W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 6
(Abgabe: Dienstag, den 02.12.2003, in der Übung)

Aufgabe 26

Zeigen Sie:

(i) T Stoppzeit $\iff \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

(ii) A tritt bis T ein $\iff A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

(iii) $\mathcal{F}_T$ ist eine σ-Algebra.

(iv) Eine Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.

(v) Ist T eine Stoppzeit und X eine Zufallsvariable, so ist $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ $\mathcal{F}_T$-messbar.

Aufgabe 27

Zeigen Sie:

(i) Sind S und T Stoppzeiten, dann auch $S \vee T$, $S \wedge T$ und $S + T$.

(ii) Sind S und T Stoppzeiten mit $S \leq T$, dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

(*Hinweis:* $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$.)

Aufgabe 28

Sie verdoppeln bei jedem Spiel den Einsatz und hören auf, wenn Sie das erste Mal gewinnen. Für ein faires Spiel gilt:

(i) Am Schluss haben Sie Ihren ersten Einsatz verdoppelt. (Der Satz über optional sampling gilt also *nicht*.)

(ii) Ihr Vermögen ist ein Martingal.

(iii) Die Stoppzeit ist geometrisch verteilt.

(iv) Der Erwartungswert Ihres Einsatzes bis zum letzten Spiel ist *unendlich*.

Aufgabe 29

(*Optional switching.*) Seien $(X_n, \mathcal{F}_n)$ und $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ Martingale und T eine Stoppzeit, und es gelte $X_T = Y_T$, wenn $T < \infty$. Definiere

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & n < T \\ Y_n, & n \geq T \end{cases} .$$

Dann ist $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ ein Martingal.

Aufgabe 30

Ist $(X_n, \mathcal{F}_n)$ ein Submartingal, dann gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon P(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \geq \varepsilon) &\leq \mathrm{E} X_n^+, \\ \varepsilon P(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq -\varepsilon) &\leq \mathrm{E} X_n^+ - \mathrm{E} X_1. \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Diese Ungleichung ist eine Verallgemeinerung der Kolmogorov-Ungleichung. Wie im Beweis dort betrachten Sie hier den Zeitpunkt, zu dem X_n zum ersten Mal ε überschreitet.)