Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

WS 2004/05

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 8
Abgabe: Ab 013.12.04 in den jeweiligen Übungen

43. Seien $X_1, X_2, \cdots$ unabhängig und E_a-verteilt. Dann konvergiert

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)$$

schwach gegen eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz a^2.

44. Gilt $X_n \longrightarrow c$ in Wahrscheinlichkeit für eine Konstante c, und ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in c, so gilt:

$$f(X_n) \longrightarrow f(c)$$

in Wahrscheinlichkeit.

45. Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1} e^{-u} du \quad , \quad t > 0 \quad .$$

(a) Zeigen Sie,daß

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= t\Gamma(t) \qquad \text{für } t > 0 \text{ und} \\ \Gamma(n+1) &= n! \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

(b) Eine Zufallsvariable X ist $\Gamma_{a,b}$-verteilt, falls X die Dichte

$$g_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b) a^b} z^{b-1} e^{-\frac{z}{a}} 1_{(0,\infty)}(z)$$

für $a, b > 0$ hat. Zeigen Sie, dass X den Erwartungswert ab und Varianz $a^2 b$ hat.

(c) Ist X_n verteilt nach $\Gamma_{a,nb}$, so ist $n^{-\frac{1}{2}}(X_n - nab)$ asymptotisch normal mit Mittelwert 0 und Varianz a^2b.

46. Gilt $X_n \longrightarrow X$ in Wahrscheinlichkeit und $Y_n \longrightarrow c \neq 0$ in Wahrscheinlichkeit, dann auch

$$\frac{X_n}{Y_n} \longrightarrow \frac{X}{c} \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

47. Ist X verteilt wie N_{μ,σ^2} und Y wie N_{ν,τ^2}, und sind X und Y unabhängig, dann ist $X+Y$ wie $N_{\nu+\mu,\sigma^2+\tau^2}$ verteilt.

48. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[1, e]$. Konvergiert $(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}$ in Wahrscheinlichkeit, und wogegen?

Mathematische Karikatur