W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Sommersemester 2004

7. Übung zur Mathematischen Statistik

(Abgabe: Dienstag, den 15.06.2004)

Aufgabe 31 *(Zwei Stichproben-Quantile)*
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Dichte f. Sei $0 < p < q < 1$ und f stetig und positiv in ξ_p und ξ_q. Sei $k = np + o(n^{1/2})$ und $m = nq + o(n^{1/2})$. Dann gilt

$$n^{1/2}(X_{k:n} - \xi_p, X_{m:n} - \xi_q)^\top \Rightarrow N(0, \Sigma)$$

mit $\Sigma = (\sigma_{ij})$ und $\sigma_{11} = p(1-p)/f^2(\xi_p)$, $\sigma_{22} = q(1-q)/f^2(\xi_q)$, $\sigma_{12} = p(1-q)/f(\xi_p)f(\xi_q)$.

Aufgabe 32 *(Stichproben-Maximum)*
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $(0,1)$. Dann gilt $n(1 - X_{n:n}) \Rightarrow \mathrm{E}_1$.

Aufgabe 33 *(Stichproben-Median)*
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $(0, \vartheta)$, $\vartheta > 0$. Sei $k = n/2 + o(n^{1/2})$. Dann gilt

$$n^{1/2}(2X_{k:n} - \vartheta) \Rightarrow \mathrm{N}(0, \vartheta^2).$$

Ein wesentlich besserer Schätzer für ϑ ist $X_{n:n}$.

Aufgabe 34 *(Kernschätzer)*
Sei K ein beschränkter Kern mit beschränktem Träger. Sei $\widehat{f}$ der zugehörige Kernschätzer mit Bandweite b. Unter welchen Bedingungen an die Dichte f gilt

(i) $\mathrm{E}\,\widehat{f}(x) \to f(x)$,

(ii) $\mathrm{E}\,\widehat{f}(x) - f(x) = O(b)$,

(iii) $\mathrm{Var}\,\widehat{f}(x) = O\left(\frac{1}{nb}\right)$?

Aufgabe 35 *(MISE)*
Sei $K \in \mathcal{K}_{r,\alpha}$ mit $r \in \{1, 2, \dots\}$, $0 < \alpha \leqq 1$ und Träger in $[-1, 1]$, und sei $f \in L_1$ r-mal differenzierbar und lokal Lipschitz in folgendem Sinne: Es existiert $L \in L_1$, und für $x \in \mathbb{R}$ und $|y - x| \leqq 1$ gilt

$$|f^{(r)}(y) - f^{(r)}(x)| \leqq L(x)|y - x|^\alpha.$$

Für die Bandweite b gelte $b \to 0$ und $nb \to \infty$. Dann gilt für den Kernschätzer $\widehat{f}$:

$$\mathrm{E} \int \left(\widehat{f}(x) - f(x)\right)^2 dx = O\left(\frac{1}{nb} + b^{2(r+\alpha)}\right)$$