

Übungen zur Stochastik 1  
Serie 9

Abgabe: Dienstag, 12.07.05, 14:00 im Hörsaal

41. Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen für

- (a) das Dirac-Maß  $\varepsilon_a$ ,
- (b) das Maß  $\frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_{-a})$ ,
- (c) die Bernoulli-Verteilung  $B_{1p}$ ,
- (d) die geometrische Verteilung  $G_p$ ,
- (e) die Poisson-Verteilung  $P_\lambda$ ,
- (f) die Gleichverteilung über einem symmetrischen Intervall  $(-a, a)$ .

42. Sei  $P|\mathcal{B}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Lebesgue-Dichte  $f$  und  $X$  eine integrierbare Zufallsvariable auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Ferner sei  $\mathcal{B}_0$  die Sub- $\sigma$ -Algebra, die von den um 0 symmetrischen Intervallen erzeugt wird. Berechnen Sie  $E[X|\mathcal{B}_0]$ .

43. (*Reproduktivität einiger Verteilungen.*)

- a)  $P_\lambda * P_\mu = P_{\lambda+\mu}$ ,
  - b)  $\Gamma_{ab} * \Gamma_{ac} = \Gamma_{a,b+c}$ .
- (*Hinweis:* Verwenden Sie charakteristische Funktionen.)

44. (*Vertauschung von Differentiation und Integration.*)

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $I$  ein offenes Intervall,  $t \in I$  und  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- a) Für  $s \in I$  ist  $f(s, \cdot)$  integrierbar,
- b) Für  $\omega \in \Omega$  ist  $f(\cdot, \omega)$  differenzierbar in  $t$ ,
- c) Für eine integrierbare Funktion  $g$  und für  $\omega \in \Omega$  und  $s \neq t$  gilt

$$\left| \frac{f(s, \omega) - f(t, \omega)}{s - t} \right| \leq g(\omega).$$

Dann gilt  $\partial_t \mu f(t, \cdot) = \mu \partial_t f(t, \cdot)$ .

45. (*Momente als Ableitungen der charakteristischen Funktion.*)

Für  $X \in L_n$  ist die charakteristische Funktion  $\varphi^X$   $n$ -mal differenzierbar mit  $\partial_t^n \varphi^X = i^n EX^n e^{itX}$ . Insbesondere gilt  $\partial_0^n \varphi^X = i^n EX^n$ .

(*Hinweis:* Vertauschen Sie Differentiation und Integration.)

### **Bemerkungen**

- Die Klausur findet am Dienstag, den 19.07.05, um 14:00 s.t. im Hörsaal des Mathematischen Instituts statt und dauert zwei Stunden. Bitte kommen Sie frühzeitig.
- Bringen Sie bitte zur Klausur Ihren Studentenausweis sowie einen Lichtbildausweis mit. Hilfsmittel wie Aufzeichnungen, Bücher, Taschenrechner sind nicht erlaubt.
- Die Ergebnisse der Klausuren werden an dem Freitag, den 24.07.05, in der Vorlesung bekannt gegeben.