Prof. Dr. W. Wefelmeyer **SS 2005**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Stochastik 1
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 31.05.05, 14:00 im Hörsaal

21. Sei f integrierbar bezüglich eines Maßes μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Definiere ν durch $\nu A = \mu(1_A f)$, $A \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\nu^+ A = \mu(1_A f^+), \quad \nu^- A = \mu(1_A f^-).$$

22. Zeigen Sie, daß der Satz von der dominierten Konvergenz ohne die Dominiertheits-Voraussetzung im allgemeinen nicht gilt, selbst wenn das Maß endlich ist und alle Funktionen integrierbar sind.

23. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und f μ-integrierbar. Außerdem seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ mit $A_n \downarrow A$ oder $A_n \uparrow A$. Dann gilt $\mu 1_{A_n} f \to \mu 1_A f$.

24. a) Die Mengen $(-\infty, c]$, $c \in \mathbf{R}$, erzeugen die Borel-Algebra.
b) Gibt es ein *abzählbares* Erzeugendensystem für die Borel-Algebra?

25. Die folgenden Teilmengen von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sind in $\mathcal{B}^{\mathbf{N}}$:

a) $\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sup_{n \in \mathbf{N}} x_n < a\}$,

b) $\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < a\}$,

c) $\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \lim_{n \to \infty} x_n$ existiert und ist endlich$\}$,

d) $\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \limsup_{n \to \infty} x_n \le a\}$,

e) $\{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ für mindestens ein $n \in \mathbf{N}\}$.

(*Hinweis:* Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ sind in $\mathcal{B}^n$.)