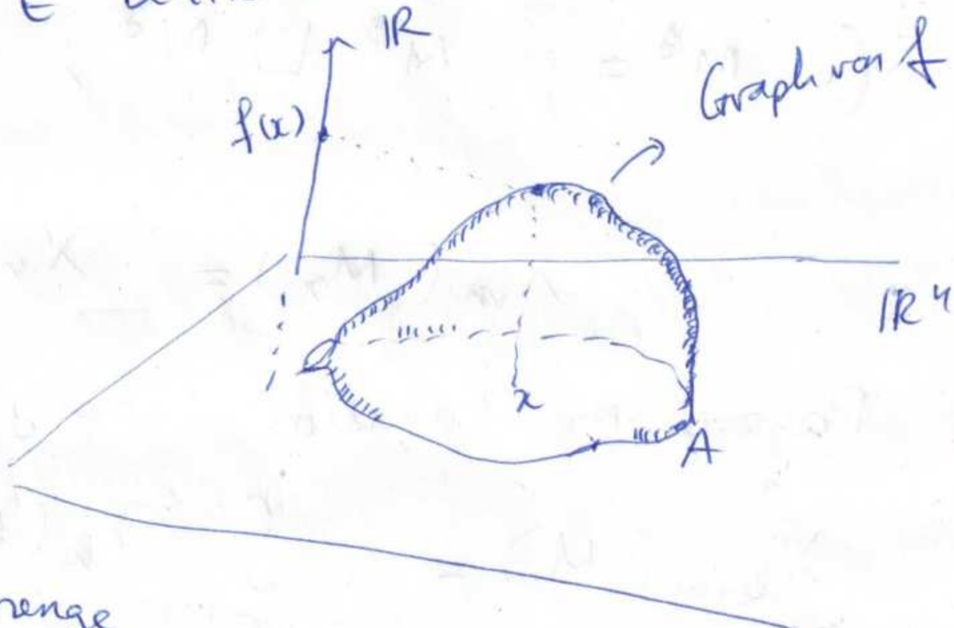
Länge von M_x = Länge von M'_x

$\Rightarrow$ Flächeninhalt von M = Flächeninhalt von M'

(ii) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und

$f : A \to [0, \infty)$

messbar



Die Ordinatenmenge

$$U_f := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} x \in A \\ y \in [0, f(x)] \end{array} \right\}$$

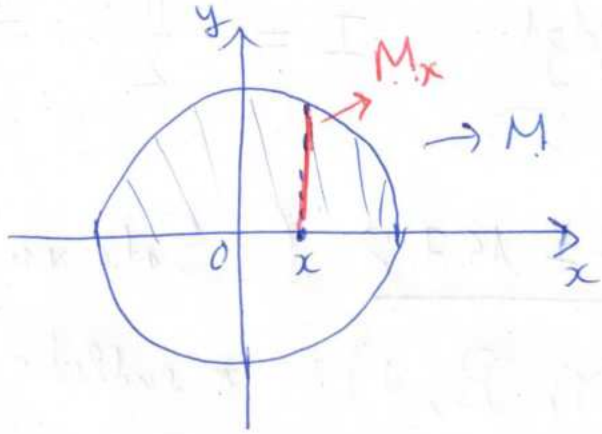
Dann gilt $(U_f)_x = [0, f(x)] \subset \mathbb{R}$

und $\lambda_{n+1}(U_f) = \int_A f(x) \, d\lambda_n(x)$

Dies verallgemeinert die Formel für den Flächeninhalt von U_f wenn $n=1$.

(iii) Sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$$



$$M_x = [0, \sqrt{1-x^2}]$$

$A = [-1, 1]$, $M = U_f$, wobei

$$f : A \to [0, \infty], \quad x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$

Nach (ii) gilt

$$\lambda_2(M) = \int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\, d\lambda_1$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi$$

$(x = \sin\varphi)$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi =: I$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\sin\varphi = \cos\varphi \sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2\varphi)\, d\varphi = \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

Es folgt $\quad I = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2(M) = \frac{\pi}{2}$.

<u>Satz 16.7.8</u> (Satz von Fubini) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und sei $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $(\mu\otimes\nu)$-integrierbare Funktion.

Dann gibt es Nullmengen $N \subset X$, $M \subset Y$ so dass

$$f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(Y, \nu) \quad \forall x \in X \setminus N$$

$$f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \quad \forall y \in Y \setminus M$$

Die Funktionen

$$X\setminus N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$$

$$Y\setminus M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

sind integrierbar auf $X\setminus N$, bzw. auf $Y\setminus M$, und gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\setminus N} \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \Big) =$$

$$= \int_{Y \setminus M} \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Bemerkung: analog wie Bemerkung 16.5.12

für einen Maßraum $(Z, \mathcal{E}, \xi)$ und $N \subset \mathcal{E}$ Nullmenge, $f : Z \setminus N \to \overline{\mathbb{R}}$ ξ-integrierbar, definieren wir

$$\int_Z f \, d\xi := \int_{Z \setminus N} f \, d\xi$$

und jede messbare Fortsetzung F von f auf Z erfüllt

$$\int_Z F \, d\xi = \int_Z f d\xi$$

Daher in der Gleichheit im Satz von Fubini kann man $\int_X$ (bzw. $\int_Y$) statt $\int_{X \setminus N}$ (bzw. $\int_{Y \setminus M}$) schreiben.

Beweis vom Satz von Fubini:

Schritt 1: wenn $f = \mathbb{1}_M$, wobei $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, ist die Behauptung genau Satz 16.7.5 (ii). Daraus folgt dass die Behauptungen gelten für einfache Funktionen.

Schritt 2. Nach Zerlegung $f = f_+ - f_-$, O.B.d.A angenommen $f: X \times Y \to [0,\infty]$.

Aus Satz von Beppo Levi folgt: Ist $(\varphi_n)_n$ eine Folge von einfachen Funktionen: $X \times Y \to [0,\infty)$ mit $\varphi_n \uparrow f$, so gilt

$$\int_{X\times Y} \varphi_n \, d(\mu\otimes\nu) \to \int_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\nu)$$

Die rechte Seite $= \int_X \left(\varphi_n(x,\cdot)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)$

(nach Schritt 1)

$$\longrightarrow \int_X \left(f(x,\cdot)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

nach Satz von Beppo Levi. Daraus folgt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(f(x,\cdot)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

Analog für $\int_Y \left(f(\cdot,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Die Existenz von N, M folgt aus Satz 16.5.11 (i) ∎

Folgerung 16.7.9 (Fubini - Tonelli)

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume.

$f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$-messbar.

Ist eines der Integrale

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x),$$

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

endlich, so ist f $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-integrierbar und gilt

$$(*) \quad \int_{X \times Y} f(x,y) \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Beweis: $\left\{ \begin{array}{l} f = f_+ - f_- \\ \text{Nach Voraussetzung} \end{array} \right.$, genügt es, $f \geq 0$ zu betrachten.

Beweis vom Satz von Fubini zeigt dass

$(*)$ gilt für $f \geq 0$ ∎

Folgerung 16.7.10 Seien $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ (Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^k$), $Y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, Sei $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-messbare Funktion. Ist eines der Integrale

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \, d\lambda_k(x) \right) d\lambda_m(y)$$

endlich, so ist f λ_{k+m}-integrierbar und gilt

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \, d\lambda_{k+m} = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\lambda_k(x) \right) d\lambda_m(y)$$

<u>Beweis</u> offensichtlich da

$$\lambda_{k+m} = \lambda_k \otimes \lambda_m \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m).$$

Man muss trotzdem beachten, dass die Funktion

$x \mapsto f(x,y)$ nur messbar und μ-integrierbar ist für ν-fast all $y \in Y$. Analog für $y \mapsto f(x,y)$.

Dieses Phänomen erscheint häufig in der Integrationstheorie aber kann, bis zu einem gewissen Grad, ignoriert werden wenn man nur das Integral der Funktionen betrachtet (siehe wieder Bemerkung nach dem Satz 16.7.8) ∎

Beispiel 16.7.1.1: (i) $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man kann zeigen dass (hier benutzen wir uneigentliche Riemann-Integrale)

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$

Nach Satz von Fubini ist f nicht (Lebesgue)-integrierbar über $[0,1]^2$.

(ii) Sei $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$ $\forall j = 1, 2, \dots, n$.

Sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Da K kompakt ist, nach Stetigkeit von f, gilt: f ist beschränkt daher $f \in \mathcal{L}^1(K, \lambda_n)$. Satz von Fubini (und Induktion) ergibt

$$\int_K f(x_1, \dots, x_n)\, d\lambda_n(x) = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \dots \right) dx_n$$

Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden.

(iii) $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_0)$

$$\left(\begin{array}{rcl} \mu_0 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & [0,\infty] \\ A & \mapsto & |A| \end{array} \right.$$

Siehe Beispiel 16.1.11 (i))

Sei $\tilde{f} : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ beliebig. Dann ist $\tilde{f}$ messbar (bzgl. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). Beachte

$$\int_{\mathbb{N}} \tilde{f}(x)\, d\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(n)$$

Sei nun $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0,\infty]$

$$a_{nm} := f(n,m) \quad , n,m \in \mathbb{N}$$

Satz von Fubini besagt

$$\int_{\mathbb{N}^2} f(n,m)\, d(\mu_0 \otimes \mu_0) = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n,m)\, d\mu_0(n) \right) d\mu_0(m)$$

oder

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} .$$

Die gleiche Formel gilt auch wenn $a_{nm} \in \mathbb{R}$

mit: $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}|$ konvergent

oder $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|$ konvergent.

Das ist der große <u>Umordnungsatz</u> für Doppel<u>reihen</u>.

§ 16.8. Transformationssatz

<u>Definition 16.8.1</u> Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Setze

$$t_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto v + x$$

, genannt <u>Translation um v</u>,

und $$v + A := t_v(A) = \{ v + x : x \in A \}$$

<u>Satz 16.8.2</u> Das Lebesgue-Maß λ_n ist <u>Translationsinvariant</u>, d.h. $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, gilt

$$\lambda_n(v + A) = \lambda_n(A)$$

<u>Beweis</u>: Beachte t_a ist stetig, daher ist $v + A$ messbar. Sei $Q \in \mathcal{Q}_n$ ein Quader

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n, \quad v = (v_1, \dots, v_m)$$

$$v + Q = (v_1 + I_1) \times \dots \times (v_n + I_n)$$

$$\lambda_n(Q) = \lambda_1(I_1) \times \dots \times \lambda_n(I_n)$$
$$= \lambda_1(v_1 + I_1) \times \dots \times \lambda_n(v_n + I_n) = \lambda_n(v + Q)$$

Zu dem definieren wir $\mu: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$

$$A \mapsto \lambda_n(v+A)$$

Beachte: μ ist ein Maß, welches σ-endlich ist.

Die Argumente am Anfang des Beweis zeigt $\lambda_n = \mu$ auf $\mathcal{Q}_n$, daher auch auf $\mathcal{R}_n$, weil jede Figur sich als disjunkte Vereinigung der Quadern lässt.

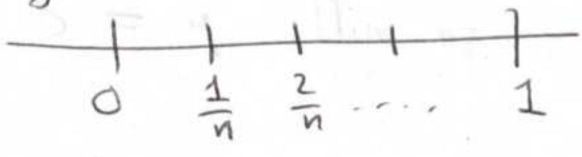
($\mathcal{R}_n$ = die Algebra der Figuren).

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung (Satz 16.2.8) ergibt $\lambda_n = \mu$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ∎

<u>Satz 16.8.3</u> Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu((0,1]^n) = 1$, so ist $\mu = \lambda_n$, d.h. das Lebesgue-Maß ist sogar das einzige translationsinvariante Maß μ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, das der Normierungsbedingung

$$\mu((0,1]^n) = 1.$$

<u>Beweis</u>: Zerlege



für $n \in \mathbb{N}$

Man erhält: $\forall\, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(0,1]^n = \bigsqcup \left(\prod_{k=1}^{n} (0, \tfrac{1}{m_k}) + \left(\tfrac{k_1}{m_1}, \dots, \tfrac{k_m}{m_n} \right) \right)$$

wobei $\bigsqcup$ über alle $k_1, \dots, k_m$ mit

$$0 \le k_j \le m_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

läuft. Translationsinvarianz von μ impliziert

$$\mu \left(\prod_{k=1}^{n} (0, \tfrac{1}{m_k}) \right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k}$$

Nach dieser und der Voraussetzung gilt

$$\mu(Q) = \lambda_n(Q) \quad \forall\, Q \in \mathcal{Q}_n$$

mit rationalen Endpunkte. Da rationale Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ sind, gilt

$$\mu(Q) = \lambda_n(Q) \quad \forall\, Q \in \mathcal{Q}_n$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

<u>Folgerung 16.8.4</u> Ist μ ein σ-endliches translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dann existiert $\alpha \in [0, \infty)$ mit $\mu = \alpha \cdot \lambda_n$

<u>Beweis</u>: setze $\alpha := \mu((0,1]^n) < \infty$ da μ σ-endlich ist.

Ist $\alpha = 0$, so gilt $\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \cdot \lambda_n$

Ist $\alpha > 0$, so erfüllt $\frac{1}{\alpha}\mu$ die Bedingung vom Satz 16.8.3. Deshalb gilt $\frac{1}{\alpha}\mu = \lambda_n$. ∎

<u>Satz 16.8.5</u> (Bewegungs-Invarianz des Lebesgue-Maßes)

Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $S \in O(n)$ (d.h. S ist eine orthogonale Matrix von $\mathbb{R}^n$)

$$\beta_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \beta_S(x) := v + Sx$$

(β heißt eine <u>Bewegung</u> des $\mathbb{R}^n$). Dann gilt

(1) $\lambda_n(\beta_S(A)) = \lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Allgemeiner für $\forall T \in GL(n, \mathbb{R})$ (d.h. T ist eine invertierbare $(n\times n)$-Matrix), gilt

(2) $\lambda_n(\beta_T(A)) = |\det T| \, \lambda_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

wobei $\beta_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$$x \mapsto v + T.x$$

<u>Beweis</u> Man sieht, (1) ist eine Konsequenz von (2), da $|\det T| = 1$.

Definiere $\mu_T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$
$$A \mapsto \lambda_n(T(A))$$

Beachte μ_T ist ein σ-endliches translations invariantes Maß.

Aus Satz 16.8.4 folgt : $\exists\ \alpha \in (0,\infty)$

mit $\mu_T(A) = \alpha \cdot \lambda_n(A)$ $(\ast)$

$\forall A \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n)$

Man bestimmt nun α.

<u>Fall 1</u>: $T \in O(n)$

wähle $A = \mathbb{B}_n$ = die einheite Kugel.

Da $T \in O(n)$, gilt $T(\mathbb{B}_n) = \mathbb{B}_n$. Deshalb gilt $\alpha = 1$ (nach $(\ast)$ für $A = \mathbb{B}_n$) und folgt (1).

<u>Fall 2</u>: T allgemein $\in GL(n,\mathbb{R})$.

Nach linearer Algebra weißt man: $\exists\ S_1, S_2$ orthogonale Matrizen und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist mit

$T = S_1 D S_2$.

Beachte

$$D([0,1]^n) = (0, |\lambda_1|] \times \dots \times (0, |\lambda_n|]$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Diagonalelemente von D sind.

Deshalb gilt $\mu_D([0,1]^n) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n|$
$= |\det T|$

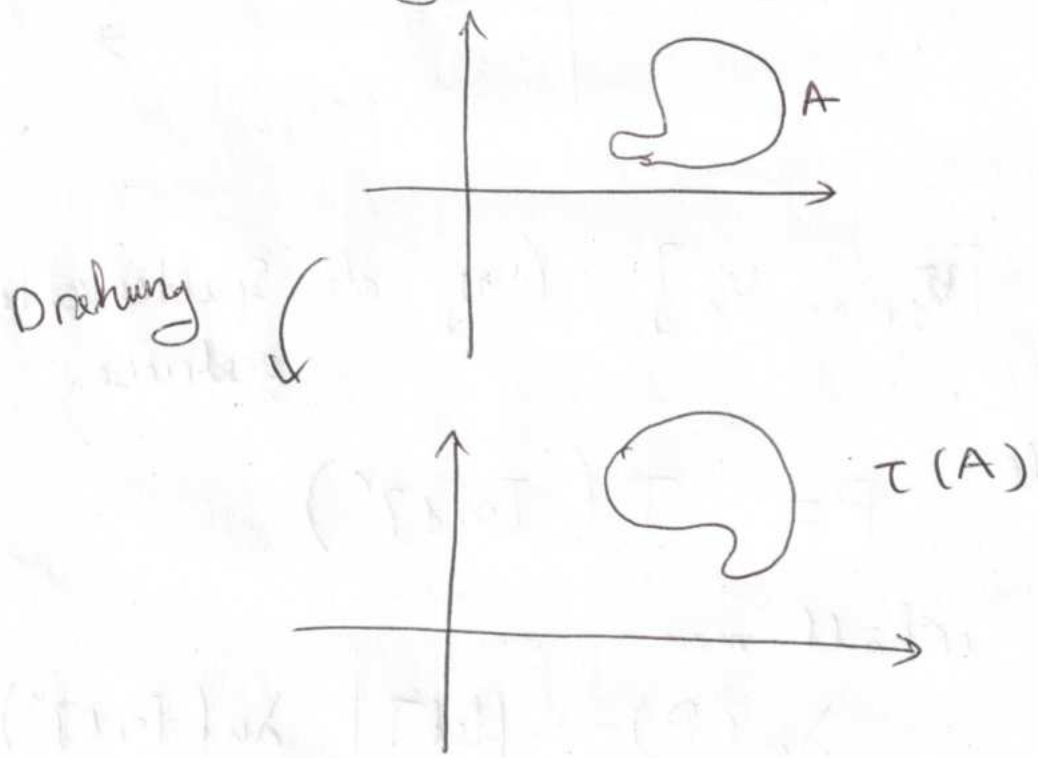
$(\ast)$ liefert $\mu_D(A) = |\det T|\ \lambda_n(A)$.

Es folgt

$$\mu_T(A) = \mu_{S_1 D S_2}(A)$$
$$= \mu(S_1 D S_2(A))$$
$$= \mu(S_1(DS_2(A)))$$
$$= \lambda_n(DS_2(A))$$
$$= |\det T| \; \lambda_n(S_2(A))$$
$$= |\det T| \; \lambda_n(A) \qquad \blacksquare$$

Beispiel 16.8.6

(i) eine Drehung τ in $\mathbb{R}^2$ ist eine Bewegung



(ii) Sei $\delta \in \mathbb{R}$, $T_\delta(x) := \delta x$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\det T_\delta = \delta^n$. Daher $\lambda_n(\delta A) = \delta^n \lambda_n(A)$

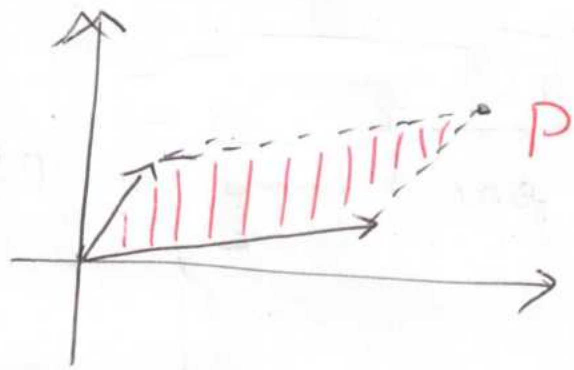
wobei $\delta A := T_\delta(A)$.

(iii). Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$.

Definiere den von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannten Parallelotop

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \; : \; 0 \le t_i \le 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Dann gilt $\lambda_n(P) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$



Beweis:

$T := [v_1, \dots, v_n]$ (v_j als Spaltenvektor geschrieben)

Es gilt $P = T([0,1]^n)$

Daher erhält man

$$\lambda_n(P) = |\det T| \, \lambda_n([0,1]^n) = |\det T| \quad \blacksquare$$

Es gilt auch $|\det(v_1, \dots, v_n)| = \sqrt{G(v_1, v_2, \dots, v_n)}$

(siehe Satz 15.2.6).

Satz 16.8.7 (Transformationsformel) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

(i) Ist $f : V \to [0,\infty)$ Lebesgue-messbar, so ist $(f \circ \Phi)\,|\det J_\Phi| : U \to [0,\infty)$ Lebesgue-messbar und gilt

$$(*) \quad \int_V f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_U (f \circ \Phi)(x)\, |\det J_\Phi(x)|\, d\lambda_n(x).$$

(ii) Eine messbare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \Phi)\,|\det J_\Phi|$ integrierbar ist, und es gilt $(*)$.

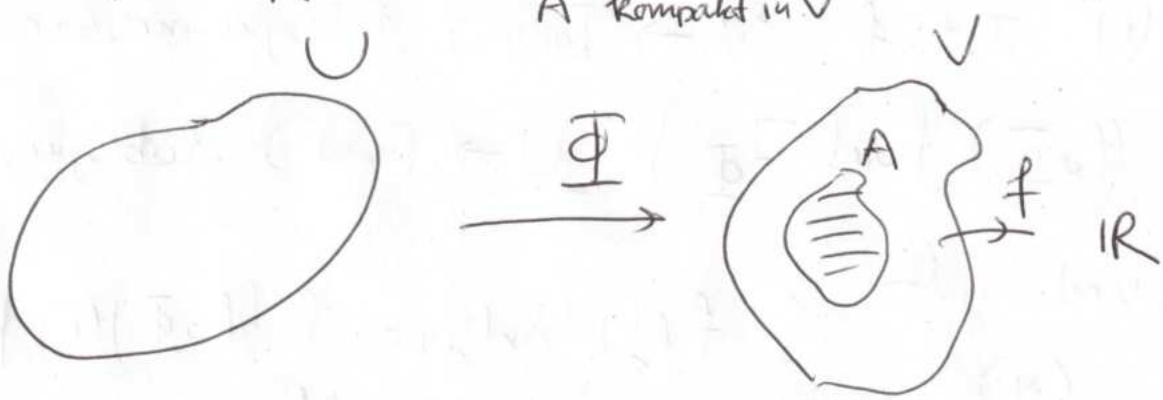
Bemerkung: (i) Sind $U = (a,b)$, $V = (c,d)$ Intervalle in $\mathbb{R}$, finden wir wieder den Substitutionsregel.
(ii) Ist Φ linear, folgt $(*)$ aus Satz 16.8.5.

Beweis Wir besprechen nur die Idee von dem Beweis.

Schritt 1: Nach Approximation von f durch einfachen Funktionen (und Satz von Beppo Levi) genügt es

(∗) für $f = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.

<u>Schritt 2</u> Charakterisierung der Lebesgue-messbaren Mengen (Satz 16.3.3) zeigt dass es reicht, (∗) für $f = \mathbb{1}_A$ mit $A \subset V$ offen, $\overline{A}$ kompakt in V zu zeigen.

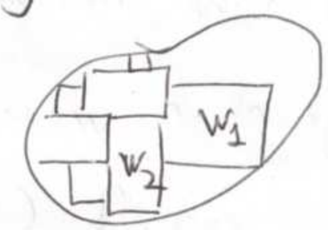


<u>Schritt 3</u> Überdecken A mit Würpel

$$A = \left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} W_j\right) \sqcup N$$

(N eine Nullmenge)

W_j mit Kartenlänge ε



Ist ε genug klein, verhält Φ wie ein lineare Abbildung: genau gesagt

$$\Phi(x) = \Phi(a) + d\Phi(a)(x-a) + O(\varepsilon)$$

wobei $W_j = \prod_{s=1}^{n} (a_s - \varepsilon, a_s + \varepsilon)$.

Setze

$$T(v) := \Phi(a) + d\Phi(a)(v), \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Wenden wir den Satz 16.8.5 auf T und W_j an, bekommen wir (∗). ∎

<u>Beispiel</u>: (i) Sei $n=2$, $U=(0,\infty)\times(0,2\pi)$

$$V=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0): x\geq 0\}$$

Sei $P: U \to V$ Diffeomorphismus.

$$(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Es gilt
$$J_P(r,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$$

Da $\{(x,0): x\geq 0\}$ eine Nullmenge ist, nach der Transformationsformel, gilt $\forall f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ integrierbar

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d\lambda_2 = \int_V f(x,y)\,d\lambda_2$$

$$= \int_U (f\circ P)(r,\theta)\, r\, d\lambda_2(r,\theta)$$

$$= \int_{[0,\infty]}\left(\int_{[0,2\pi]} f(P(r,\theta))\,d\lambda_1(\theta)\right)d\lambda_1(r)$$

Man schreibt oft $\int_a^b f(x)\,dx$ anstelle

$\int_{[a,b]} f\,d\lambda_1$ für $\forall$ Lebesgue-integrierbare Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$(a,b\in\overline{\mathbb{R}},\ a<b)$

(ii) Wir berechnen das Gaußsche Fehlerintegral

$$\delta := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \quad \Big(= \text{Lebesgue-Integral von } e^{-x^2} \text{ über } \mathbb{R} = \text{das uneigentliche Integral von } e^{-x^2} \text{ über } \mathbb{R} \Big)$$

Beachte

$$\delta^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}dx\Big)dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d\lambda_2(x,y)$$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\theta\Big)dr$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr$$

$$\overset{\text{Transformationsformel}}{=} \pi \int_0^\infty e^{-\tilde r}\,d\tilde r$$

$$\Big(\Phi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \quad r \longmapsto r^2 =: \tilde r \Big)$$

$$= \pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-\tilde r}\,d\tilde r = \pi \lim_{R\to\infty}\big(1-e^{-R}\big)$$

$$= \pi$$

(713)

Es folgt
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

§ 16.9. Satz von Stokes

Erinnerung: Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis

von $\mathbb{R}^n$, $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ dual

Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$.

Erinnere $\frac{\partial}{\partial x_j}(a) = e_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$
$\forall a \in \mathbb{R}^n$

$dx_j(a) = e_j^* \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

$dx_j \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$; $\frac{\partial}{\partial x_j}$ sind Vektorfelder

in $\mathbb{R}^n$.

Die differentiale n-Form $\omega_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$\in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ definiert die Standardorientierung

auf $\mathbb{R}^n$.

<u>Definition 16.9.1</u> Sei $(M_1, [\omega_1]), (M_2, [\omega_2])$

Orientierte Umgkt von Dimension n. Sei

$\Phi : M_1 \to M_2$ glatte Diffeomorphismus.

Φ heißt <u>orientierungserhaltend</u> (bzw. <u>Orientierungsumkehrend</u>)

falls $\Phi^* \omega_2 = \lambda\, \omega_1$ für $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$ und

$\lambda(x) > 0 \ \forall x \in M_1$ (bzw. $\lambda(x) < 0 \ \forall x \in M_1$),

Beachte dass $\lambda = \det J\Phi$ falls $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen sind $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{\mathbb{R}^n}$.

Es gilt

Φ ist orientierungserhaltend $\Leftrightarrow$ $D\Phi : T_x M_1 \to T_{\Phi(x)} M_2$
(bzw. orientierungsumkehrend) ist orientierungserhaltend
(bzw. orientierungsumkehrend)

(siehe Definition 15.2.7)

<u>Beispiel</u>: Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch
($\mathbb{R}^n$ ist versehen mit der Standardorientierung)

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (2x_1, x_1^2 + x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned}\Phi^* \omega_{\mathbb{R}^n} &= d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_n \\ &= d(2x_1) \wedge d(x_1^2 + x_2) \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= 2\, dx_1 \wedge (2x_1 dx_1 + dx_2) \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = 2\, \omega_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

daher ist Φ orientierungserhaltend.

<u>Definition 16.9.2</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Seien $\omega \in \Omega^n(U)$, $A \subset U$ Lebesgue-messbar.
Schreibe $\omega = f\, \omega_{\mathbb{R}^n}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Falls f

Lebesgue-integrierbar über A ist, definieren wir

$$\int_A \omega := \int_A f \, d\lambda_n .$$

<u>Lemma 16.9.3</u> Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen.
$\Phi : U \to V$ glatter Diffeomorphismus, welcher orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) ist. Sei $\omega = f \, \omega_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{C}^\infty(V)$ mit: f ist integrierbar über V. Dann gilt

$$\int_A \Phi^* \omega = \int_{\Phi(A)} \omega \quad \forall A \subset U \text{ messbar}$$

$$\left(\text{bzw. } \int_A \Phi^* \omega = - \int_{\Phi(A)} \omega \right)$$

<u>Beweis</u>

$$\Phi^* \omega = (f \circ \Phi) \, \Phi^* \omega_{\mathbb{R}^n}$$
$$= (f \circ \Phi) \, \lambda \cdot \omega_{\mathbb{R}^n}$$

Beachte

$\lambda = \det J_\Phi$

Transformationsformel besagt

$$\int_A (f \circ \Phi) \, |\det J_\Phi| \, d\lambda_n = \int_{\Phi(A)} f \, d\lambda_n$$

Daraus folgt die Behauptung ∎

<u>Beispiel</u>: Sei $U = (a,b) \subset (0,\infty)$

$V = (-b,-a) \in (-\infty, 0)$

$\Phi : U \to V$ orientierungsumkehrend

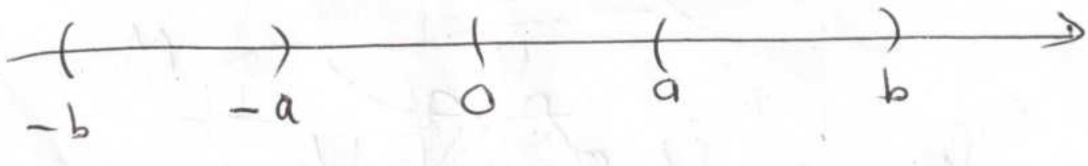
$x \mapsto -x$

$\omega = f\,dx$, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx$$

(Substitutionsregel)

$$= \int_{[-b,-a]} f(-x)\,dx = -\int_{(-b,-a)} \Phi^* \omega$$



<u>Lemma 16.9.4</u> Ist $\omega \in \Omega^n(U)$, $A \subset U$ messbar mit $\bar{A} \Subset U$ (d.h. $\bar{A}$ ist eine kompakte Teilmenge von U), so ist $\int_A \omega$ wohldefiniert und $\forall\, \eta \in \Omega^n(U)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

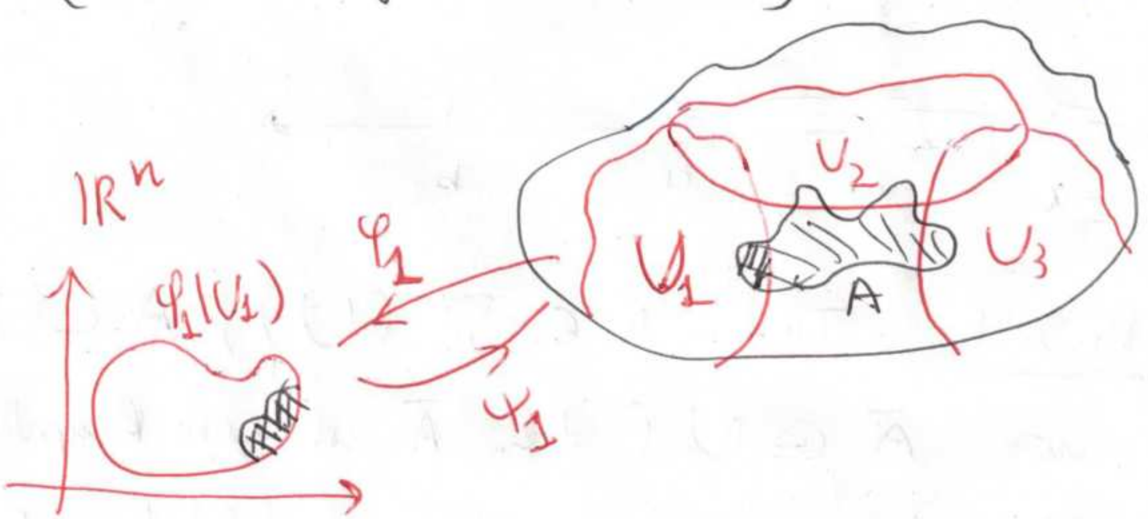
$$\int_A (c_1 \omega + c_2 \eta) = c_1 \int_A \omega + c_2 \int_A \eta$$

Beweis Trivial da f beschränkt auf A ist. ∎

Definition 16.9.5 Sei $(M, [\tilde{\omega}]) \subset \mathbb{R}^N$ (dim $M = n$) eine orientierte Umgk. Sei $A \subset M$ eine borelsche Menge, deren Abschluss kompakt ist und $\omega \in \Omega^n(M)$

wir definieren $\int_A \omega$ wie folgt:

Sei $(U_j, \varphi_j)_{1 \leq j \leq m}$ eine Familie von lokalen Karten (U_j, φ_j) so dass U_j wegzusammenhang ist, (U_j, φ_j) positiv orientiert ist (siehe Definition 15.4.8) und $A \in \bigcup_{j=1} U_j$



Nach Abschnitt 14.7 (Zerlegung der Eins) gibt es Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ auf M mit der Eigenschaften: $\lambda_j \in \mathcal{C}^\infty(M)\ \forall j$,

$$0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) = 1 \quad \forall x \in A$$

und $\operatorname{supp} \lambda_j \subset U_j \quad \forall j$.

Setze $\psi_j := \varphi_j^{-1}$

$$\int_A \omega := \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j(A \cap U_j)} (\lambda_j \circ \psi_j) \psi_j^* \omega \quad (*)$$

Bemerkung (i) Falls $A \subset U$ (wobei (U, φ) eine positiv orientierte lokal Karte), so gilt

$$\int_A \omega = \int_{\varphi(A)} \psi^* \omega, \text{ wobei } \psi := \varphi^{-1}$$

$$\left(\text{da} \quad m = 1, \quad U_1 = U, \; \varphi_1 = \varphi \atop \lambda_1(x) = 1 \;\; \forall x \in U \right)$$

(ii) (U, φ) ist positiv orientiert $\Leftrightarrow$ $\varphi : U \to \varphi(U)$ ist orientierungserhaltend.

Lemma 16.9.6 Die Definition von $\int_A \omega$ ist wahldefinient, d.h. Die Formel $(*)$ ist unabhängig von der Wahl von (U_j, φ_j) und λ_j.

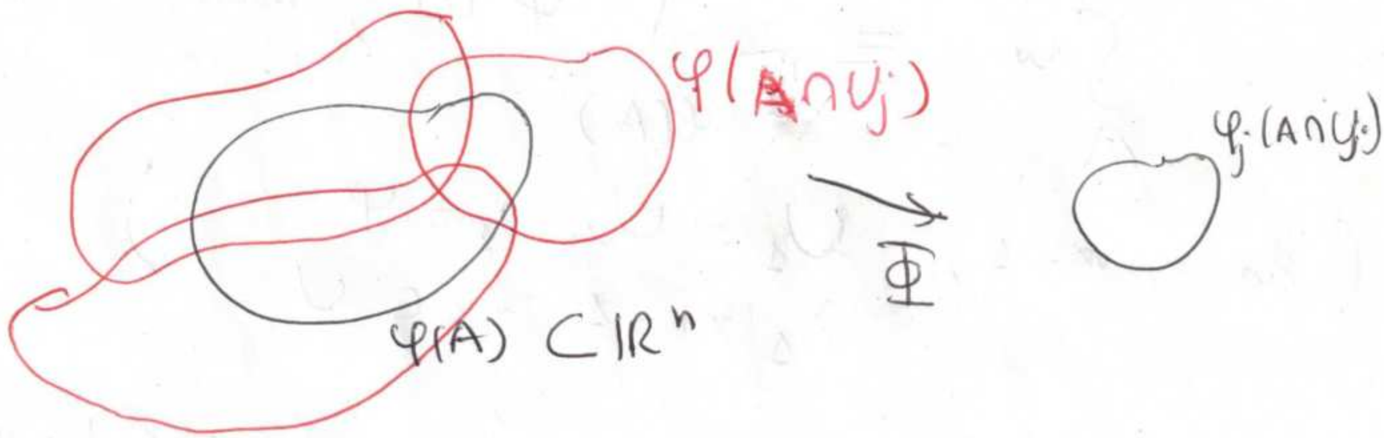
Beweis: es genügt den Fall $A \subset U$ zu betrachten, wobei (U, φ) eine lokale Karte von M, welche positiv orientiert ist.

Seien $(U_j, \varphi_j)_{1 \leq j \leq m}$ wie in der Definition 16.9.5

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$

wir müssen zeigen dass

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j(A \cap U_j)} (\lambda_j \circ \varphi_j)\, \varphi_j^* \omega = \int_{\varphi(A)} \varphi^* \omega$$



Lemma 16.9.3 und die Tatsache dass φ_j, φ orientierungserhaltend sind implizieren dass

$$\int_{\varphi_j(A \cap U_j)} (\lambda_j \circ \varphi_j)\, \varphi_j^* \omega = \int_{\varphi(A \cap U_j)} (\lambda_j \circ \varphi)\, \varphi^* \omega$$

$\left(\Phi : \varphi(A \cap U_j) \to \varphi_j(A \cap U_j) \text{ mit } \Phi := \varphi_j \circ \varphi \right)$

In der Tat für $\eta := (\lambda_j \circ \varphi_j)\, \varphi_j^* \omega$

gilt
$$\Phi^* \eta = (\lambda_j \circ \varphi_j \circ \varphi_j \circ \psi)\, \Phi^* \varphi_j^* \omega$$
$$= (\lambda_j \circ \psi)\, (\varphi_j \circ \Phi)^* \omega$$
$$= (\lambda_j \circ \psi)\, \psi^* \omega .$$

Es folgt dass
$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j(A \cap U_j)} (\lambda_j \circ \varphi_j)\, \varphi_j^* \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{\psi(A \cap U_j)} (\lambda_j \circ \psi)\, \psi^* \omega$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\psi(A)} (\lambda_j \circ \psi)\, \psi^* \omega$$

(weil $\operatorname{supp}(\lambda_j \circ \psi) \subset \psi(U_j)$)
$$= \int_{\psi(A)} \psi^* \omega$$

da $\sum \lambda_j = 1$ auf A. $\blacksquare$

<u>Bemerkung 16.9.7</u> für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n(M)$

es gilt
$$\int_A (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) = c_1 \int_A \omega_1 + c_2 \int_A \omega_2$$

Satz 16.9.8 Sei $(M, [\tilde{\omega}])$, $(M', [\tilde{\omega}'])$ orientierte Umgfk. Sei $\Phi: (M', [\tilde{\omega}']) \to (M, [\tilde{\omega}])$

orientierungserhaltende Diffeomorphismus.
(bzw. orientierungsumkehrende)

Dann gilt
$$\int_A \Phi^* \omega = \int_{\Phi(A)} \omega$$

$\forall$ $A \subset M'$ kompakt
$\forall$ $\omega \in \Omega^n(M)$.

(bzw. $\displaystyle\int_A \Phi^* \omega = - \int_{\Phi(A)} \omega$)

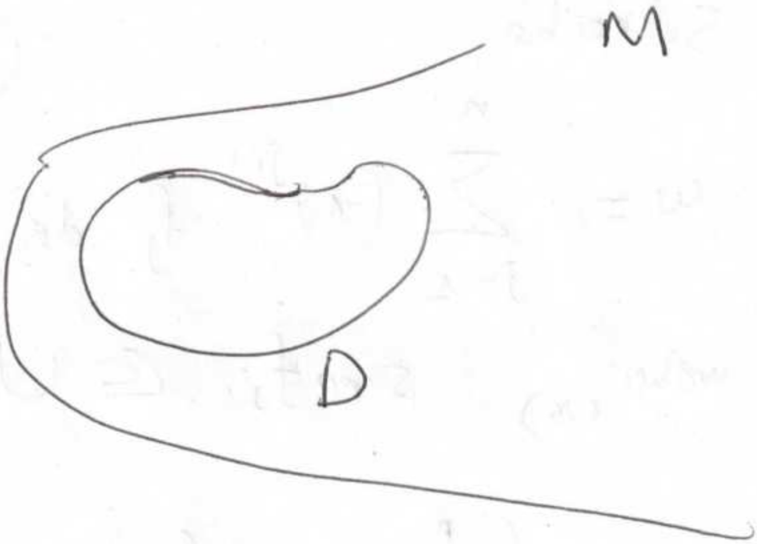
Beweis direkt auf Lemma 16.9.3.

Satz 16.9.9 (Satz von Stokes)
Sei $(M, [\tilde{\omega}]) \subset \mathbb{R}^N$ orientierte Umgfk von Dimension n. Sei $D \subset M$ eine glatt berandete Teilmenge so dass D kompakt ist. Sei $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$.

Dann gilt

$$\int_{\partial D} i^*\omega = \int_D d\omega$$

wobei ∂D mit der Randorientierung versehen ist und $i: \partial D \hookrightarrow M$ die Inklusion ist.



Insbesondere ist M kompakt so gilt

$$\int_M d\omega = 0.$$

Hilfslemma: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$.

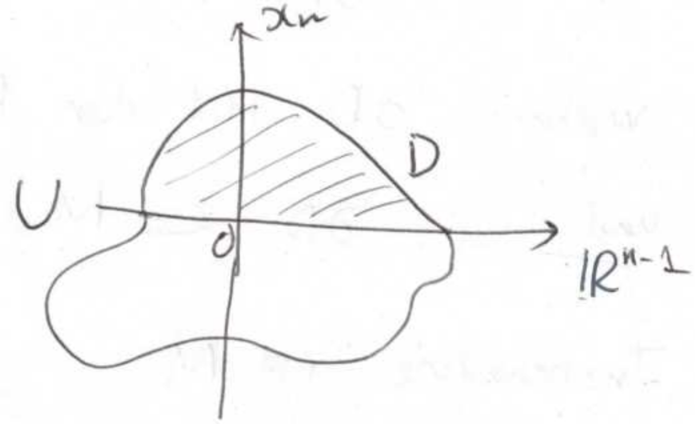
$$D = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in D : x_n \geq 0\}$$

$$\partial D = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap U$$

Die Randorientierung von ∂D ist gegeben durch die $(n-1)$-Form $(-1)^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ (siehe Beispiel 15.4.6). Sei $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ so dass der Träger von ω kompakt in U ist (d.h. die Träger von Koeffizientenfunktionen von ω sind kompakt in U)

Dann gilt $$\int_{\partial D} i^* \omega = \int_D d\omega$$

wobei $i: \partial D \hookrightarrow U$ die Inklusion



Beweis.

Schreibe

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} f_j \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

wobei $_{(*)}$ $\operatorname{supp} f_j \subseteq U$ (d.h. $\operatorname{supp} f_j$ kompakt in U ist)

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\int_D d\omega = \int_D \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) d\lambda_n \quad (\text{wegen } (*))$$

Betrachte $\varphi: \partial D \to \mathbb{R}^{n-1}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$

$\varphi(\partial D)$ ist eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{n-1}$

Die Diffeomorphismus $\varphi: \partial D \to \varphi(\partial D)$ ist orientierungerhaltend falls n gerade ist
orientierungsumkehrend falls n ungerade ist. Es folgt

$$\int_{\partial D} i^*\omega = (-1)^n \int_{\varphi(\partial D)} \varphi^* i^*\omega$$

$$= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi^*\omega \quad \left(\text{da } \operatorname{supp} f_j \Subset U\right)$$

$$\left(\text{wobei } \psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, \; (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\right)$$

$$= (-1)^{2n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\, d\lambda_{n-1}$$

Beachte nun

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, d\lambda_n \overset{(\text{Fubini})}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\, dx_n \right) d\lambda_{n-1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} -\left(f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \right) d\lambda_{n-1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\, d\lambda_n = \int_{[0,\infty)} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, dx_1 \right) d\lambda_1(x_2)$$

(der Einfachheit halber nehmen wir an $n = 2$, $j = 1$)

$$= 0$$

da $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, dx_1 = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, dx_1 =$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(f_1(r, x_2) - f(-r, x_2) \right) = 0$$

da $\operatorname{supp} f_1 \subset\subset \mathbb{R}^2$.

Daraus folgt die Behauptung ∎

Beweis von Satz von Stokes:

Seien $(U_j, \varphi_j)_{j=1,2,\dots,m}$ positiv orientierte lokale Karte für $A = D$ wie in der Definition 16.9.5, und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ auch wie in der Definition 16.9.5. Man kann so (U_j, φ_j) wählen, dass (U_j, φ_j) eine D-angepasste Karte ist.

Setze $\omega_j := \lambda_j \omega$, deren Träger kompakt in U_j ist. Nach Hilfslemma gilt

$$\int_D d\omega_j = \int_{U_j \cap D} d\omega_j = \int_{\partial D \cap U_j} i^* \omega_j = \int_{\partial D} i^* \omega_j$$

da der Träger von ω_j in U_j liegt.

Daraus folgt

$$\int_D \sum_{j=1}^{m} d\omega_j = \int_{\partial D} \sum_{j=1}^{m} i^* \omega_j$$

$$= \int_{\partial D} i^* \left(\left(\sum \lambda_j \right) \omega \right)$$

$$\int_D d\omega \;\; = \;\; \int_{\partial D} i^* \omega$$

Die Behauptung ist bewiesen. ∎

<u>Satz 16.9.5</u> (Gauss–Ostrogradski)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine glatt berandete kompakte Teilmenge. Sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld von D und $\omega_{\partial D}$ das Volumenenform von ∂D.

Sei X ein glatter Vektorfeld auf eine offene Umgebung U von D. Dann gilt

$$\int_D (\operatorname{div} X)\, d\lambda_n = \int_{\partial D} \langle X, \nu \rangle\, \omega_{\partial D}$$

Erinnerung: $\omega_{\partial D} = i^* (\nu \lrcorner \omega_M)$

wobei $i : \partial D \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ Inklusion

(Satz 15.4.10).

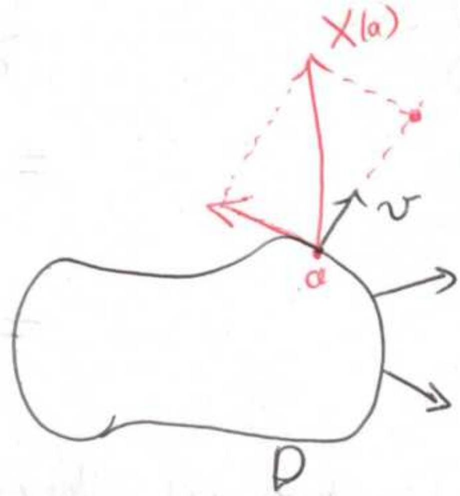
<u>Beweis</u>. Setze $\omega^X := X \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^n}$.

Es gilt $d\omega^X = (\operatorname{div} X)\, \omega_{\mathbb{R}^n}$

(Beispiel 15.3.6)

Zudem hat man, für $w_1, \dots, w_{n-1} \in T_a \partial D$,

$$i^* \omega^X (w_1, \dots, w_{n-1})$$



$$= \omega_{\mathbb{R}^n}(X, w_1, \dots, w_{n-1})$$

$$= \omega_{\mathbb{R}^n}(\langle X, \nu \rangle \nu + \xi, w_1, \dots, w_{n-1})$$

(da

$$X(a) = \langle X(a), \nu(a) \rangle \nu(a) + \xi(a), \text{ mit } \xi(a) \in T_a \partial D)$$

$$= \omega_{\mathbb{R}^n}(\langle X, \nu \rangle \nu, w_1, \dots, w_{n-1})$$

(da $\xi, w_1, \dots, w_{n-1}$ linear abhängig sind)

$$= \langle X, \nu \rangle \; \omega_{\mathbb{R}^n}(\nu, w_1, \dots, w_{n-1})$$

$$= \langle X, \nu \rangle \; (\nu \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^n}).$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz von Stokes angewendet auf ω^X. ■

<u>Definition 16.9.10</u> Sei $(M, [\omega]) \subset \mathbb{R}^N$ (dim $M = n$) orientierte Umfk. Sei ω_M die Volumenform von M. (Satz 15.4.9). Sei $A \subset M$ eine Borelmenge so dass $\overline{A}$ kompakt ist. Definiere das <u>n-dimensionale Volumen</u> von A durch

$$\mathrm{vol}_n(A) := \int_A \omega_M .$$

A heißt n-dimensionale <u>Nullmenge</u> falls $\mathrm{vol}_n(A) = 0$.

<u>Beispiel 16.9.11</u>. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall.

(i) Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Einbettung zu ihrem Bild $\gamma(I)$

Sei $[a,b] \subset I$

Sei $\omega \in \Omega^1(U)$ wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, die $\gamma(I)$ enthält.

Dann ist $\gamma(I)$ eine 1-dim Umpf. in $\mathbb{R}^n$

und $\displaystyle\int_{\gamma([a,b])} \omega$ stimmt mit dem Kurvenintegral von ω längst $\gamma|_{[a,b]}$

überein. Zudem gilt für $M = \gamma(I)$
$A = \gamma([a,b])$

$$\mathrm{vol}_1(A) = \int_A \omega_M = \int_a^b \gamma^* \omega_M$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \text{Länge von } \gamma|_{[a,b]}$$

(siehe Beispiel 15.4.11 (2))

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Hyperfläche
(lokal) $\psi: V \subset \mathbb{R}^2 \to M$ eine positiv orientierte Parametrisierung. Sei $u = (u_1, u_2) \in V$.
$A \subset \psi(V)$.

Daher gilt

$$\mathrm{vol}_2(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega_M$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{EF - G^2} \, d\lambda_2 .$$

wobei $E = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right\rangle$

$F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\rangle$

$G = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\rangle$

(Siehe Seite 585)

<u>Bemerkung 16.9.12</u>: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ orientierte Umgfk, $A \subset M$. Borelmenge so dass $\overline{A}$ kompakt ist. In der Praxis um $\int_A \omega$ zu berechnen macht man wie folgt:

1) seien $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_m, \varphi_m)$ positiv orientierte lokal Karte, $W_j \subset U_j$ Borelmenge so dass

$$W_j \cap W_{j'} = \emptyset \quad , \quad \forall j \neq j'$$

und

$$\bigsqcup_{j=1}^{m} W_j \subset A$$

mit: $A \setminus \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} W_j \right)$ ist eine Nullmenge (auf M)

2) $$\int_A \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{W_j} \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j(W_j)} \varphi_j^* \omega .$$

wobei $\psi_j := \varphi_j^{-1}$.

z.B. $M = S^1$, $A = M$, $\omega = \omega_M$

$$U = S^1 \setminus \{(1,0)\}$$

$$\psi : (0, 2\pi) \to U$$
$$t \mapsto e^{it}$$

$$\int_M \omega_M = \int_U \omega_M$$ da $\{(1,0)\}$ eine Nullmenge ist. Man bekommt

$$\int_M \omega_M = \int_0^{2\pi} 1 . dt = 2\pi$$

Um zu bestimmen, ob eine gegebene Teilmeng in M eine Nullmeng ist, ist Beispiel 16.35 (i)-(iv) sehr nützlich.

<u>Beispiel</u>: $D = \mathbb{B}_1$ Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$

$$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

$$\operatorname{div} X(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j}(x) = n$$

Satz von Gauss-Ostrogradski impliziert

$$n \operatorname{vol}_n(\mathbb{B}_1) = \int_{\mathbb{B}_1} (\operatorname{div} X)\, d\lambda_n = \int_{\partial \mathbb{B}_1} \langle X, \nu \rangle \, d\omega_{\partial \mathbb{B}_1}$$

$$= \int_{\partial \mathbb{B}_1} \omega_{\partial \mathbb{B}_1} = \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

Daraus folgt
$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_1) = \frac{1}{n}\,\mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$