Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

WS 2004/05

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 3
Abgabe: Ab 08.11.04 in den jeweiligen Übungen

13. Zeigen Sie die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

und die multinomische Formel

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_j \geq 0}} \binom{n}{n_1 \cdots n_k} a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$$

mit kombinatorischen Argumenten (ohne Induktion) .

14. Auf wieviele Weisen können k *nicht* unterscheidbare Kugeln auf n Fächer verteilt werden?
(*Bemerkung:* Eine Anwendung in der Physik ist die *Bose-Einstein-Statistik*: Auf wieviele Weisen können k nicht unterscheidbare Teilchen n Energiezustände belegen?)

15. In einer Urne sind 99 schwarze und eine weiße Kugel. Zwei Personen ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen eine Kugel. Wer als erster die weiße Kugel zieht, hat gewonnen. Möchten Sie lieber als erster oder als zweiter ziehen?

16. Aus einer Kiste mit sechs Paar Schuhen werden willkürlich vier Schuhe herausgezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Paar darunter?

17. n Partikel werden auf N Zellen zufällig verteilt.

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, genau n_1 Partikel in der ersten, n_2 in der zweiten, ..., n_N in der N-ten Zelle zu finden?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit p_k, daß eine vorgegebene Zelle genau k Partikel enthält?

(c) Zeigen Sie, daß

$$p_k \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{falls } N \to \infty \quad \text{und } \frac{n}{N} \to \lambda > 0.$$

18. Gegeben ist wieder die Situation von Aufgabe 17.

(d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in jeder Zelle mindestens ein Partikel befindet?

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau r Zellen nicht leer sind?

Anekdote

Der berühmte Mathematiker Georg Polya berichtet von Godfrey Hardy, seinem berühmten englischen Kollegen, der unter anderem über die Riemannsche Vermutung nachdachte, folgende Geschichte: Hardy glaubte an Gott, aber er glaubte auch, daß Gott es nicht gut mit ihm meinte, sondern alles daran setzte, um ihm das Leben schwer zu machen. Als er nun einmal gezwungen war, mit einem kleinen, unsicheren Boot über die stürmische See von Norwegen nach England zu reisen, und die Wahrscheinlichkeit eines Unglücks nicht exakt Null war, schrieb er eine Postkarte an einen norwegischen Kollegen mit den Worten: "Ich habe die Riemannsche Hypothese bewiesen". Das entsprach natürlich nicht der Wahrheit, aber Hardys Kalkül war der folgende: Wenn das Schiff unterginge, würden alle glauben, daß Hardy die Riemann-Hypothese bewiesen hätte, und daß der Beweis unglücklicherweise mit ihm unwiederbringlich versunken wäre. Das hätte Hardy unglaublich berühmt gemacht. Er war überzeugt davon, daß Gott ihm diesen Ruhm nicht gönnen würde und daher das Schiff sicher nach England gelangen würde.