W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 7
(Abgabe: Montag, den 08.12.2003, in der Übung)

Aufgabe 31

Seien $0 < p_{n+1} < \frac{1}{2}$ und paarweise verschiedene $a_{n+1} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren eine Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $X_1 :\equiv 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $P(X_{n+1} = a_{n+1}|X_n = 0) = p_{n+1} = P(X_{n+1} = -a_{n+1}|X_n = 0)$ sowie $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1 - 2p_{n+1}$ und im Falle $X_n \neq 0$ sei $X_{n+1} := X_n$.

Zeigen Sie:

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal, das punktweise (auf ganz Ω) konvergiert.

(ii) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k p_k = \infty$, so gilt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(|X_n|) = \infty$.

Aufgabe 32 *(Berechnung einer Dichte.)*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup \mathcal{A}_n)$, wobei $\mathcal{A}_n = \{A_{n1}, A_{n2}, \ldots\}$ eine Zerlegung von Ω und $\mathcal{A}_{n+1}$ feiner als $\mathcal{A}_n$ ist. Sei ν ein endliches signiertes Maß mit P-Dichte f. Dann gilt

$$\frac{\nu A_{ni(\omega)}}{P A_{ni(\omega)}} \longrightarrow f(\omega) \quad \text{fast sicher,}$$

wenn $i(\omega)$ durch $\omega \in A_{ni(\omega)}$ definiert ist.

Aufgabe 33

Seien $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein adaptierter stochastischer Prozess. Zeigen Sie: $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann ein Martingal, wenn $\mathrm{E}X_T = \mathrm{E}X_1$ für jede beschränkte Stoppzeit T gilt.
Hinweis: Für die Rückrichtung genügt es, Stoppzeiten zu betrachten, die nur zwei Werte annehmen.

Aufgabe 34

Seien $(X_k, \mathcal{F}_k)_{1\leq k\leq n}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{E}(X_n \mathbf{1}_{\{T=k\}}) = \mathrm{E}(X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}})$ für $1 \leq k \leq n$ gilt.

Aufgabe 35

Seien $(X_k, \mathcal{F}_k)_{1\le k\le n}$ und $(Y_k, \mathcal{F}_k)_{1\le k\le n}$ zwei Martingale mit $X_1 = Y_1 \equiv 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{E}(X_n Y_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$$

gilt und insbesondere

$$\mathrm{E}(X_n^2) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{E}((X_k - X_{k-1})^2).$$