Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **SS 2005**

Übungen zur Stochastik 1
Serie 4
Abgabe: Dienstag, 24.05.05, 14:00 im Hörsaal

16. Gibt es σ-Algebren, die aus abzählbar vielen Mengen bestehen?

17. a) Sind $f_1, f_2, \ldots$ nichtnegativ und Borel-meßbar, so gilt

$$\mu \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu f_n.$$

b) Eine Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.
c) Sind f und g Borel-meßbar mit $|f| \leq g$, und ist g integrierbar, dann ist auch f integrierbar.

18. a) Ist die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Algebren eine Algebra?
b) Ist die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von σ-Algebren eine σ-Algebra?

19. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$, und seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n < \infty$. Dann gilt $\mu(\limsup A_n) = 0$.

20. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ aufsteigend. Dann ist φ Borel-meßbar, und

$$\mu(|f| \geq a) \leq \frac{1}{\varphi(a)} \mu(\varphi \circ |f|).$$