W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Sommersemester 2004

1. Übung zur Mathematischen Statistik

(Abgabe: Dienstag, den 27.04.2004)

Aufgabe 1
Der natürliche Parameterraum einer exponentiellen Familie ist konvex und hat ein nichtleeres Inneres.

Aufgabe 2
Folgende Verteilungsfunktionen mit Lebesgue-Dichten sind exponentielle Familien bzgl. aller Parameter. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

(i) Normalverteilung $\mathrm{N}_{\mu,\sigma^2}$ mit Dichte $(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$

(ii) Gamma-Verteilung $\Gamma_{a,b}$ mit Dichte $\Gamma(a)^{-1}b^{-a}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x/b}1(x>0)$

(iii) Chi-Quadrat-Verteilung $\chi^2_f = \Gamma_{f/2,2}$ mit Dichte $\Gamma(f/2)^{-1}2^{-f/2}x^{f/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}1(x>0)$

(iv) Beta-Verteilung $B_{a,b}$ mit Dichte $\Gamma(a)^{-1}\Gamma(b)^{-1}\Gamma(a+b)x^{a-1}(1-x)^{b-1}1(0<x<1)$

Aufgabe 3
Folgende Verteilungsfamilien mit Zähldichten sind exponentielle Familien. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

(i) Binomialverteilung $\mathrm{Bi}_{p,n}$ mit Dichte $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0,1,\dots,n$, bzgl. $p \in (0,1)$

(ii) Poisson-Verteilung P_λ mit Dichte $\frac{1}{x!}\lambda^x\mathrm{e}^{-\lambda}$, $x = 0,1,\dots$, bzgl. $\lambda > 0$

(iii) Negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}_{p,m}$ mit Dichte $\binom{m+x-1}{m-1}p^m(1-p)^x$, $x = 0,1,\dots$, bzgl. $p \in (0,1)$

Sei $P|\mathcal{F}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor. Die *momenterzeugende Funktion* von T ist $M_T(u) = \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{u^\top T}$.

Aufgabe 4
Falls M_T in einer Umgebung von 0 existiert, existieren alle Momente $\alpha_{r_1 \dots r_d} = \mathrm{E}\, T_1^{r_1} \cdots T_d^{r_d}$ und sind die Koeffizienten in der Reihenentwicklung

$$M_T(u) = \sum_{(r_1, \dots, r_d)} \alpha_{r_1 \dots r_d} \frac{u_1^{r_1} \cdots u_d^{r_d}}{r_1! \cdots r_d!}$$

Aufgabe 5
Sei P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, mit $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ offen, eine kanonische exponentielle Familie mit μ-Dichten $c(\vartheta)\mathrm{e}^{\vartheta^\top T(x)}$. Dann existiert für $\vartheta \in \Theta$ die momenterzeugende Funktion von T in einer Umgebung von 0. Es gilt $M_T(u) = \frac{c(\vartheta)}{c(\vartheta + u)}$.