Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 6

26. *Bedingungen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit in L_p.*
a) Für $\tau \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ seien a_τ meßbar und m-dimensional mit

$$|a_\tau(x) - a_\vartheta(x)| \leq |\tau - \vartheta|^c b(x)$$

für ein $b \in L_p(P)$, $p \geq 1$ und $c \in (0, 1]$. Dann ist $\tau \to a_\tau$ stetig in $L_p(P)$ in $\tau = \vartheta$.

b) Ist $\tau \to a_\tau(x)$ stetig differenzierbar und die Matrix der partiellen Ableitungen $\dot{a}_\tau$ stetig in $L_p(P)$ in $\tau = \vartheta$, dann ist $\tau \to a_\tau(x)$ differenzierbar in $L_p(P)$ in $\tau = \vartheta$.

27. a) Sind X_n Zufallsvektoren und c ein Vektor mit $X_n \to c$ in W., und ist f stetig in c, dann gilt $f(X_n) \to f(c)$ in W.

b) Sind X_n und Y_n Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^m$ mit $X_n \to 0$ in W. und Y_n beschränkt in W., so gilt $X_n^\top Y_n \to 0$ in W.

c) Gilt $X_n \to X$ in W. oder $X_n \Rightarrow X$, so ist X_n beschränkt in W.

28. Sind X_n und X Zufallsvektoren mit $X_n \to X$ in W., und ist f stetig, dann gilt $f(X_n) \to f(X)$ in W.

29. Sind X_n und X Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^m$ mit $X_n \to X$ in W., ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar, und bezeichnet Df die Matrix der partiellen Ableitungen, so gilt

$$f(X_n) = f(X) + (Df(X) + o_p(1))(X_n - X).$$

30. Sind X_n und X Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^m$ und $a_n \uparrow \infty$ mit $a_n(X_n - X) \Rightarrow Y$, und ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar, so gilt

$$a_n(f(X_n) - f(X)) = Df(X)a_n(X_n - X) + o_p(1).$$

Wenn also $(X, a_n(X_n - X)) \Rightarrow (X, Y)$, dann $a_n(f(X_n) - f(X)) \Rightarrow (Df(X)Y)$.