W. Wefelmeyer
M. Schölpen

Sommersemester 2004

8. Übung zur Mathematischen Statistik

(Abgabe: Dienstag, den 22.06.2004)

Aufgabe 36
Hat das Wahrscheinlichkeits-Maß mit Verteilungsfunktion F ein endliches Moment der Ordnung $2+\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$, so ist die Funktion $(1-F)^{1/2}F^{1/2}$ Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 37 *(Plug-in für Verteilungsfunktionen)*
Sei $\widehat{f}$ der Kernschätzer mit Kern K und Bandweite b. Sei L die Stammfunktion von K. Sei $\widehat{F}$ die Verteilungsfunktion zu $\widehat{f}$, und sei $\mathbb{F}$ die empirische Verteilungsfunktion. Dann gilt

$$\widehat{F}(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{y-X_i}{b}\right) = \mathbb{F} * K_b(y).$$

Ist K eine Wahrscheinlichkeits-Dichte, so gilt

$$n^{1/2}\left(\widehat{F}(y) - \mathbb{F}(y)\right) = o_P(1) \quad \text{für} \quad b \to 0.$$

Aufgabe 38
Sei $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ das Stichprobenmittel und $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu})^2$ die Stichprobenvarianz. Sei c das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standard-Normalverteilung. Dann ist $B = (\widehat{\mu} - n^{-1/2}c\widehat{\sigma}, \widehat{\mu} + n^{-1/2}c\widehat{\sigma})$ ein Konfidenzintervall zum asymptotischen Niveau $1-\alpha$ für μ, das heißt $P(\mu \in B) \to 1-\alpha$.

Aufgabe 39
Seien $\widehat{\mu}$ und $\widehat{\sigma}^2$ Stichproben-Mittel und -Varianz. Bestimmen Sie einen zweidimensionalen Konfidenz-Bereich zum Niveau $1-\alpha$ für (μ, σ^2).

Aufgabe 40
Seien (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, unabhängige zweidimensionale Zufallsvektoren. Konstruieren Sie einen Schätzer für den bedingten Erwartungswert $e(x) = \mathrm{E}(h(y)|X = x)$. Unter welchen Bedingungen ist er konsistent?