W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Stochastik II
Serie 9
(Abgabe: Montag, den 12.01.2004, in der Übung)

Aufgabe 41

Seien X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, d-dimensionale Zufallsvariablen. Zeigen Sie: Es gilt $X_n \to X\ (P)$ genau dann, wenn $t^{\mathrm{T}} X_n \to t^{\mathrm{T}} X\ (P)$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 42

Es sei $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Bewegung auf $[0,1]$. Für $t \in [0,1]$ setze $B_t := W_t - tW_1$. Zeigen Sie, dass $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Brücke ist.

Aufgabe 43

Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie:

(i) $(t\, W_{1/t})_{t\in[0,\infty)}$ ist ebenfalls eine Brownsche Bewegung.

(ii) $((1-t)W_{t/(1-t)})_{t\in[0,1]}$ und $(tW_{(1-t)/t})_{t\in[0,1]}$ sind Brownsche Brücken.

(Setze dabei $0 \cdot W_{1/0} := 0$.)

Aufgabe 44

Für die Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geqslant 0}$ gilt: $(W_{st})_{s\geq 0}$ ist verteilt wie $(t^{1/2}\, W_s)_{s\geq 0}$ für alle $t \geq 0$.
Hinweis: Es genügt, die endlich-dimensionalen Randverteilungen zu betrachten.

Aufgabe 45

Sei q_t die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz t. Definiere

$$\begin{aligned} P_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) \quad &= \quad \int_{A_1} q_{t_1}(x_1)\, dx_1 \int_{A_2} q_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\, dx_2 \\ &\qquad \cdots \int_{A_n} q_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\, dx_n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) Diese Familie ist projektiv.

(ii) Die Fortsetzung auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ hat unabhängige Zuwächse.