W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 2
(Abgabe: Montag, den 3.11.2003, in der Übung)

Aufgabe 6

Seien $\widetilde{P}$ und $\widetilde{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Setze $P := \widetilde{P}^{\mathbb{N}}$ sowie $Q := \widetilde{Q}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass dann $P \ll Q$ genau dann gilt, wenn $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$.

Aufgabe 7

Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, die abzählbar erzeugt ist, d.h. es gibt eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\mathcal{F}(A_n : n \in \mathbb{N}) = \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ abzählbar erzeugt ist. Folgern Sie daraus, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ abzählbar erzeugt ist.

Aufgabe 8

(i) Sei X gleichverteilt in $(0, 1)$. Gegeben $X = x \in (0, 1)$, sei die Zufallsvariable Z binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und x, also

$$P(Z = k|X = x) = B_{n,x}(k) \quad (k = 0, \dots, n).$$

Berechnen Sie die Verteilung von Z.

(ii) Sei X_1 gleichverteilt in $(0, 1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n-1$ sei X_{k+1} gegeben $X_k = x_k$ gleichverteilt in $(0, x_k)$. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_n.

Aufgabe 9

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Größen:

(i) $\mathrm{E}(g(X)|Y = y)$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion sei, für die $\mathrm{E}(g(X))$ existiert;

(ii) $\mathrm{E}(Y|A)$ mit $A := \{X \in B\}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(iii) $\mathrm{E}(X|A)$ mit $A := \{X + Y \in B\}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 10

(i) Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Gegeben $X = x$ besitze Y die bedingte Dichte $h(\cdot\,|x)$. Zeigen Sie:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x)h(y|x)}{\sum_{x'} P(X = x')h(y|x')}.$$

(ii) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f. Gegeben $X = x$ sei Y diskret verteilt mit $P(Y = y|X = x) = p(y|x)$. Zeigen Sie, dass dann eine bedingte Dichte von X gegeben Y existiert, und diese durch

$$h(x|y) = \frac{f(x)p(y|x)}{p(y)}$$

mit $p(y) = P\{Y = y\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p(y|x)dx$ gegeben ist.