

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 1

1. Der natürliche Parameterraum einer exponentiellen Familie ist konvex und hat ein nichtleeres Inneres.

2. Sind X_i unabhängig und exponentielle Familien in $\eta(\vartheta)$ und $T_i(x)$, so ist (X_1, \dots, X_n) eine exponentielle Familie in $\eta(\vartheta)$ und $\sum_{i=1}^n T_i(x)$.

3. Folgende Verteilungsfamilien mit Lebesgue-Dichten sind exponentielle Familien bezüglich aller Parameter. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

a) Die Gamma-Verteilungen $\Gamma_{a,b}$, $a, b > 0$, mit Dichte

$$\frac{1}{a^b \Gamma(b)} x^{b-1} e^{-x/a}, \quad x > 0.$$

b) Die Beta-Verteilungen $B_{a,b}$, $a, b > 0$, mit Dichte

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

4. Folgende Verteilungsfamilien mit Zähldichten sind exponentielle Familien bezüglich $p \in (0, 1)$ und λ . Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

a) Die Poisson-Verteilungen P_λ , $\lambda > 0$, mit Dichte

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

b) Die negativen Binomial-Verteilungen $B_{n,p}^-$, $p \in (0, 1)$, mit Dichte

$$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, \dots$$

5. Bilden die Gleichverteilungen über $(0, \vartheta)$, $\vartheta > 0$, eine exponentielle Familie?