W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 5
(Abgabe: Montag, den 24.11.2003, in der Übung)

Aufgabe 21

Eine Folge von Zufallsvektoren $(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Submartingal* bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls jede Komponente $(X_n^{(j)}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \le j \le k$, ein Submartingal ist.
Zeigen Sie: Ist$((X_n, Y_n), \mathcal{F}(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal, so auch $(X_n, \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 22

Seien $Y_i, i \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit $P(\{Y_1 = 1\}) = p \in (0,1)$ und $P(\{Y_1 = -1\}) = 1 - p =: q$. Setze $S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ($S_0 \equiv 0$). (Vergleiche Stochastik I, Beispiel 1.2.3.) Setze $X_n := S_n - n(p-q), n \in \mathbb{N}_0$, sowie $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n), n \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$).
Zeigen Sie, dass $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 23

Betrachte eine absorbierende Irrfahrt auf $\{0, \ldots, N\}$ (vgl. Stochastik I, Beispiel 1.2.5). Seien $Y_i, i \in \mathbb{N}$, die Sprünge der Irrfahrt, $S_0 \equiv k \in \{0, \ldots, N\}$ der Startwert und $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ die Position nach n Sprüngen. Setze $X_n := (\frac{q}{p})^{S_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ $(q := 1 - p)$ und $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$).

(i) Zeigen Sie, dass $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.

(ii) Berechnen Sie $P(\{S_n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\})$.

Aufgabe 24

Seien $Y_i, i \in \mathbb{N}$, reellwertige, Borel-messbare Funktionen auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Wir betrachten zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $\mathcal{F}$ und setzen voraus, dass $(Y_1, \ldots, Y_n)$ unter P eine Dichte p_n und unter Q eine Dichte q_n besitzt $(n \in \mathbb{N})$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$X_n := \begin{cases} \frac{q_n(Y_1,\ldots,Y_n)}{p_n(Y_1,\ldots,Y_n)} & \text{, falls } p_n(Y_1, \ldots, Y_n) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)$. Zeigen Sie:

(i) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Supermartingal bzgl. P.

(ii) Es gilt $0 \leq \mathrm{E}Y_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 25

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum S und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$. Setze $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(X_0, \ldots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $\psi : S \to S$ ein *Rechts-Eigenvektor* von P, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$, so dass

$$\sum_{j \in S} p_{ij} \psi(j) = \lambda \psi(i)$$

für alle $i \in S$ gilt. Es gelte $\mathrm{E}(|\psi(X_n)|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(\lambda^{-n} \psi(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.