Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2006**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 8

36. (*Schätzen der Fehlervarianz bei linearer Regression.*) Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $E(Y|X) = \vartheta X$ für ein (unbekanntes) $\vartheta \in \mathbb{R}$. Seien (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$, unabhängige Beobachtungen aus diesem Modell. Bestimmen Sie eine Schätzer für die Varianz von $\varepsilon = Y - \vartheta X$. Geben Sie Bedingungen an, unter denen er asymptotisch normal ist, und bestimmen Sie seine asymptotische Varianz.

37. (*Verbundene Verteilung von Ordnungsstatistiken.*) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit positiver Dichte f_ϑ. Sei $0 < p < q < 1$ und f stetig und positiv in den Quantilen ξ_p und ξ_q. Sei $k = np + o(n^{1/2})$ und $m = nq + o(n^{1/2})$. Dann gilt

$$n^{1/2} \begin{pmatrix} X_{k:n} - \xi_p \\ X_{m:n} - \xi_q \end{pmatrix} \Rightarrow N(0, \Sigma)$$

mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} p(1-p)/f^2(\xi_p) & p(1-q)/(f(\xi_p)f(\xi_q)) \\ p(1-q)/(f(\xi_p)f(\xi_q)) & q(1-q)/f^2(\xi_q) \end{pmatrix}.$$

38. (*Stichproben-Maximum.*) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $(0, 1)$. Dann gilt

$$n(1 - X_{n:n}) \Rightarrow E_1.$$

39. (*Stichproben-Median.*) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $(0, \vartheta)$, $\vartheta > 0$. Sei $k = n/2 + o(n^{1/2})$. Dann gilt

$$n^{1/2}(2X_{k:n} - \vartheta) \Rightarrow N(0, \vartheta^2).$$

40. (*MISE.*) Sei $K \in \mathcal{K}_{r,\alpha}$ und $f \in \mathrm{Lip}_{r,\alpha}(L)$ mit $L = L(x)$ integrierbar. Für die Bandweite b gelte $b \to 0$ und $nb \to \infty$. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Dichte f. Dann gilt für den integrierten mittleren quadratischen Fehler des Kernschätzers $\hat{f} = (1/n) \sum_{i=1}^n K_b(x - X_i)$:

$$E \int (\hat{f}(x) - f(x))^2 \, dx = O\Big(\frac{1}{nb}\Big) + O(b^{2(r+\alpha)}).$$