

5. Übung zur Mathematischen Statistik

(Abgabe: Dienstag, den 25.05.2004)

Aufgabe 21

Die hypergeometrischen Verteilungen $H_{N,K,n}$, $K = 0, \dots, N$, mit Zähldichten $\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x} / \binom{N}{n}$, $\max(0, n + K - N) \leq x \leq \min(n, K)$, haben monotonen Dichtequotienten in $T(x) = x$.

Aufgabe 22

Die Binomialverteilungen $Bi_{n,p}$, $p \in (0, 1)$, die negativen Binomialverteilungen $NB_{n,p}$, $p \in (0, 1)$, und die Poisson-Verteilungen P_λ , $\lambda > 0$, haben monotone Dichtequotienten.

Aufgabe 23

Die Cramér–Rao-Schranke ist invariant unter differenzierbaren Umparametrisierungen der Verteilungsfamilie: Sei $P_\vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}$, eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit Fisher-Information I_ϑ . Sei $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar (und umkehrbar). Dann hat $P_{\eta(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$, dieselbe Cramér-Rao-Schranke an der Stelle desjenigen Parameters ξ , für den $\eta(\xi) = \vartheta$ gilt.

Aufgabe 24

Sei $P_\vartheta | \mathcal{B}, \vartheta \in \mathbb{R}$, die von einer Verteilung mit positiver Dichte erzeugte Lageparameter-Familie. Dann hat die Familie monotonen Dichtequotienten in $T(x) = x$ genau dann, wenn $\log f$ konkav ist.

Aufgabe 25

Sei $P_\vartheta | \mathcal{B}, \vartheta \in \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}$ offen, eine Familie von Verteilungen mit positiven Dichten f_ϑ , und es existiere $\partial_x \partial_\vartheta f_\vartheta(x)$ für alle x und ϑ . Dann hat die Familie monotone Dichtequotienten in $T(x) = x$ genau dann, wenn $\partial_x \partial_\vartheta f_\vartheta(x) \geq 0$ für alle x und ϑ .