

## 6. Übung zur Mathematischen Statistik

(Abgabe: Dienstag, den 8.06.2004)

### **Aufgabe 26** (Schwarzsche Ungleichung)

Zeigen Sie: Sind  $f, h$  Funktionen mit  $Pf = Ph = 0$ ,  $Pf^2 < \infty$ ,  $Ph^2 < \infty$ , dann wird  $P(f - ah)^2$  minimiert durch  $a^* = Pf/Ph$ . Finden Sie eine Verallgemeinerung auf  $k$ -dimensionales  $f$  und  $m$ -dimensionales  $h$ .

### **Aufgabe 27** (Schwarzsche Ungleichung)

Zeigen Sie: Sind  $f, g, h$  Funktionen mit  $Pf^4 < \infty$ ,  $Pg^2 < \infty$ ,  $Ph^2 < \infty$  und  $h$  positiv, dann wird  $(Pfg)^{-2}Pf^2h$  minimiert durch  $f = g/h$ .

### **Aufgabe 28** (Bekannter Variationskoeffizient)

Sei  $\mathcal{P}|\mathcal{B}$  eine Familie von Verteilungen mit Mittelwert  $\mu(P) > 0$ , Varianz  $\sigma^2(P)$  und bekanntem (positiven) Variationskoeffizienten  $c(P) = \sigma(P)/\mu(P) = c$ . Bestimmen Sie möglichst gute Schätzer für  $\mu(P)$  und  $\sigma^2(P)$ .

### **Aufgabe 29** (Falsch spezifiziertes Modell)

Sei  $f_\vartheta$ ,  $\vartheta \in \Theta$ , eine Familie von Dichten mit  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Sei  $\hat{\vartheta}$  der zugehörige Maximum-Likelihood-Schätzer aufgrund von unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen. Das Modell sei falsch spezifiziert;  $P$  sei die tatsächlich zugrundeliegende Verteilung. Diskutieren Sie (heuristisch), wie sich  $\hat{\vartheta}$  verhält.

Zusatz: Unter welchen Voraussetzungen gilt das?

### **Aufgabe 30** (Nichtlineare Regression)

Sei  $X$  ein Zufallselement und  $Y$  eine Zufallsvariable mit  $E(Y|X) = f_\vartheta(X)$  für  $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Bestimmen Sie (heuristisch) einen möglichst guten Schätzer für  $\vartheta$ .